СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

А.С. Портняжкин, Е.Н. Элекина

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Тела цилиндрической формы часто используются в современных конструкциях: резервуары для воды, сжиженного природного газа, нефтепродуктов и др., поэтому важно уметь предсказывать их поведение при приложении различных видов нагрузок (статической, динамической, внезапно приложенной и др.), а также вычислять напряжения и деформации в различных точках цилиндров. Хорошо известны решения о колебаниях однородных и анизотропных бесконечных цилиндров [1, 2]. В работе рассматривается цилиндр, неоднородность которого заключается как в изменении упругих постоянных по толщине цилиндра, так и в изменении его плотности. Такими телам являются, например, сосуды высокого давления, изготовленные из рулонированных обечаек, сваренных кольцевыми швами между собой [3]. Такая конструкция имеет механические характеристики, изменяющиеся вдоль радиуса дискретно. Рулонированные (многослойные) цилиндры более экономичны в изготовлении, требуют меньше трудозатрат и более безопасны в силу своей конструкции.

Цель — вычисление частот собственных колебаний неоднородного бесконечного цилиндра и построение соответствующих форм колебаний.

Методы. Задача решается методом конечных интегральных преобразований, предложенным Ю.Э. Сеницким. В работе свойства материала приняты степенной функцией радиуса:

$$\lambda^{\text{н}} = \lambda \bar{r}^{n}, \mu^{\text{н}} = \mu \bar{r}^{n}, \ \rho^{\text{н}} = \rho \bar{r}^{n}, \ c_1^{\text{н}} = c_1, \tag{1}$$

ρ — плотность материала; λ, μ — постоянные Ламе; n — показатель неоднородности; $c_1^{\text{н}}$ — скорость распространения волн расширения.

Дифференциальное уравнение теории упругости в перемещениях, описывающее радиально-симметричные колебания цилиндра в сферических координатах, имеет вид [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 u^{\text{н}}}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r}\frac{\partial u^{\text{н}}}{\partial r} - \frac{1-n\beta}{r^2}u^{\text{н}} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u^{\text{н}}}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Начальные

$$u(r,0) = f(r), \ \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = g(r), \tag{3}$$

и краевые условия задачи

$$\sigma_r(a,t) = A(t), \ \sigma_r(b,t) = B(t). \tag{4}$$

Здесь $u(r, 0)$ — радиальное перемещение цилиндра; $f(r)$, $g(r)$ — функция перемещения и функция скорости перемещений, определяющие начальное состояние системы в момент приложения динамической нагрузки; a, b — соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра [4].

Для решения задачи вводится конечное интегральное преобразование с ядром $K(\xi_i, r)$ [2]:

$$\bar{W}(\xi_i,t) = \int_a^b W(r,t)K(\xi_i,r)dr. \tag{5}$$

Формула обращения данного преобразования имеет вид:

$$W(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{W}(\xi_i,t)K(\xi_i,r)}{\left\|K(\xi_i,r)\right\|^2}. \tag{6}$$

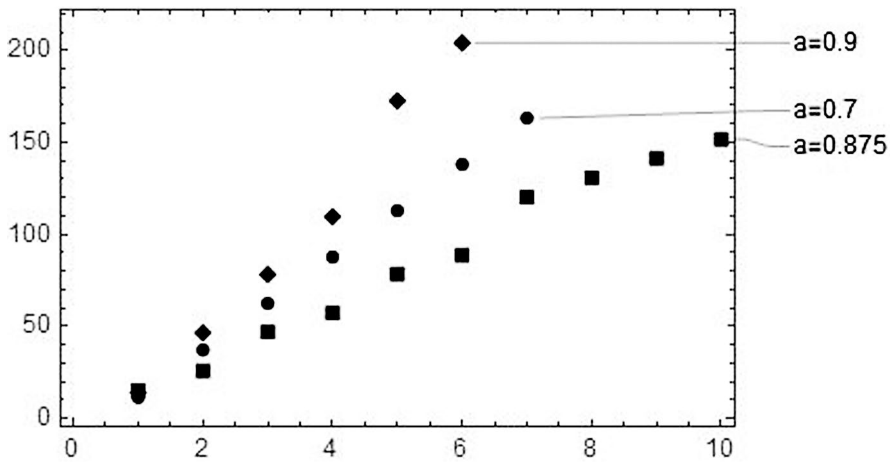

Рис. 1. Изменение частоты собственных колебаний от толстостенности *a* цилиндра

Здесь ξ_i — частоты собственных колебаний, образующие счетное множество; $|K(\xi_i, r)|$ — норма в пространстве функций, интегрируемых с квадратом, она определяется выражением

