

Дробные операторы и скейлинг во фрактальной электродинамике, и широкополосные фрактальные антенны в исследовании высокочастотных резонансов и плазмонов

А.А. Потапов

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
125009, Россия, г. Москва,
ул. Моховая, 11, корп. 7

Приведены определения и основные свойства дробных производных и интегралов применительно к задачам радиофизики. Дается исторический очерк возникновения математической теории дробных операторов. Рассмотрены идеи скейлинга. Показано, что негауссовские распределения, также как и недифференцируемые функции и фракталы очень часто гораздо точнее описывают временные и пространственные физические процессы. Дано определение фрактальной электродинамики. Рассмотрен один из методов введения дробного интегро-дифференцирования по времени в основные уравнения электродинамики материальных сред. Показана эффективность фрактальных антенн и фрактальных частотно-избирательных сред. Указаны их области применения в современной радиоэлектронике. Дан обзор применения фрактальных апертур в части исследования резонансов и плазмонов в физических экспериментах. Представлены авторские концепции фрактальных импедансов и фрактальных радиосистем. Приведены направления перспективных исследований.

Ключевые слова: фрактал, скейлинг, дробные операторы, фрактальная электродинамика, фрактальные антенны, нано-антенны, фрактальные среды, фрактальные лабиринты, плазмоны, метаматериалы, фрактальные радиосистемы.

Введение

Дробное исчисление (экзотическое даже и в наше время) предлагает мощные математические инструменты в научных областях, которые имеют дело с традиционным исчислением целого порядка, и может ввести новое понимание в эти области. Классификация фракталов и множеств на их основе, впервые предложенная автором и одобренная Б. Мандельбротом при их личной встрече в 2005 г., существенно предполагает наличие скейлинга и применение математики дробного исчисления [1–10].

Многие физические законы, будучи применены к фрактальным объектам, теряют свою универсальность: одни и те же явления в евклидовом пространстве и на фрактальных объектах носят различный характер [1–20]. Предпринимаются активные попытки объяснить степенные зависимости различных физических (кинетических и динамических) характеристик с дробными показателями решениями уравнений в дробных производных. В связи с этим возникает естественный вопрос о применении этого математического аппарата и в других современных задачах радиофизики, электродинамики и радиотехники [1, 2, 8–20].

Дробное исчисление – это область математики, которая имеет дело с обобщением хорошо известных операторов дифференцирования и интегрирования до произвольных степеней нелинейного порядка, который могут быть целыми действительными или даже мнимыми числами [8–11]. Математическая идея дробных производных, которые относятся к концу XVII века, были предметом исследовательского интереса многих математиков. Более того, как упомянуто в [10, 21], именно Лиувилль, который явился пионером в разработке дробного исчисления, был вдохновлен задачей закона фундаментальных сил в электродинамике Ампера и использовал дробное дифференцированное уравнение в этой задаче.

Дробные интегродифференциалы имеют интересные математические свойства, которые можно использовать в описании большинства физических явлений. Автор считает, что дробное исчисление предлагает богатые математические инструменты в научных областях (радиофизика, электродинамика, радиотехника и т. д.) которые имеют дело с традиционным исчислением целого порядка, и способствуют новому пониманию в этих областях.

В настоящей работе мы сначала рассмотрим некоторые определения и важные свойства дробных производных и интегралов. Автор считает, что представленные ниже результаты помогут специалистам начать активно использовать дробные операторы в своей исследовательской и инженерной работе.

1. Краткий исторический очерк возникновения математической теории дробных операторов

Дробный математический анализ имеет давнюю историю и чрезвычайно богатое содержание [10, 12, 13, 22]. Идеи о дробном интегродифференцировании занимали многих видных ученых: Лейбница, Эйлера, Лиувилля и других. Интерес к дробному математическому анализу возник почти одновременно с появлением классического анализа (Г. Лейбниц в письмах к Г. Лопиталю в 1695 г. при рассмотрении дифференциалов и производных порядка $1/2$ высказал пророческие слова: «...Из этого парадокса со временем будут выведены полезные следствия» (цит. по [8, 10, 22])).

В настоящее время фактически нет ни одной области классического анализа, которой не коснулся бы дробный анализ. Современное состояние дробного исчисления характеризуется большим потоком публикаций и проведением ежегодно специальных международных конференций (см., например, [11]). Математический язык операторов дробного интегродифференцирования незаменим для описания и исследования физических фрактальных систем, процессов стохастического переноса (фрактальные субдиффузия и супердиффузия) и других фрактальных явлений [1–25]. Работы в этом направлении широко развернуты в мире с конца XX в. и сдерживаются, по-видимому, только экзотичностью языка дробных производных и дробных интегралов.

Вероятно, самое раннее более или менее систематическое исследование дробного математического анализа относится к XIX в. и принадлежит Н. Абелю (1823 г.), Ж. Лиувиллю (1832 г.), Б. Риману (1847 г.) и Х. Хольмгрёну (1864 г.), хотя ранее вклад внесли Л. Эйлер (1730 г.) и Ж. Лагранж (1772 г.).

Именно в своем цикле работ Ж. Лиувилль (1832 – 1835 гг.), применяя разложение функций в степенные ряды, определял q -ю производную путем почленного дифференцирования. Он же,

в частности, дал первые практические приложения созданной им теории к решению задач математической физики. Затем Б. Риман (1847 г.) предложил иное решение на основе определенного интеграла, пригодное к степенным рядам с нецелыми показателями. Данная работа, выполненная Риманом в студенческие годы, была опубликована лишь в 1876 г. (спустя 10 лет после его смерти). Конструкции Лиувилля и Римана являются основными формами дробного интегрирования. Развивая идею Лиувилля, А. Грюнвальд (1867 г.) ввел понятие дробной производной как предела разностных отношений.

Параллельно с теоретическими начинаниями разрабатывались приложения дробного анализа к решению различных задач. Одним из первых таких приложений явилось открытие Н. Абеля (1823 г.), показавшего, что решение задачи о таутохроме может быть получено путем интегрального преобразования, которое записывается как производная полуполого порядка. Существует историческое заблуждение, что Абель решил задачу только при значении индекса, равном $1/2$. На самом деле, как отмечено в [13], Абель рассмотрел решение в общем случае, и его работы сыграли огромную роль в развитии идей дробного интегродифференцирования. Заслугой Хольмгрёна является рассмотрение дробного дифференцирования как операции, обратной дробному интегрированию и приложение данных понятий к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Особо следует выделить цикл работ чл.-корр. Петербургской Академии наук (1884 г.) А. В. Летникова (1837 – 1888 гг.), который за время своей 20-летней научной деятельности разработал полную теорию дифференцирования с произвольным указателем (в настоящее время его работы преданы почти полному забвению). Работы А. В. Летникова за рубежом остались почти неизвестными [26]. (Начиная с выпуска № 1–2, т. 1, 2003 г. журнала «Нелинейный мир» была осуществлена в наше время повторная публикация работы Р.Я. Шостака 1952 г. [26], которая также приведена в виде приложения в издающейся монографии [10]).

Именно поэтому целью монографии [10] является спасение от забвения выдающегося математика и патриота России Алексея Васильевича Летникова, который был талантливым организатором математического образования в нашей стране и создателем математической шко-

лы МВТУ (ныне государственный технический университет им. Н. Э. Баумана). Его высочайшая математическая эрудиция, безукоризненная честность и порядочность вызывали уважение и любовь молодых ученых, многие из которых сыграли выдающуюся роль в истории отечественной науки. В монографии [10] представлены основные труды и научные результаты, полученные А. В. Летниковым, и ныне незаслуженно забытые. Показана основополагающая роль А. В. Летникова в создании дробного исчисления, математический аппарат которого основан на понятиях интегралов и производных дробного порядка.

В рассматриваемый период в России за работами Летникова последовали работы Н. Я. Сониной и П. А. Некрасова. С именами этих выдающихся русских ученых также связано распространение формулы Коши для аналитических функций в комплексной плоскости на нецелые значения индекса интегрирования.

В конце XIX в. вышла содержательная работа Ж. Адамара (1892 г.), в которой на основе разложения в ряд Тейлора было рассмотрено дробное дифференцирование аналитической в круге функции по радиусу, которое носит название подхода Адамара.

В первой половине XX в. заметный вклад, как в теорию, так и в практику дробного анализа внесли Г. Харди, Г. Вейль, М. Рисс, П. Монтель, А. Маршо, Д. Литтлвуд, Я. Тамаркин, Э. Пост, С. Л. Соболев, А. Зигмунд, Б. Надь, А. Эрдейи, Х. Кобер, Ж. Коссар и ряд других ученых. В 1915 г. Г. Харди и М. Рисс использовали дробное интегрирование для суммирования расходящихся рядов. В 1917 г. Г. Вейль определил дробное интегрирование для периодических функций в виде свертки с некоторой специальной функцией. Аналог неравенства С. Н. Бернштейна для дробных производных алгебраических многочленов на конечном отрезке дал в 1918 г. П. Монтель.

Специально для радиофизиков и радиоинженеров отметим тот факт, что операционное исчисление, разработанное О. Хевисайдом (1892, 1893, 1920 гг.), оказалось важным этапом в применении обобщенных производных. Именно О. Хевисайд (1920 г.) применил дробное дифференцирование в теории линий передач. После этого другие теоретики признали преимущества такого подхода и стали развивать его в соответствии с принятыми математическими концепциями (Н. Винер и Дж. Карсон, 1926 г.). В работе

А. Маршо (1927 г.) была введена новая форма дробного дифференцирования, которая применяется в случае функций с «плохим» поведением на бесконечности. Были введены в обиход дробные производные Маршо.

В работах М. Рисса (1936, 1938, 1949 гг.) были получены операторы типа потенциала (потенциалы Рисса), позволившие определить дробное интегрирование функций многих переменных. Для некоторых интегральных операторов и интегральных уравнений очень полезными оказались дробные интегралы Эрдейи и Кобера (1940 г.) и т. д.

Более подробные сведения исторического характера вплоть до 1986 г. содержатся в монографии [13], которая является своего рода энциклопедией по дробным операторам и написана крупными специалистами в математическом анализе. В ней впервые систематически изложены классические и современные результаты указанной теории.

Аппарат дробных производных и интегралов используется в физике, механике, химии, гидродинамике, теории гравитации и др. [25]. Приложения данного математического аппарата слишком многочисленны, чтобы все их перечислить. Наконец, настало время применить его к задачам фрактальной радиофизики и фрактальной радиолокации [1–11].

2. Классические определения дробных производных и интегралов

Дифференцирование и интегрирование – две наиболее часто используемые операции в вычислениях. Символически они показываются обозначением $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ и $\frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}}$, соответственно, где n и m – неотрицательные целые числа. Можно выяснить обобщение этих операторов, полагая n и m нецелыми реальными или даже мнимыми величинами. Именно это и есть основа идеи дробных производных и дробных интегралов, которая и была изучена многими математиками в течение многих лет.

Дробные производные и интегралы, являющиеся обобщением дифференцирования и интегрирования до произвольных порядков, обозначаются символом ${}_a D^\alpha f(x)$ [27] или $\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha}$ [12], где α – порядок оператора (не обязательно положительное или отрицательное целое число), а a – это нижний предел интегралов, использу-

емых для определения этих операторов (будут показаны ниже). Далее кратко рассмотрены некоторые из определений и свойств дробных интегродифференциалов.

Одно из наиболее часто используемых определений дробных интегралов известно под названием *интеграла Римана-Лиувилля* [12, с. 49]. Действительно обобщение Коши повторяет формулу интегрирования. Хорошо известно, что n -й порядок (или n -свертка) интегрирования данной функции $f(x)$ может быть записана как

$$\begin{aligned} {}_a D_x^{-n} f(x) &\equiv \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \\ &\dots \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u) du. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ${}_a D_x^{-n}$ означает n -порядок интегрирования с нижним пределом интегрирования равным a . Также известно, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, где $\Gamma()$ – гамма-функция.

Если заменить $(-n)$ на индекс α , который является нецелым отрицательным числом, то получим следующий *интеграл Римана-Лиувилля*, определяющий операцию дробного интегрирования:

$${}_a D_x^\alpha f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\alpha)!} \int_a^x (x-u)^{-\alpha-1} f(u) du \quad (2)$$

для $\alpha < 0$ и $x > a$.

Для дробных производных с $\alpha > 0$, определение (2) может быть все еще использовано, если объединить следующий дополнительный шаг ${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} {}_a D_x^{\alpha-m} f(x)$ для $\alpha > 0$, где m выбрано так, что $(\alpha - m)$ становится отрицательной, и тогда (2) можно применить для ${}_a D_x^{\alpha-m} f(x)$. Тогда, $\frac{d^m}{dx^m}$ – обычный дифференциальный оператор m -го порядка. [12, с. 50].

Другое определение дробного интегродифференцирования было дано Лиувиллем для функций, которые могут быть разложены в ряд экспоненциальных функций. Для функции $g(x)$, которая может быть записана как $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{u_i x}$, согласно Лиувиллю [12, с. 53], α -й порядок интегродифференцирования (с нижним пределом $a = -\infty$) может быть дан как:

$${}_{-\infty} D_x^\alpha g(x) \equiv \frac{dg^\alpha(x)}{dx^\alpha} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i^\alpha e^{u_i x}. \quad (3)$$

Также дается другое определение для степенного ряда с дробными экспонентами. Рассмотрим функцию одной переменной $h(x)$ оп-

ределенной на некотором закрытом интервале $[a, b]$ и представленную, как степенной ряд $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i (x-a)^{\nu+i/n}$, для $\nu > -1$, и $a \leq x \leq b$, где n – положительное целое число [12, с. 46]. Следует рассмотреть условие $\nu > -1$, когда функция $h(x)$ принадлежит классу дифференцируемых функций. Каждый элемент этого ряда может иметь нецелую степень. Возьмем один из этих элементов, например $(x-a)^p$ с нецелым показателем p , где $p > -1$. Тогда, согласно Риману [12, с. 53] дробная производная α -го порядка для такого элемента может быть записана как:

$$\begin{aligned} {}_0 D_x^\alpha (x-a)^p &\equiv \frac{d^\alpha (x-a)^p}{d(x-a)^\alpha} = \\ &\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha}, \text{ для } x > a \end{aligned} \quad (4)$$

и α может быть нецелым числом [12] (Риман рассматривал случай $a = 0$) [12, с. 53]. Очевидно, что когда α – целое положительное число m , то мы получаем обычное определение производной m -го порядка для $(x-a)^p$. Существует ряд других определений дробных производных и интегралов, которые можно найти в [12, глава 3].

3. Некоторые элементарные свойства дробных производных и интегралов

Дробные производные и интегралы имеют богатые и чрезвычайно интересные математические свойства, некоторые из которых мы кратко рассмотрим ниже.

I). Поскольку эти дробные операторы являются линейными (как и их цело-степенные аналоги), они подчиняются обычным **свойствам линейности, однородности и масштабирования или скейлингу** [12, с. 69, 75], т. е.

$$\frac{d^\alpha [f_1(x) + f_2(x)]}{dx^\alpha} = \frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha f_2(x)}{dx^\alpha}, \quad (5)$$

$$\frac{d^\alpha A f(x)}{dx^\alpha} = A \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}, \quad (6)$$

$$\frac{d^\alpha f(Cx)}{dx^\alpha} = C^\alpha \frac{d^\alpha f(Cx)}{d(Cx)^\alpha}. \quad (7)$$

для нижнего предела $a = 0$. Если $a \neq 0$, тождество (7) требует более сложного процесса преобразования [12, с. 75–76].

II). Одно из различий между обычными и дробными производными заключается в «**нелокальных**» свойствах дробных производных. Как может быть показано из (2), это означает, что

сами дробные производные функции, оцениваемой в точке x , зависят не только от точки x и ее соседних точек, но также и от значения функции между x и точкой нижнего предела a .

Однако, это не так для обычной производной (при α – целом положительном, т. е. $\alpha = m$), для которой производная $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ зависела бы только от величины функции в точке x (и конечно же, соседних точке вблизи точки x , как это верно для обычных производных). В некотором отношении эти операторы обладают **эффектом «памяти»**. Конечно, это верно и для обычного интегрирования. Это подразумевает то, что для дробной производной свойства дифференцирования и интегрирования на самом деле «смешаны». Другими словами, дробная производная не является «просто» дифференцированием в том традиционном виде, который мы знаем, но на нее также действительно влияют некоторые свойства интегрирования. Похожим образом дробное интегрирование имеет некоторые «смешанные» свойства дифференцирования и интегрирования.

III). Другую интересную особенность дробной производной можно наблюдать при оценке **дробной производной порядка α от постоянной функции $f(x) = A$** . Следуя определению (4), получаем следующее выражение для производной α -го порядка (с нижним пределом a) функции $f(x) = A$, где $x > a$:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha f(x) &= \frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \frac{d^\alpha A}{d(x-a)^\alpha} = \\ &= \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}, \text{ для } x > a. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, в отличие от того факта, что традиционная производная постоянной функции равна нулю, дробная производная α -го порядка постоянной функции при $x > a$ не равна нулю! Конечно, эта величина зависит от нижних пределов, используемых в этих определениях.

Так же интересно рассмотреть функции, чьи a -е производные являются постоянными. Если рассмотреть $f(x) = B(x-a)^\alpha$ для x в интервале $[a, +\infty)$ и при $\alpha > -1$, то для α -го порядка интегродифференциала с нижним пределом a получим:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha f(x) &= \frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \frac{d^\alpha B(x-a)^\alpha}{d(x-a)^\alpha} \\ &= B\Gamma(\alpha+1), \text{ для } x > a. \end{aligned} \quad (9)$$

IV). Здесь также стоит упомянуть **дробный интегродифференциал δ – функции Дирака и единичной ступенчатой функции Хевисайда**. В [12, с. 106] показано, что дробное интегродифференцирование функции $f(x) = \delta(x-d)$, при $\alpha < 0$ может быть записано как

$${}_a D_x^\alpha \delta(x-d) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} (x-d)^{-\alpha-1}, \quad (10)$$

для $a < d < x$.

Для $\alpha > 0$, можно использовать соотношение ${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} {}_a D_x^{\alpha-m} f(x)$, где m – целое число, выбранное так, чтобы $(\alpha - m)$ стало отрицательным. Для функции Хевисайда $U(x-d)$, где величина U является единицей для $x > d$ и нулем для $x < d$, дробное интегродифференцирование для $\alpha < 0$ приводит к соотношению вида

$${}_a D_x^\alpha U(x-d) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-d)^{-\alpha}, \quad (11)$$

для $a < d < x$.

И снова для $\alpha > 0$ можно последовать ${}_a D_x^\alpha = \frac{d^m}{dx^m} {}_a D_x^{\alpha-m}$. (При $\alpha > 0$ и использовании ${}_a D_x^\alpha = \frac{d^m}{dx^m} {}_a D_x^{\alpha-m}$ следует быть внимательным при работе с оператором $\frac{d^m}{dx^m}$ в точке $x = a$, где ${}_a D_x^{\alpha-m}$ может иметь разрыв и/или особенность).

V). Дробное исчисление может также применяться в описании **множества специальных функций в математической физике** в терминах дробного интегродифференцирования простых (или более элементарных) функций. Например, хорошо известно, что функция Бесселя $J_\nu(x)$ ν -го порядка (где индекс ν , вообще говоря, является нецелым числом) может быть записана в терминах дробного интегродифференцирования от $\cos x/x$:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(2x)^{-\nu}} {}_0 D_{x^2}^{-\nu-1/2} \frac{\cos x}{x}, \quad (12)$$

где индекс x^2 указывает на дробное интегродифференцирование по переменной x^2 .

Такое представление специальных функций может помочь, а в некоторых случаях и внести новый взгляд при исследованиях физических проблем, в которые вовлечены данные функции.

Таким образом, дробное интегродифференцирование предлагает более богатый и более общий класс дифференциальных и интегральных операторов.

4. Однородные функции и скейлинг

4.1. Сложность и простота. В настоящее время снова заметно возрос интерес к осмыслению таких понятий, как *простота* и *сложность*, осознанию разнообразных уникальных особенностей *сложных систем*, включая диссипативность, самоорганизацию, фрактальность, скейлинг, эргодичность (немарковость), негауссовость, линейные и нелинейные отклики на внешние возмущения [7, 8, 10, 25, 28].

Одна из главных проблем анализа сигналов, продуцируемых сложными системами, состоит в адекватной параметризации вкладов, характеризующих составляющие исследуемых сигналов. Исследуя сложные динамические или открытые системы, описание которых почти всегда проводится на феноменологическом уровне, часто используют свойство самоподобия (скейлинг, автомодельность или масштабная инвариантность). Свойство иерархической организации и самоподобия характерно для многих объектов. Примеры самоподобия можно найти в совершенно различных, на первый взгляд, объектах или процессах. Дробно-степенная зависимость приводит к интегро-дифференциальным уравнениям с производными и интегралами нецелого порядка по времени и пространству.

Особенности сложных систем проявляются на разных пространственных/временных масштабах. Наиболее адекватные оценки состояний исследуемой системы и динамики изменения состояния ее подсистем реализуются при использовании теории фракталов и обработке сигналов в пространстве дробной размерности с неизменным учетом эффектов скейлинга, что впервые предложено и развито автором, начиная с 80-х гг. XX века (см., например, [1–11] и ссылки в них).

4.2. Однородные функции и скейлинг. К обсуждению идей скейлинга полезно подходить с точки зрения однородных функций. Как следует из [29], функция одного или нескольких переменных, удовлетворяющая условию, что при одновременном умножении всех аргументов функции $f(x, y, \dots, u)$ на один и тот же произвольный множитель λ значение функции умножается на некоторую степень α этого множителя, называется *однородной*:

$$f(\lambda x, \lambda y, \dots, \lambda u) = \lambda^\alpha f(x, y, \dots, u), \quad (13)$$

здесь α – порядок однородности, или измерение однородной функции.

Например, степенная функция $f(t) = bt^\alpha$ удовлетворяет соотношению однородности (13) или *скейлингу*:

$$f(t) = \lambda^\alpha f(t) \quad (14)$$

при всех положительных значениях масштабного множителя λ . Естественно, что степенная функция, как и многие другие функции, удовлетворяющие скейлинговому соотношению (14), не являются фрактальными кривыми. Однако многие виды фракталов (масштабно-инвариантные фракталы) обладают скейлинговой симметрией [8]. Однородные функции обладают многими свойствами, делающими их весьма привлекательными для приближенного описания реальных процессов и объектов.

Различают: (1) – положительно однородные функции, для которых равенство (13) выполняется только для положительных λ ($\lambda > 0$), и (2) – абсолютно однородные функции, для которых выполняется равенство:

$$f(\lambda x) = |\lambda|^\alpha f(x). \quad (15)$$

Из дифференциальных свойств однородных функций отметим **лемму Эйлера**:

«Однородные функции пропорциональны скалярному произведению своего градиента на вектор своих переменных с коэффициентом, равным порядку однородности:

$$\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}). \quad (16)$$

Однородные функции играют очень важную роль в описании термодинамики фазовых переходов, в описании статистических свойств перколяции [1, 2, 10, 30], в турбулентности [31], в современной ренормгрупповой теории критических явлений [32] и т. п. Очень часто, из единственной посылки универсальности флуктуирующих систем с помощью скейлинговых оценок можно сделать далеко идущие выводы.

В [29] введена специально нормированная степенная функция

$$f_\lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} t^\lambda, \quad t > 0, \quad (17)$$

которая называется стандартной степенной функцией.

Эти функции самоподобные (у них нет характерного масштаба, что естественно приводит к концепции *фракталов*); они обладают полугрупповым свойством; в нулях гамма-функции $\Gamma(\lambda + 1)$ они определены как обобщенные функции, выражающиеся через δ -функцию и ее производные $\delta^{(\lambda)}(t)$; их трансформанты Лапласа

также принадлежат семейству степенных функций с точностью до постоянного множителя; в отличие от экспоненциальных функций, обладающих свойством инвариантности с точностью до постоянного множителя, степенные функции таким свойством не обладают (отсюда, свойство *памяти*); к ним применимы тауберовы теоремы, позволяющие по поведению преобразования Лапласа в области нуля однозначно определить асимптотическое поведение таких функций при $t \rightarrow \infty$ (эти теоремы верны и при условии, когда нуль и бесконечность меняются местами) [1, 2, 10, 14, 17, 25, 29, 33].

5. Степенные законы

Среди объектов материального мира самоподобие очень широко представлено [1, 2, 10, 14, 25, 30, 31]. Математическим выражением самоподобия являются *степенные законы*. Данным законам подчиняются как увеличивающиеся в размерах объекты, например, города, так и распадающиеся на отдельные фрагменты, например, камни. Единственное неперемное условие выполнения степенного самоподобного закона: отсутствие у данного вида объектов внутреннего масштаба. Действительно, не бывает реальных городов с числом жителей меньше 1 или больше 10^9 . Точно также размер камня не может быть меньше молекулы, или больше континента. Таким образом, если самоподобие и беспредельно, то только в ограниченных областях. Тот факт, что однородные степенные законы не имеют естественных внутренних масштабов обуславливает еще один феномен – *скейлинг* или масштабную инвариантность.

Можно сказать, что степенные законы с целочисленными или дробными показателями являются *генераторами самоподобия*. Как отмечено в [34, стр. 165]: «Самоподобию, в конце концов, все равно, целочисленный у нас показатель или нет. Нередко дробный показатель содержит важный ключ к решению запутанной головоломки». В математике на основе степенных функций построено дробное исчисление, введено понятие полюсов и создана теория вычетов, построена теория асимптотических разложений, введены устойчивые распределения [1, 2, 10, 14, 17, 18, 25, 29, 30, 33, 35–40].

Познавательная ценность теории вероятностей раскрывается только предельными теоремами [38]. Интерес классических исследований сводился к выяснению условий сходимости функций

распределений сумм независимых случайных величин к гауссовскому закону. Поэтому классическая теория вероятностей изучала лишь один предельный закон распределения – гауссовский. В теории вероятностей параллельно с завершением классической проблематики возник вопрос о том, какие законы, помимо гауссовских, могут быть предельными для сумм независимых случайных величин. Оказалось, что класс предельных законов далеко не исчерпывается гауссовским законом [38–40].

В основе современной теории вероятностей лежат предельные теоремы о сходимости распределений сумм независимых случайных величин к так называемым *устойчивым распределениям*: гауссовским или негауссовским. Первые опираются на центральную предельную теорему, а вторые (негауссовские) – на предельную теорему, доказанную Б. В. Гнеденко (1939 г.) и W. Doeblin (1940 г.) [38–40]. В этом случае предельная теорема накладывает ограничения на форму негауссовских распределений. А именно: для того, чтобы закон распределения $F(x)$ принадлежал области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α ($0 < \alpha < 2$), отличного от гауссовского, необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \frac{F(-x)}{1 - F(x)} \rightarrow \frac{c_1}{c_2} \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (18)$$

2) для каждой постоянной $k > 0$

$$\frac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(kx) + F(-kx)} \rightarrow k^\alpha \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где $c_1 \geq 0$; $c_2 \geq 0$; $c_1 + c_2 > 0$; $0 < \alpha < 2$.

Для доказательства (18) и (19) необходимо и достаточно, чтобы при некотором подборе постоянных B_n , выполнялись условия [38, с. 189]:

$$nF(B_n x) \rightarrow \frac{c_1}{|x|^\alpha} (x < 0),$$

$$n[1 - F(B_n x)] \rightarrow \frac{c_2}{x^\alpha} (x > 0), \quad (20)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF(B_n x) - \left[\int_{|x| < \varepsilon} x dF(B_n x) \right]^2 \right\} = 0.$$

Чем меньше величина α , тем длиннее хвост распределения и тем более оно отличается от гауссовского. При $1 < \alpha < 2$ устойчивые законы имеют математическое ожидание; при $0 < \alpha \leq 1$ устойчивые законы не имеют ни дисперсий, ни математических ожиданий. Условиями (18)–(20)

определяется так называемая *негауссовская статистика*.

Негауссовские распределения, также как и недифференцируемые функции и сами фракталы очень часто гораздо точнее описывают временные и пространственные природные процессы [1–11, 14, 17, 18, 25, 30, 34, 36–40]. Следует отметить, что проникновение дробного исчисления в физику резко ускорилось после установления его тесной связи с устойчивыми распределениями теории вероятностей.

6. Фрактальная электродинамика, антенны и ЧИП – терминология

В настоящее время значительно расширились тенденции одновременного использования нескольких частотных диапазонов, а также нескольких диаграмм направленности (ДН) в широкополосных/сверхширокополосных радиосистемах и устройствах разного рода (см., например, [1–4, 10, 41–43]). Это обстоятельство создает значительный спрос на многодиапазонные и/или широкополосные антенны и частотно-избирательные поверхности (ЧИП) с расширенными полосами рабочих частот. Сейчас, несомненно, к разрабатываемым классам таких устройств добавился еще один новый класс – **фрактальные антенны и фрактальные ЧИП** [1, 2]. Фрактальная геометрия является продолжением классической геометрии, ее внедрение предоставляет инженерам беспрецедентные возможности для изучения неограниченного количества конфигураций, ранее просто недоступных для исследований и приложений.

Необходимо отметить, что за рубежом достаточно давно и прочно утвердился термин «**фрактальная электродинамика**», в которой исследуются разнообразные вопросы распространения волн во фрактальных средах, физические и математические модели фрактальных электродинамических направляющих структур, а также фрактальные антенны [44–48]. Иначе говоря, **фрактальная электродинамика** – это область исследований, в которой на основе комбинирования концепций фрактальной геометрии с классической теорией электромагнетизма, ставятся и решаются новые проблемы излучения, рассеяния и распространения волн [49].

В России данные вопросы рассматриваются преимущественно *московской школой фрактальных методов под руководством д.ф.-м.н.*

А. А. Потапова в рамках созданного им 30 лет назад фундаментального направления “Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: проектирование фрактальных радиосистем” в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Мощный потенциал и прогресс в данных “фрактальных” исследованиях можно увидеть в различных областях радионаук (см. [1–11]).

Несмотря на существование множества конструкций фрактальных антенн и ЧИП, по-прежнему существует чрезвычайная потребность их дальнейшего совершенствования и развития. В частности, в рамках европейского международного проекта «**FRACTALCOMS**» (2001 г.) по исследованию пределов фрактальной электродинамики для телекоммуникационных технологий проведен сопоставительный анализ уточненного фундаментального предела и оценок добротности реальных фрактальных антенн.

7. Уравнения Максвелла в дробных производных

В настоящее время стало абсолютно ясно, что для описания аномальных диссипативных процессов переноса в средах с фрактальной структурой необходимо применять математический аппарат дробного интегро-дифференцирования. В связи с этим возникает естественный вопрос о применении этого аппарата в различных областях, в частности, в задачах электродинамики, радиотехники и радиофизики [1, 2]. В данном разделе очень кратко презентован один из методов введения дробного интегро-дифференцирования по времени в основные уравнения электродинамики материальных сред [50, 51]. Соответствующее электромагнитное поле, как показано ниже, в этом случае имеет свои отличительные черты.

Центральное место в дробном исчислении занимают интегро-дифференциальные операторы Римана-Лиувилля и Капуто [1, 2, 10]. Оператор Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ с началом в точке s удобно представить в следующем виде:

$$D_{st}^{\alpha} y(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{y(t') dt'}{|t-t'|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0; \\ y(t), & \alpha = 0; \\ \text{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n} y(t), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (21)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Оператор Капуто (регуляризованная дробная производная) определяется с помощью равенства

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = \text{sign}^n(t-s) D_{st}^{\alpha-n} \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \quad (22)$$

$$n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Связь между операторами Римана-Лиувилля и Капуто задается как

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = D_{st}^{\alpha} y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(s)}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (23)$$

Если выполняется равенство $y^{(k)}(s) = 0$, то операторы Римана-Лиувилля и Капуто тождественны $\partial_{0t}^{\alpha} \equiv D_{st}^{\alpha}$. При целочисленном α эти операторы также совпадают между собой, как и с обычными производными целого порядка.

В прикладных задачах для нахождения токов и зарядовых распределений пользуются различными подходами. После того как найдены токи и заряды, производится расчет полей. При этом из-за существенной нелинейности задачи на всех этапах приходится иметь дело со сложными численными методами, которые зачастую доставляют большую погрешность. От указанной трудности можно частично избавиться, если для вычисления плотности электрического тока взять уравнение временной дисперсии:

$$\mathbf{j}(t) = \frac{q}{\tau} \int_0^t g(t-t') n(t') \left(\frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} \right) dt'. \quad (24)$$

В выражении (24) введены следующие обозначения: q – заряд электрона, τ – некоторое характерное время процесса, t – безразмерное (отнесенное к τ) время, $n(t)$ – концентрация электронов, $\mathbf{r}(t)$ – вектор перемещения, $g(t)$ – функция памяти.

Выражение (24) задает действующий ток в момент времени t . Величина этого тока определяется его «предысторией», то есть поведением в моменты времени $0 \leq t' < t$. Если $g(t-t') = \delta(t-t')$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, то $\mathbf{j} = qn(d\mathbf{r}/dt)$ и память полностью отсутствует. При $g(t-t') = \theta(t-t')$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, имеем идеальную память, когда ток \mathbf{j} формируется на всем временном промежутке вплоть до момента t . Реальные диссипативные системы, как правило, обладают остаточной памятью, которая в наиболее простом виде задается степенной функцией:

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{t^{\alpha}}, \quad (25)$$

где $\Gamma(1-\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, введенная для удобства дальнейших преобразований. Параметр α находится в интервале от 0 до 1.

Подставляя (25) в (24) и учитывая определения дробных операторов Римана-Лиувилля и Капуто, запишем

$$\mathbf{j}(t) = \frac{q}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} \left(n(t) \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right). \quad (26)$$

Из выражения (26) получается выражение для скорости:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{r}(t). \quad (27)$$

Выражения (26) и (27) определяют эффективную плотность тока и эффективную скорость носителей заряда. Этим выражениям можно придать другой полезный смысл. Обращая выражение (27) и выполняя затем интегрирование по переменной t , получим

$$\mathbf{r}(t) = \tau D_{0t}^{-\alpha} \mathbf{v}(t) + \text{const}. \quad (28)$$

Электрическое напряжение, возникающее при обходе электронами контура L , равно

$$\frac{1}{q} \oint_L (\mathbf{F} d\mathbf{l}) = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \oint_L ([\mathbf{B} \mathbf{r}(t)] d\mathbf{l}) = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \Phi, \quad (29)$$

где Φ – магнитный поток. Перепишем (29) через напряженность электрического поля

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = -\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \Phi \quad (30)$$

где \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля.

Равенство (30) представляет собой **закон электромагнитной индукции**, выраженный через дробную производную. За счет параметра α оно учитывает тот очевидный факт, что все масштабно-временные особенности траектории движения электронов должны отражаться на изменениях напряжения индукции. Равенство (30) точно также может быть отнесено и к другому случаю – покоящемуся проводнику, сквозь который проходят линии внешнего переменного магнитного поля. Параметр α здесь будет характеризовать изменения магнитного поля. Применяя к (30) теорему Стокса, получаем аналог **первого уравнения Максвелла**:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{B}. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь без внешнего магнитного поля проводник объемом V и площадью поперечного сечения S , по которому протекает ток электронов с вектором плотности, определяе-

мым выражением (26). По теореме Остроградского-Гаусса сила тока сквозь поверхность с вектором нормали \mathbf{n} равна

$$\int_S (\mathbf{j}\mathbf{n})dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV. \quad (32)$$

С учетом (26) сила тока будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} \right) dV &= \int_V \left(\frac{1}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} \frac{d\rho}{dt} \right) dV = \\ &= \int_V \left(\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \rho \right) dV, \end{aligned} \quad (33)$$

где ρ – объемная плотность заряда. Сравнивая (32) и (35), получаем **уравнение непрерывности**

$$\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (34)$$

Чтобы уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$ удовлетворяло уравнению непрерывности (34) по аналогии с классической схемой его необходимо представить в следующем виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{D}, \quad (35)$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ – вектор электрического смещения, ε – относительная диэлектрическая проницаемость вещества, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

При записи (35) учтена теорема Гаусса. Уравнение (35) представляет собой аналог **второго уравнения Максвелла**, а слагаемое с дробной производной определяет ток смещения.

Для выведенных уравнений представляет интерес рассмотреть вопрос о вспомогательных функциях – **векторном** и **скалярном потенциалах** [50]. Поскольку нами применяется только дробная производная по времени, то два не рассмотренных выше уравнения максвелловской системы остаются без изменений. Выпишем **полную систему уравнений**

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{B}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (36)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (37)$$

Векторный потенциал \mathbf{A} вводится стандартно

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (38)$$

Подставляя (38) в первое уравнение (36), получим

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{A} + \mathbf{E} \right) = 0. \quad (39)$$

Так как ротор от градиента любой скалярной функции равен нулю, то в (39) выражение в

скобках равно градиенту этой функции. Стало быть

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{A} - \nabla \varphi, \quad (40)$$

где φ – скалярный потенциал.

Несложно убедиться, что выражению (40) отвечают следующие соотношения **калибровочной инвариантности**

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \varphi' = \varphi - \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} f, \quad (41)$$

где f – произвольная скалярная функция.

После подстановки (38) и (40) в уравнения (41) находим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mu \mu_0 \mathbf{j} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \left(-\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{A} - \nabla \varphi \right), \quad (42)$$

$$\operatorname{div} \left(-\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{A} - \nabla \varphi \right) = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (43)$$

Далее, не ограничивая общности, примем калибровку

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \varphi = 0. \quad (44)$$

С использованием (44) из (42) и (43) получаются следующие **уравнения для векторного и скалярного потенциалов** [50]:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{(c\tau)^2} \partial_{0t}^{2\alpha} \mathbf{A} = -\mu \mu_0 \mathbf{j}, \quad (45)$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{(c\tau)^2} \partial_{0t}^{2\alpha} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (46)$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость света в вакууме.

Уравнения (45) и (46) представляют собой уравнения с изменяющимся типом: при $\alpha = 1$ – гиперболический тип; при $\alpha = 1/2$ – параболический тип. Такие уравнения в литературе называют диффузионно-волновыми уравнениями. Общее их решение можно отыскать методом функции Грина. Уравнения (45) и (46) позволяют сделать важные заключения. В отсутствие зарядов и токов из (45) и (46) получаются однородные уравнения с частной производной дробного порядка. В отличие от классического случая – решения Даламбера, решениями этих уравнений уже не могут быть произвольные функции. С физической точки зрения это означает, что протекающая по определенным правилам пространственно-временная эволюция заряженных частиц будет накладывать ограничения на характер порождаемого электромагнитного поля.

Проанализируем свойства свободного электромагнитного поля в диэлектрике с постоянными ε

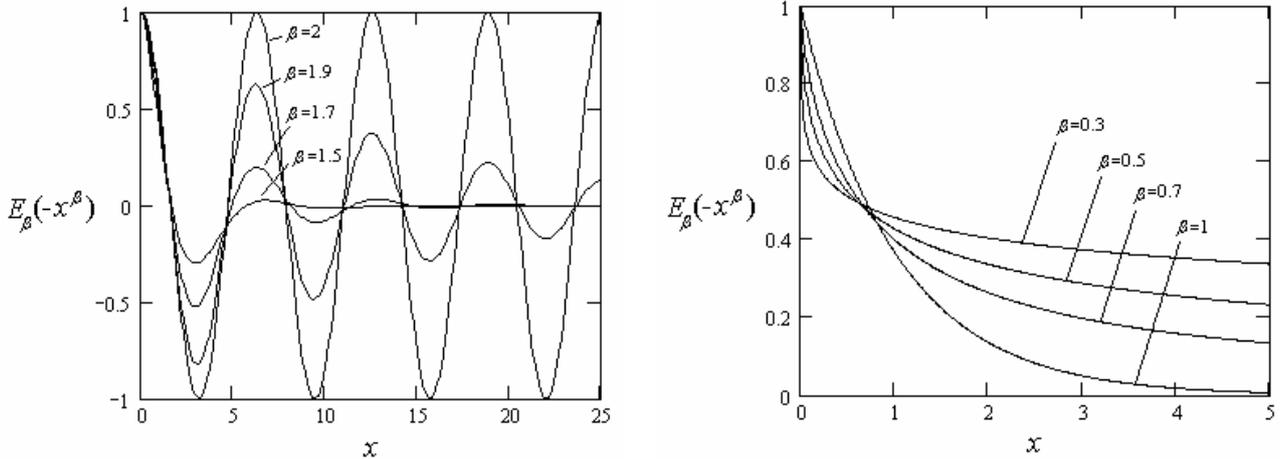


Рис. 1. Графики функции Миттага-Леффлера при различных значениях параметра β

и μ , исходя из диффузионно-волнового уравнения. Для этого запишем одномерное уравнение

$$\partial_{0t}^{2\alpha} u(x, t) - \frac{(c\tau)^2}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (47)$$

где t – безразмерное время (отнесенное к τ), под функцией $u(x, t)$ понимается \mathbf{A} или φ .

Уравнение (47) линейное и его частное решение представимо в виде

$$u(x, t) = u_0 \exp(ikx) z(t), \quad (48)$$

где $z(t)$ – неизвестная функция, u_0 – комплексная амплитуда, k – компонента волнового вектора в направлении x .

Подставляя (48) в (47), получаем уравнение

$$\partial_{0t}^{2\alpha} z(t) - \omega^2 z(t) = 0, \quad (49)$$

где $\omega = ck\tau / \sqrt{\varepsilon\mu}$ – безразмерная частота.

Частным решением уравнения (49) является функция

$$z(t) = E_{2\alpha}(-\omega^2 t^{2\alpha}), \quad E_{\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\beta + 1)}, \quad (50)$$

где $E_{\beta}(x)$ – функция Миттага-Леффлера.

Из (48) и (50) находим

$$u(x, t) = u_0 \exp(ikx) E_{2\alpha}(-\omega^2 t^{2\alpha}). \quad (51)$$

На рис. 1 показаны графики функции $E_{\beta}(x)$.

Если в (51) параметр α находится в интервале от $1/2$ до 1, то по переменной t будем иметь периодическую функцию с частотой ω . Если параметр α находится в интервале от 0 до $1/2$, то функция становится монотонно убывающей. Параметры α и τ ответственны за скорость убывания.

Для наглядной интерпретации решения (51) выделим из него предельные случаи. При $\alpha = 1$ (гиперболический случай), пользуясь тем что

$$E_2(x) = \text{ch}(\sqrt{x}), \quad (52)$$

для решения уравнения (51) запишем

$$u(x, t) = u_0 \exp(ikx - \omega t). \quad (53)$$

Выражение (53) задает плоскую монохроматическую волну, являющуюся периодической функцией обеих переменных x и t .

При $\alpha = 1/2$ (параболический случай) имеем

$$E_1(x) = \exp(x), \quad (54)$$

$$u(x, t) = u_0 \exp(ikx) \exp(-\omega^2 t). \quad (55)$$

Решение (55) является периодическим лишь по переменной x . Его также можно понимать как плоскую волну, но с убывающей со временем амплитудой. При этом время, за которое амплитуда поля уменьшается в e раз, будет равно $t_0 = 1/(\omega^2 \tau) = \varepsilon\mu / (c^2 k^2 \tau)$, где $\omega = ck / \sqrt{\varepsilon\mu}$ – размерная частота.

Таким образом, в нашем случае дробное интегрирование и, соответственно, феноменологический параметр α учитывают влияние *фрактальных свойств движения зарядов* в диссипативной среде на создаваемое электромагнитное поле. При уменьшении α происходит затухание электромагнитных волн, причем при медленном диффузионном блуждании ($\alpha < 1/2$) затухание имеет степенную асимптотику

$$E_{2\alpha}(-t^{2\alpha}) \propto t^{-2\alpha} / \Gamma(1 - 2\alpha), \quad (56)$$

свойственную многим фрактальным системам [1–3, 5, 7, 8, 15, 25].

Более подробно и широко данные вопросы рассмотрены в наших статьях [50, 51] в данном разделе), а также в монографии [10].

8. Фрактальные антенны

Антенные устройства и ЧИП (пакетного/многослойного типа) являются неотъемлемой частью любой радиосистемы. Обширный круг задач,

выдвигаемый потребностями науки и техники, приводит к необходимости создания антенн различного назначения и разнообразными характеристиками. Ключевыми проблемами теории и техники антенн является уменьшение их размеров, широкое регулирование электромагнитных характеристик и расширение рабочей полосы частот.

Усилия многочисленных исследователей по всему миру, направленные на объединение фрактальной геометрии с электромагнитной теорией, привели к появлению новых инновационных конструкций антенн. Результаты показали, что по мере увеличения числа итераций фрактала происходит увеличение эффективной длины излучающей системы и, естественно, уменьшение резонансной частоты. В отличие от традиционных подходов, когда синтезируются гладкие структуры излучения антенн, теория фрактального синтеза базируется на принципах скейлинга, т.е. характеристики излучения теоретически инвариантны масштабу (пространственному или частотному).

Достаточно продолжительный опыт анализа и синтеза фрактальных антенн доказывает их принципиальную широкополосность и многодиапазонность. Сведения о фрактальных антеннах появились в зарубежных работах с конца 80-х гг. XX в. В России в начале 90-х гг. XX в. А.А. Потаповым совместно с ЦКБ «Алмаз» были сделаны первые попытки разработки и проектирования таких необычных (для того времени) фрактальных антенных структур (конкретно, был изготовлен действующий макет фрактальной щелевой решетки в диапазоне миллиметровых волн (ММВ) [52].

Рассмотрим кратко существующие и потенциальные «фазовые» точки применения фрактальных антенн и устройств на их основе, а также их особенности. Число публикаций, в основном зарубежных, посвященных исследованию различных конструкций фрактальных антенн, весьма велико (см., например, [1–3, 5, 10, 49]) и постоянно растет. Начиная с первых работ, детально изучаются их замечательные свойства; область их практических приложений также неуклонно расширяется.

Работа фрактальных антенн достигается через геометрию проводников, а не через накопление отдельных компонентов или элементов (как в классических антеннах), что в последнем случае увеличивает сложность и потенциальные точки отказа. Анализ показывает, что существуют два

активных направления исследований во фрактальной технике: 1 – фрактальные апертуры, 2 – использование фракталов в разработке антенных решеток.

Фрактальные антенны позволяют создать многополосные варианты, уменьшенный размер, и часто оптимальную или «шикарную» технологию таких устройств. Несомненным достоинством фрактальных антенн (монополей и диполей) является тот факт, что они нередко имеют меньшие резонансные частоты по сравнению с классическими (евклидовыми) антеннами тех же размеров. Врожденные широкополосные качества фрактальных антенн идеальны для интеллектуальных приложений, в частности, при защите информации.

Области применения фрактальных антенн: современные телекоммуникации, широкополосная и нелинейная радиолокация, системы поиска, локализации и трассировки мобильных объектов, пеленгация в сложных городских условиях, определение местоположения несанкционированных источников радиоизлучения при борьбе с террористами, оперативная связь в войсках, маркеры на различных предметах, космическая связь, современный физический эксперимент и т. п.

Необходимо особо отметить [1, 2, 49, 52], что современный специалист в области антенной техники обладает большим набором аналитических, асимптотических и численных методов, которые позволяют анализировать реальную антенну. И с этой точки зрения этот опыт исследования позволяет получить физическую трактовку процесса формирования излучения. То есть, мы не только рассчитываем антенну, но мы умеем, и объяснять физику антенны. С этой точки зрения исследователь, который занимается анализом фрактальных антенн, находится в более сложном положении. Он руководствуется принципом самоподобия (скейлинга) при конечном числе итераций. Ключевой момент, – из каких соображений выбирать исходную структуру при анализе фрактальных антенн? Поэтому единственным инструментом исследования является только численный метод и численный эксперимент. Здесь примерно такая же ситуация, которая была, когда методы анализа классических антенн еще не были развиты и приходилось полагаться лишь на эксперимент.

В отличие от традиционных методов, когда синтезируются гладкие диаграммы направленности антенны, в основе теории фрактального

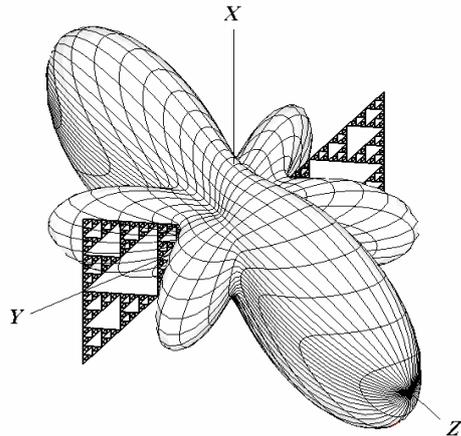


Рис. 2. ДН диполя на основе кривой Серпинского

синтеза заложена идея реализации характеристик излучения с повторяющейся структурой на произвольных масштабах. Это дает возможность создавать новые режимы во фрактальной элек-

тродинамике, а также получать принципиально новые свойства.

Под руководством автора и его непосредственном участии на основе различных алгоритмов численного решения был проведен анализ электродинамических свойств разнообразных фрактальных антенн (монополи и диполи с применением классической кривой Серпинского, снежинки Коха и дерева Кейли различного порядка итераций, кольцевые структуры и т.п.).

Анализ для фрактальных антенн на основе кривой Серпинского проводился с учетом изменяющегося угла раскрыва α при вершине. Строгие электродинамические исследования различных фрактальных монополей и диполей на основе универсальной треугольной кривой Серпинского и дерева Кейли произведены на основе применения алгоритмов численного ре-

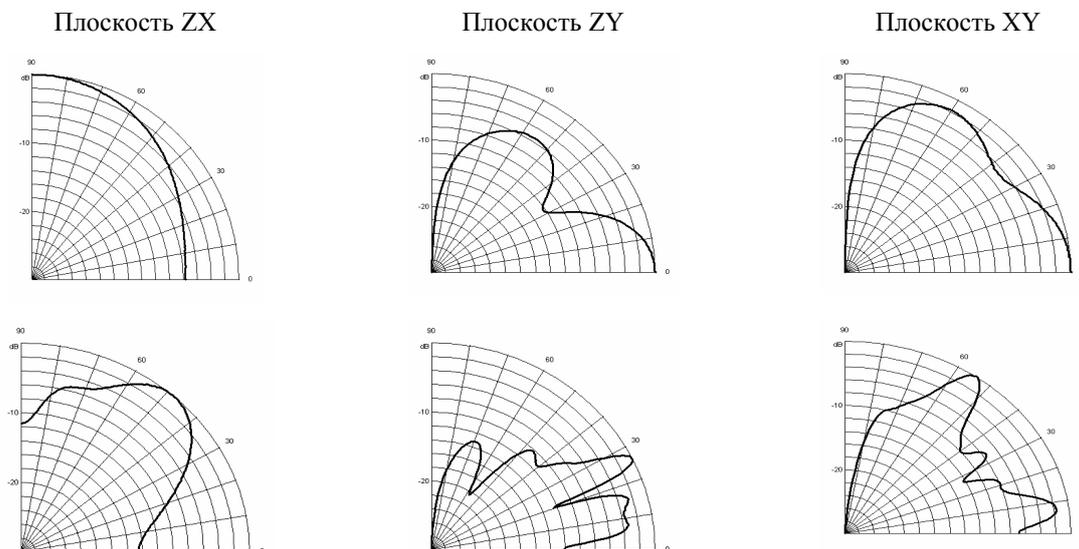


Рис. 3. Сечения теоретических ДН фрактальной антенны Серпинского на рабочих частотах $f = 0,53$ ГГц (б) и $f = 0,53$ ГГц (в) при $\alpha = 60^\circ$

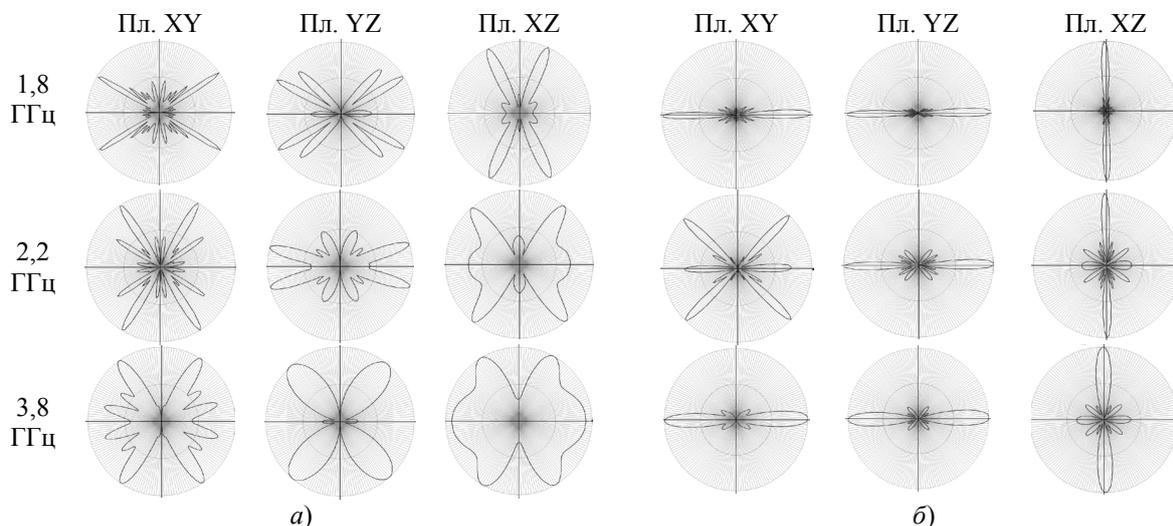


Рис. 4. Нормированные ДН фрактальной антенны «Дерево Кейли» на вертикальной (а) и горизонтальной (б) поляризациях излучения

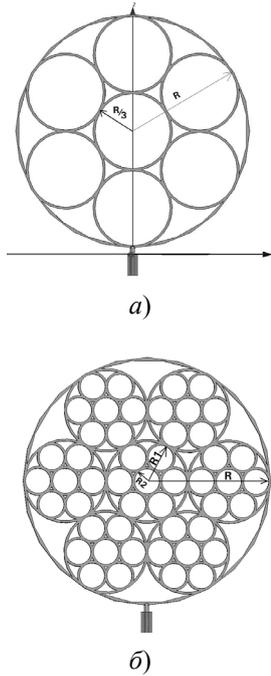


Рис. 5. Фрактальные антенны на основе кольцевых структур: а) кольцевой монополь А1; б) кольцевой монополь А2

шения гиперсингулярных интегральных уравнений. Были вычислены: ДН – пример на рис. 2 и рис. 3, входные импедансы фрактальных антенн $Z = \text{Re } Z + i \text{Im } Z$ в диапазоне частот 0.1–10.0 ГГц и все резонансные частоты f_p исследуемых фрактальных антенн.

На рис. 4, а, б приведены ДН для фрактальной антенны на основе дерева Кейли в случае ортогональных поляризаций излучения.

Основой кольцевых фрактальных структур является разработанный автором с учеником алгоритм, согласно которому внутри каждой окружности предыдущей итерации располагается 7 окружностей радиуса втрое меньше [49]. Порядок расположения колец при итерации процесса представлен на рис. 5.

В качестве базового элемента фрактальной антенной структуры было взято кольцо радиуса 11 мм, толщиной 0.4 мм по оси X и 0.2 мм по радиусу. Внутри базового элемента нулевой

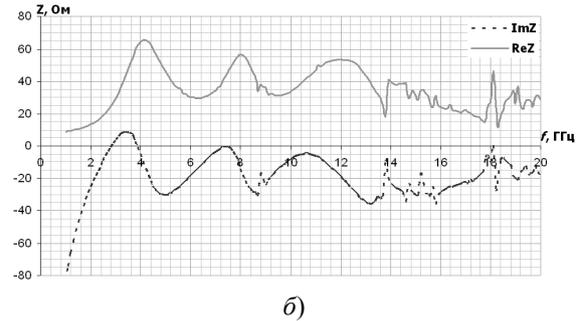
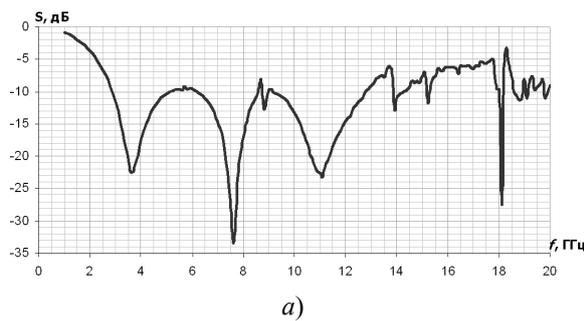


Рис. 6. Коэффициент отражения (а) и $\text{Re } Z$ и $\text{Im } Z$ импеданса Z (б) для фрактальной антенны А1

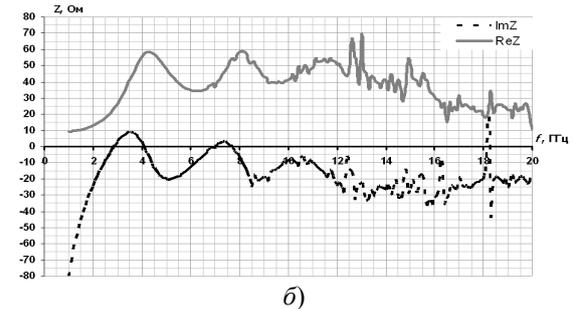
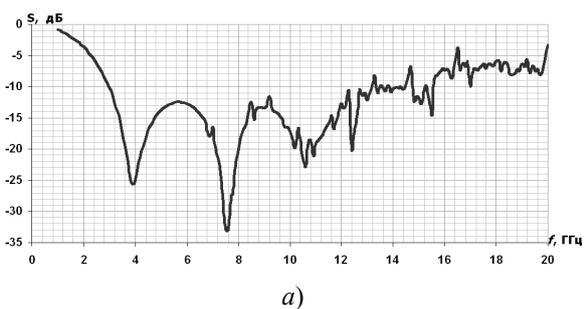


Рис. 7. Коэффициент отражения (а) и $\text{Re } Z$ и $\text{Im } Z$ импеданса Z (а) для фрактальной антенны А2

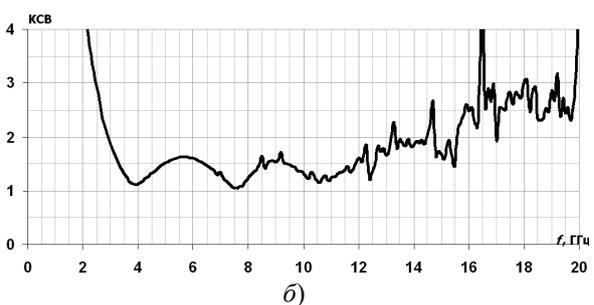
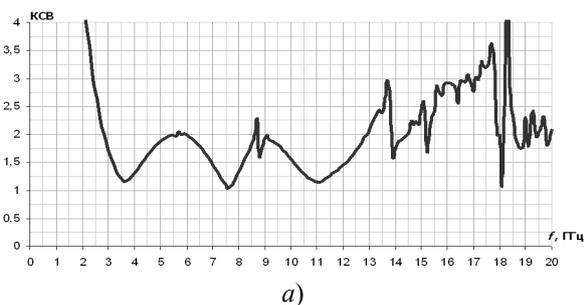


Рис. 8. Частотная зависимость КСВ фрактальных антенн А1 (а) и А2 (б)

итерации размещено 7 колец радиуса $R/3$ в три раза меньше радиуса R исходного элемента. При построении фрактального кольцевого монополя второй итерации A_2 в радиус каждой из 7 окружностей помещено шесть окружностей втрое меньшего радиуса, центры которых расположены в вершинах шестиугольника на расстоянии $2R/3$ от первоначального радиуса. Седьмая окружность расположена в центре базовой окружности. Таким образом, модель антенны второй итерации имеет следующий вид – рис. 6, б. Антенна запитывается, как и в первом случае, коаксиальным кабелем диаметром 0.5 мм. Радиус внешней окружности $R = 11$ мм, $R_1 = R/3$, $R_2 = R/9$.

Основные электродинамические характеристики разработанных фрактальных антенн приведены на рис. 6–8.

Непосредственная цель многочисленных экспериментов авторов с учениками – официально создать *новый тип антенн*, а именно – «Фрактальные антенны».

9. Фрактальные частотно-избирательные 3D-среды или фрактальные «сэндвичи»

Одним из современных направлений в анализе и синтезе фрактальных антенн является конструирование на их основе новых видов частотно-избирательных поверхностей и объемов [1–3, 5, 10, 49, 53–55]. Идея реализации характеристик излучения с повторяющейся структурой на произвольных масштабах дает возможность создавать новые режимы во фрактальной электродинамике, а также получать принципиально новые свойства. В частности, размещение фрактальных элементов на корпусе или теле объекта может существенно исказить сигнатуру или радиолокационный портрет обнаруживаемого объекта.

Работы по фрактальным ЧИП, как и по фрактальным антеннам, также интенсивно выходят в свет в последние годы (см., например, [1–3, 5, 10, 49] и ссылки в них). В задаче синтеза фрактальных антенн и фрактальных частотно-избирательных поверхностей одним из наиболее перспективных путей на сегодняшний день является эволюционное проектирование на основе *генетических алгоритмов*.

Современные и перспективные радиопоглощающие покрытия и материалы (иначе – ЧИПы в широком смысле) должны обеспечивать погло-

щение широкого спектра электромагнитного излучения при произвольных углах зондирования и поляризации падающего излучения. С этой точки зрения один из перспективных путей – применение *фрактальных искусственных композитов и метаматериалов*, которые можно отнести к «интеллектуальным» или «умным». Для рассматриваемых задач автором предложены и развиваются в настоящее время следующие основные пути: **a)** – минифрактальные антенны, **b)** – фрактальные структуры в фотонных и магнетонных кристаллах, **c)** – физическое моделирование фрактальных импедансов и дробных операторов, **d)** – перколяционный синтез фрактальных структур, т. е. «фрактальные лабиринты». При этом подразумевается, по возможности, суммарное использование результатов, полученных микроскопическими, мезоскопическими и макроскопическими методами, работающими на разных пространственных / временных масштабах.

Фрактальные многослойные структуры (фрактальные «сэндвичи» – *термин введен автором*), помимо прямого назначения, могут иметь разнообразное функциональное назначение. Расчет коэффициентов отражения и пропускания таких материалов можно производить по методикам, изложенным в [1, 2]. Затем решается обратная задача, т. е. определяются эффективные диэлектрические и магнитные проницаемости фрактальной многослойной среды, которые могут быть и тензорами в случае анизотропных материалов. При этом необходимо использовать многократное обращение к прямой задаче. При наложении двух идентичных фрактальных пластин, когда одна повернута на 90° относительно другой, можно синтезировать инвариантную структуру относительно операции вращения. Полученная фрактальная структура может моделировать эффекты полного отражения, не зависящие от угла падения и поляризации электромагнитной волны. Подходы к конструкции фрактальных фотонных и магнетонных кристаллов описаны в [1, 2].

