

Решение задачи вязкоупругого деформирования толстостенной трубы для анизотропного материала с операторами дробного интегро-дифференцирования

А.А. Красильникова, У.Ю. Арланова

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Толстостенные конструкции являются одним из эффективных средств, отвечающих технологическим условиям работы в условиях интенсивного силового и теплового нагружения. Изучению поведения толстостенных труб посвящено большое количество работ [1–6], но в подавляющем большинстве из них материал конструкций является упругим, не обладает реологическими свойствами и/или является изотропным. Явление ползучести свойственно некоторым металлам, явно проявляется в бетоне, грунте, дереве и особенно в полимерах. Учет фактора ползучести необходим для точного расчета работы конструкций. Однако классические модели вязкоупругости не всегда корректно описывают поведение материалов. Именно поэтому изучение вязкого поведения толстостенных конструкций, в том числе труб, изготовленных из анизотропных материалов, с помощью аппарата дробного интегро-дифференцирования является актуальной задачей.

Цель — найти аналитические решения задачи ползучести для толстостенной трубы из анизотропного материала на основе классических и дробных аналогов вязкоупругих моделей Максвелла и Фойхта.

Методы. Для построения новых вязкоупругих моделей поведения материалов использовался аппарат дробного интегро-дифференцирования [7]. Законность редукции структурных механических моделей к математическим моделям наследственно упругого тела с использования операторов дробного интегрирования и дифференцирования подробно описана в работе [8]. Поставлена плоская задача нагружения толстостенной трубы с внутренним и внешним радиусами r_0 и R соответственно симметрично распределенными относительно оси трубы постоянными внутренним и внешним давлениями q и Q соответственно. Найдены определяющие соотношения для анизотропных материалов в интегральной форме:

1) на основе классической модели Максвелла:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_r}{E_r} + \frac{1}{\eta_r} \int_0^t \sigma_r(\tau) d\tau, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} + \frac{1}{\eta_\theta} \int_0^t \sigma_\theta(\tau) d\tau, \quad (1)$$

2) на основе дробного аналога модели Максвелла:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_r}{E_r} + \frac{1}{\eta_r} I_{0t}^{\alpha_r} \sigma_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} + \frac{1}{\eta_\theta} I_{0t}^{\alpha_\theta} \sigma_\theta, \quad (2)$$

3) на основе классической модели Фойхта:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{\eta_r} \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} \sigma_r(\tau) d\tau, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\eta_\theta} \int_0^t e^{\lambda_\theta(t-\tau)} \sigma_\theta(\tau) d\tau, \quad (3)$$

4) на основе дробного аналога модели Фойхта:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{\eta_r} E_{0t; \lambda_r}^{\alpha_r, \alpha_r} \sigma_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\eta_\theta} E_{0t; \lambda_\theta}^{\alpha_\theta, \alpha_\theta} \sigma_\theta, \quad (4)$$

где ε_{rr} — радиальная деформация, вызванная действием радиального напряжения σ_r ; $\varepsilon_{\theta\theta}$ — окружная деформация, вызванная действием окружного напряжения σ_θ ; E_r и E_θ — модули упругости, η_r и η_θ — коэффициенты вязкости вдоль соответствующих осей; в определяющих соотношениях для дробного аналога модели Максвелла (2) I_{0t}^α — оператор дробного интегрирования порядка α [7]; в определяющих соотношениях на основе дробных моделей (2) и (4) параметры $\alpha_r \in (0, 1)$ и $\alpha_\theta \in (0, 1)$ — порядки дробного интегрирования; для соотношений по типу фойхтовских (3) и (4) $\lambda_r = -E_r/\eta_r$, $\lambda_\theta = -E_\theta/\eta_\theta$; в соотношениях (4)

$E_{ot;\lambda}^{\alpha,\alpha}$ — интегральный оператор [9, с. 36]. В процессе решения для параметров моделей были выведены следующие соотношения:

$$\alpha_r = \alpha_\theta = \alpha, \quad \frac{\mu_{r\theta}}{\mu_{\theta r}} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{\eta_r}{\eta_\theta} = k^2 \Rightarrow \lambda_r = \lambda_\theta = \lambda.$$