$$\left\|K(\xi_i,r)\right\|^2=\int_a^b K^2(\xi_i,r)dr. \tag{7}$$

Ядро преобразования представляется в виде комбинации функций Бесселя:

$$K(\xi_i,r)=J_1(\xi_i r)\left[\xi_i Y_0(\xi_i a)-h_1 Y_1(\xi_i a)\right]-Y_1(\xi_i r)\left[\xi_i J_0(\xi_i a)-h_1 J_1(\xi_i a)\right], \tag{8}$$

$J(\xi_i, r)$, $Y(\xi_i, r)$ — функции Бесселя I и II рода, а собственные значения ξ_i находятся при решении трансцендентного уравнения:

$$\left[\xi_i J_0(\xi_i b)-k_1 J_1(\xi_i b)\right]\left[\xi_i Y_0(\xi_i a)-h_1 Y_1(\xi_i a)\right]=\left[\xi_i J_0(\xi_i a)-h_1 J_1(\xi_i a)\right]\left[\xi_i Y_0(\xi_i b)-h_1 Y_1(\xi_i b)\right]. \tag{9}$$

Здесь h_1 и k_1 параметры, зависящие от вида рассматриваемого напряженного состояния — плоской деформации или плоского напряженного состояния.

Результаты. В качестве примера рассмотрим цилиндр наружного радиуса b = 100 см, различной толстостенности a = 0,5; 0,7; 0,875. Коэффициент Пуассона ν = 0,4, $E = 2{,}059 \cdot 10^5$ МН/м^2. В таблице приведены первые 5 безразмерных корней характеристического уравнения и соответствующие им частоты собственных колебаний цилиндра с различными показателями неоднородности.

Таблица. Корни характеристического уравнения и частоты собственных колебаний цилиндра

№	Параметр	1	2	3	4	5
n = 0, a = 0,875	ξ	11,5488	37,3845	62,6441	87,8306	112,9932
	ω	165,425	535,494	987,31	1258,08	1618,51
n = 1, a = 0,75	ξ	15,264	25,919	46,97	57,478	78,453
	ω	218,693	371,270	672,939	823,315	1123,77
n = 1, a = 0,875	ξ	11,1259	37,2647	62,5729	87,78	112,9539
	ω	159,368	533,778	896,292	1257,36	1617,95
n = 2, a = 0,875	ξ	10,701	37,152	62,5063	87,7325	112,917
	ω	153,281	532,164	895,337	1256,68	1617,42

Выводы. Частоты собственных колебаний неоднородного бесконечного полого цилиндра зависят от его толстостенности (отношения a/b) и от показателя неоднородности n.

Ключевые слова: неоднородный цилиндр; сосуды высокого давления; задача на собственные значения; частота собственных колебаний; конечное интегральное преобразование.

Список литературы

1. Сеницкий Ю.Э., Епишкин В.В. Собственные колебания конечного толстостенного анизотропного цилиндра // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2008. № 1. С. 63–71.
2. Сеницкий Ю.Э., Епишкин В.В. Динамическая задача теории упругости для анизотропного короткого цилиндра с учетом сил вязкого сопротивления // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2008. № 3. С. 29–41.
3. ГОСТ Р 54803–2011 «Сосуды стальные сварные высокого давления. Общие технические требования» (утв. приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 13 декабря 2011 г. N 1167-ст). Доступ по ссылке: http://ivo.garant.ru
4. Элекина Е.Н., Кальмова М.А., Кулакова Е.А. Напряженно-деформированное состояние неоднородного длинного цилиндра, загруженного внутренним динамическим давлением // Строительные технологии: сборник статей: «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре» / под ред. М.В. Шувалова, А.А. Пищулева, А.К. Стрелкова; Октябрь 26–30, 2020; Самара. Самара: СамГТУ, 2020. С. 449–454.

Сведения об авторах:

Александр Сергееевич Портняжкин — студент, группа 20П4, факультет промышленного и гражданского строительства; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия.

Елена Николаевна Элекина — научный руководитель, старший преподаватель кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия.