

Разложение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в односвязной и двусвязной областях по системам неортогональных функций

Б.А. Уткин, Л.В. Воропаева

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Эффективное использование несеточного метода поиска решений граничных задач [1, 2], аналога метода граничных элементов, предполагает не только уменьшение объема вычислений, но и обоснование сходимости приближенных решений, связанных с аппроксимацией интегральных уравнений первого рода, сингулярных вблизи границы.

Цель — качественное исследование метода разложения решений граничных задач по неортогональным системам, полученным из фундаментальных функций оператора Лапласа [1, 2]. Анализ приближенных решений задач для уравнения Лапласа в односвязной и двусвязной областях с граничными условиями первого рода. Сравнение решений с результатами из [1, 2].

Метод. Вне рассматриваемой области выбирается контур, не имеющий общих точек с границей области. На нем строится последовательность фундаментальных функций основного дифференциального оператора задачи. След вспомогательной функции, входящей в интегральное представление решения граничной задачи, восстанавливается из СЛАУ, после дискретизации интегрального уравнения во внешности заданной области.

Результаты. В качестве первого примера рассматривалась задача Дирихле для внутренности эллипса. При разном числе узлов используемой квадратурной формулы были выбраны «оптимальные» вспомогательные эллипсы, для которых погрешность решения граничной задачи минимальна. Использование квадратурной формулы с числом узлов 64, обеспечило точность решения вблизи границы эллипса до $2.77E-02$. С другой стороны, число обусловленности матрицы СЛАУ для определения значений неизвестной функции велико, что говорит о неустойчивости вычислительного процесса.

Для иллюстрации метода в двусвязной области была решена внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце. Вне кольца были выбраны два «оптимальных» вспомогательных контура, и при числе узлов, равном 40, получена аппроксимация решения в лучшем случае с погрешностью до 10^{-6} , но вблизи границ до 3,2 при числе обусловленности матрицы СЛАУ $\cdot 10^3$.

Выводы. Точность приближенных решений граничных задач, полученных с использованием метода разложения по системе фундаментальных функций, регулируется выбором «оптимальных» контуров вблизи границ.

Ключевые слова: метод граничных элементов; сингулярные интегральные уравнения; граничная задача; фундаментальные функции дифференциального оператора; гармонический потенциал.

Список литературы

1. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. Москва: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1963. 472 с.
2. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. Москва: Наука, 1991. 352 с.
3. Уткин Б.А., Воропаева Л.В. Численное решение функционального уравнения Гаусса // XLVIII Самарская областная научная студенческая конференция: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]: в 2-х т. Апрель 12–12, 2022; Самара. Санкт-Петербург: Эко-Вектор Ай-Пи, 2022. Т. 1. С. 231–232. DOI: 10.17816/SRSSC20221

Сведения об авторах:

Богдан Алексеевич Уткин — студент, группа 3-ИАиИТ-10М, институт автоматизации и информационных технологий; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: umm97@list.ru

Людмила Вячеславовна Воропаева — научный руководитель, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: ludmilav2@yandex.ru