

Приближенное интегрирование при решении задач

А.А. Галимова, О.М. Кечина

Самарский государственный социально-педагогический университет, Самара, Россия

Обоснование. Решение многих практических задач, связанных с вычислением определенного интеграла, не всегда можно осуществить, используя формулу Ньютона – Лейбница, так как не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции или вычисление значений первообразной сложно из-за громоздкости ее формулы. Тогда возможно применение различных приближенных методов интегрирования. Наиболее распространенными методами считаются: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол. Основная идея каждого из этих методов заключается в замене исходной подынтегральной функции на более простую функцию, значения которой совпадают с заданной в конечном числе точек.

Цель — на примере продемонстрировать применение приближенных методов интегрирования: с точностью до 0,01 вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx.$$

Методы. Значение определенного интеграла было найдено тремя способами. В первом случае использовался метод трапеций, во втором — метод парабол, в третьем — метод прямоугольников. Так как интеграл нужно было вычислить с заданной степенью точности, то в первую очередь для каждого из методов было найдено количество разбиений. Для этого во всех трех способах решалось неравенство $|Rn(f)| \leq 0,01$, где в качестве $Rn(f)$ использована формула для нахождения абсолютной погрешности соответствующего метода. Для каждого из методов был вычислен шаг интегрирования.

Результаты. Были определены узлы интегрирования и значения подынтегральной функции в них для метода трапеций и метода парабол. В случае метода прямоугольников также были найдены узлы интегрирования, но значение подынтегральной функции было вычислено для полусуммы i -го и $(i - 1)$ -го узлов. Полученные данные приведены в таблицах 1–3.

Таблица 1. Значения функции в узлах интегрирования для метода трапеций

Номер узла i	0	1	2	3	4	5	6
Узел x_i	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
Значение функции $f(x_i)$	1	0,7655	0,5684	0,3961	0,2442	0,1121	0

Таблица 2. Значения функции в узлах интегрирования для метода парабол

Номер узла i	0	1	2	3	4
Узел x_i	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
Значение функции $f(x_i)$	1	0,6633	0,3961	0,1756	0

Таблица 3. Значения функции в узлах интегрирования для метода прямоугольников

Номер узла i	0	1	2	3	4
Узел x_i	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
Полусумма узлов $(x_{i-1} + x_i) / 2$		0,1963	0,589	0,9817	1,3744
Значение функции $f((x_{i-1} + x_i) / 2)$		0,8198	0,5232	0,2803	0,0821

Выводы. С использованием данных таблиц и соответствующих формул для каждого из рассмотренных методов — метода трапеций (1)–(2), метода парабол (3)–(4) и метода прямоугольников (5)–(6) — получили приближенное значение интеграла с точностью до 0,01:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx \approx \frac{\pi}{24} (1 + 0 + 2 \cdot 2,0863) = 0,67 \quad (2)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right) \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx \approx \frac{\pi}{24} (1 + 0 + 2 \cdot 0,3961 + 4 \cdot 0,8399) = 0,67 \quad (4)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx \approx \frac{\pi}{8} (0,8198 + 0,5232 + 0,2803 + 0,0821) = 0,67. \quad (6)$$

Причем во всех трех случаях ответ получился одинаковым, что подтверждает правильность расчетов.

Ключевые слова: методы приближенного интегрирования; метод трапеций; метод парабол; метод прямоугольников; формула абсолютной погрешности.

Список литературы

1. Бараненков Г.С., Демидович Б.П., Ефименко В.А. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / под ред. Б.П. Демидовича. Москва: Астрель; АСТ, 2004. 495 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для вузов. В 2-х т. Москва: ИнтегралПресс, 2004. Т. 1. 415 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: учеб. для вузов. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. 3-е изд., перераб. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 399 с.

Сведения об авторах:

Алсу Альмировна Галимова — студентка, группа ФМФИ-620МФo, факультет математики, физики и информатики; Самарский государственный социально-педагогический университет, Самара, Россия. E-mail: galimova.alsu@sgspu.ru

Ольга Михайловна Кечина — научный руководитель, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения; Самарский государственный социально-педагогический университет, Самара, Россия. E-mail: olga.kechina@pgsga.ru