Результаты. Получены решения поставленных задач:

1) на основе определяющих соотношений (1):

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{r\theta}\sigma_\theta}{E_\theta} + \left(\frac{\sigma_r}{\eta_r} - \frac{\mu_{r\theta}\sigma_\theta}{\eta_\theta} \right) t, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\mu_{\theta r}\sigma_r}{E_r} + \left(\frac{\sigma_\theta}{\eta_\theta} - \frac{\mu_{\theta r}\sigma_r}{\eta_r} \right) t,$$

2) на основе определяющих соотношений (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{r\theta}\sigma_\theta}{E_\theta} + \left(\frac{\sigma_r}{\eta_r} - \frac{\mu_{r\theta}\sigma_\theta}{\eta_\theta} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\mu_{\theta r}\sigma_r}{E_r} + \left(\frac{\sigma_\theta}{\eta_\theta} - \frac{\mu_{\theta r}\sigma_r}{\eta_r} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

3) на основе определяющих соотношений (3):

$$\varepsilon_r = \left(\frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{r\theta}\sigma_\theta}{E_\theta} \right) [1 - e^{-\lambda t}], \quad \varepsilon_\theta = \left(\frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\mu_{\theta r}\sigma_r}{E_r} \right) [1 - e^{-\lambda t}],$$

4) на основе определяющих соотношений (4):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \left(\frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{r\theta}\sigma_\theta}{E_\theta} \right) [1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)], \\ \varepsilon_\theta &= \left(\frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\mu_{\theta r}\sigma_r}{E_r} \right) [1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)$ — обобщенная дробная экспоненциальная функция [9, с. 39].

В полученных решениях

$$\sigma_r = c_1^* r^{k-1} + c_2^* r^{-k-1}, \quad \sigma_\theta = c_1^* k r^{k-1} + c_2^* k r^{-k-1},$$

где константы c_1^* и c_2^* были найдены через граничные условия для напряжений:

$$c_1^* = \frac{(qr_0^{k+1} - QR^{k+1})}{R^{2k} - r_0^{2k}}, \quad c_2^* = \frac{r_0^{k+1} R^{k+1} (Qr_0^{k-1} - qR^{k-1})}{R^{2k} - r_0^{2k}}.$$

Выводы. Данные решения получены на основе структурных механических моделей и хорошо описывают деформацию толстостенной трубы. Решения (5) и (6) лучше описывают реологические свойства материалов, так как содержат в себе параметр α , отвечающий за вязкость.

Ключевые слова: реология; анизотропия; ортотропия; дробное интегро-дифференцирование; модель Максвелла; модель Фойхта; толстостенные конструкции.

Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 416 с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: Наука, 1977. 384 с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва: Наука, 1988. 712 с.
4. Радченко В.П. Введение в механику деформируемых систем. Самара: СамГТУ, 2009. 196 с.
5. Бажанов В.Л. Механика деформируемого твердого тела. Учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. Москва: Юрайт, 2019. 178 с.
6. Скворцов Ю.В., Перов С.Н. Основы теории пластичности и ползучести: учебное пособие. Самара: АНО ВО Университет «МИР», 2019. 212 с.

7. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
8. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2016. Т. 20, № 1. С. 167–194. DOI: 10.14498/vsgtu1456
9. Огородников Е.Н., Арланова Е.Ю. Применение аппарата дробного исчисления при решении интегральных и дифференциальных уравнений. Самара: СамГТУ, 2019. 94 с.

Сведения об авторах:

Анастасия Алексеевна Красильникова — магистрант, группа 2–21ИАИТ–110м, институт информатики и информационных технологий; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: krasilnikova.aa@samgtu.ru

Екатерина Юрьевна Арланова — научный руководитель, кандидат физико-математических наук, доцент; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия, Самара, Россия. E-mail: earlanova@gmail.com