10. Нанотрубки и наноантенны

В настоящее время в мире широко исследуются возможности применения углеродных нанотрубок (УНТ) и нанопроволок в качестве передающих и приемных антенн [10, 56]. К этой же области можно отнести и активное исследование дендримерных молекул, обладающих эффектом

“молекулярной антенны”, с фрактальной структурой. Дендримеры – это древовидные ветвящиеся полимеры, молекулы которых имеют большое число разветвлений. В частности, политиофены дендритной структуры с атомом кремния в качестве центра ветвления также обладают свойствами “молекулярных антенн”, т. е. они способны безызлучательно передавать энергию от периферии к центру, вследствие чего имеет место эффективное поглощение света в широком диапазоне спектра и излучение в узком, более длинноволновом диапазоне из-за своей специфической архитектуры. По-видимому, макромолекулы могут возбуждаться не только оптическим, но радиочастотным излучением. Устройства молекулярной структуры и их оптические свойства достаточно заманчивы с точки зрения не только научных, но и будущих технических приложений *органической наноэлектроники*.

Одной из наиболее перспективных областей нанотехнологий является синтез углеродных наноматериалов – фуллереноподобных структур, представляющих собой новую аллотропную форму углерода в виде замкнутых, каркасных, макромолекулярных систем. Среди этих материалов особое место занимают углеродные нанотрубки (УНТ) или нанотубулены, которые при диаметре 1...50 нм и длине до нескольких микрометров образуют новый класс квазиодномерных нанообъектов. В настоящее время основное внимание уделяется квантово-механической трактовке одномерных нанопроводников и нанотрубок.

Главная и до сих пор не решенная цель наноантенн – это их использование для связей между нано- и микроэлектронными узлами и блоками на макроскопическом уровне. Наноантенны могут быть использованы и в качестве **ректенны**, т. е. в качестве антенной решетки из полупроводниковых диполей, воспринимающих микроволновое излучение и преобразующих затем его в энергию постоянного тока (выпрямляющая антенна).

Если предположить, что фрактальность в наном мире является одним из законов формирования структур, то мы естественно приходим к фрактальным наноантеннам. В частности, можно по скейлинговому закону контролировать подключение подмножества углеродных нанотрубок, размещенных вертикально на подложке. Заметим, что теория и техника наноантенн – пока на начальном этапе своего развития. Электродинамика углеродных нанотрубок находится в активной разработке.

11. Резонансы и плазмоны в ИК диапазоне на субволновых фрактальных апертурах

В настоящий момент интенсивно исследуется прохождение волн СВЧ- и инфракрасного (ИК) диапазонов через субволновые апертуры. Повышенная оптическая прозрачность возникает, когда коэффициент прохождения света через апертуры в тонкой непрозрачной пленке на определенных частотах выше, чем отношение площади апертур к общей площади. Следовательно, на этих частотах резонансной прозрачности электрическое поле существенно усиливается внутри и около апертур, что делает это явление потенциально полезным для задач зондирования и нелинейной оптики.

Субволновые резонансы могут поддерживаться и в *металлических фрактальных структурах*, которые использовались в создании малых антенн. Недавно повышенная прозрачность через субволновые Н-фрактальные апертуры в металлической пластине была продемонстрирована в СВЧ-диапазоне [49, 56].

В начале 2010 г. была впервые продемонстрирована повышенная прозрачность в ИК-диапазоне для квадратной решетки субволновых Н-фрактальных апертур в золотых пленках, которая возникает из гибридизации локализованных резонансов отсечки апертуры с поверхностными плазмонами [57]. Длина волны резонанса может быть примерно в 9 раз больше боковой длины элементарной Н-фрактальной апертуры с двумя порядками масштабирования. Подобные субволновые резонансы труднодостижимы при использовании апертур другой формы, такой как круги, кресты или С-формы. Важным следствием высокой степени субволнового масштаба размеров Н-фрактальных апертур является то, что даже в отсутствие какого бы то ни было заполняющего диэлектрика они могут быть хорошо описаны эффективной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{\text{эфф}}(\omega)$, соответствующей по виду плазме с потерями, и эффективной магнитной проницаемостью $\mu^{\text{эфф}}(\omega)$, соответствующей диамагнетику. Далее кратко представим полученные в работе [57] достаточно уникальные результаты.

Схема Н-фрактала, используемая в эксперименте, показана на рис. 9. Изображение Н-фрактала генерируется из транспонированной фигуры «Н» одинаковой высоты и ширины d . За-

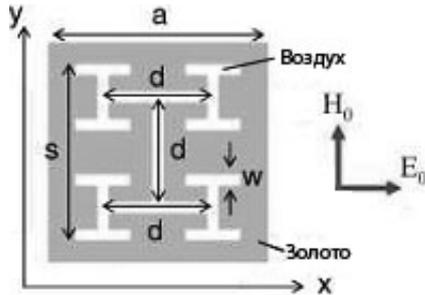


Рис. 9. Изображение ячейки в квадратной решетке фрактальных апертур: длина центральной линии $d = 300$ нм, ширина линии $w = 30$ нм

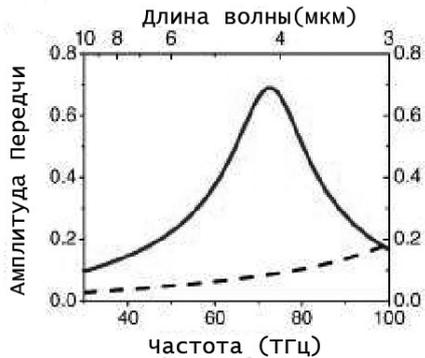


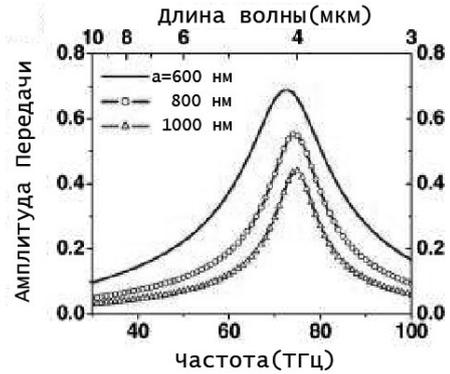
Рис. 10. Коэффициент прохождения H для золотой пленки толщиной 100 нм при нормальном падении электромагнитной волны на фрактальную решетку второй итерации (сплошная линия) и первой итерации (пунктир)

тем «Н» масштабируется до половины исходного размера, т.е. каждая сторона становится $d/2$. Четыре полуразмерных фигурки «Н» образуют второй порядок фрактального узора, их центры располагаются в конечных точках предыдущих «Н».

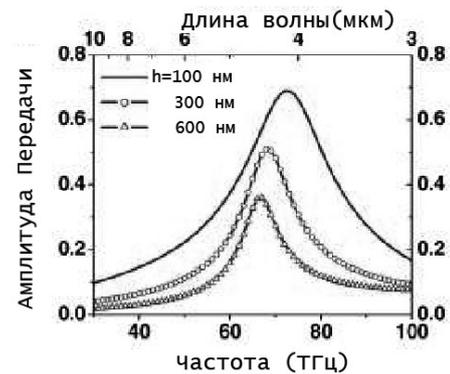
Постоянная фрактальной решетки равна a при длине боковой стороны предфрактала s . Продолжая эту процедуру масштабирования и генерирования узора бесконечно, получим фрактал, который будет заполнять площадь квадрата $2d \times 2d$ без каких-либо пересечений линий (т.е. $s \rightarrow 2d$), если пренебречь шириной линии w . Для используемой фрактальной апертуры второго порядка длина боковой стенки составляет величину $s = 480$ нм.

Исследовалась расположенная в вакууме золотая пленка, на которой вырезана квадратная решетка Н-фрактальных апертур с двумя порядками масштабирования – рис. 9. На структуру падает плоская волна, распространяющаяся вдоль z -направления, в которой электрическое поле E_0 поляризовано вдоль x , а магнитное поле H_0 направлено вдоль y . Материал моделируется относительной диэлектрической проницаемостью как у плазмы:

$$\epsilon_m(\omega) = \epsilon_{gc} - \omega_n^2 / (\omega^2 + i\gamma\omega), \quad (57)$$



а)



б)

Рис. 11. Коэффициент прохождения H для золотой пленки с Н-фрактальными апертурами при нормальном падении для разных постоянных решетки (а), $a = 600, 800, 1000$ нм и толщинах пленки (б), $h = 100, 300, 600$ нм

где $\epsilon_{gc} = 9.0$ – диэлектрическая проницаемость на высокочастотном пределе, $\omega_n = 1.32 \cdot 10^{16}$ Гц – плазменная частота золота в модели свободных электронов, $\gamma = 1.06 \cdot 10^{14}$ Гц – затухание. Эти параметры определены из оптических параметров золота в ИК диапазоне. Относительная магнитная проницаемость золота предполагается единичной $\mu_m = 1$.

Повышенная оптическая прозрачность и усиление поля в субволновых Н-фрактальных апертурах демонстрируется рис. 10, где показан амплитудный спектр коэффициента прохождения для фрактальных апертур с $a = 600$ нм в золотой пленке толщиной 100 нм. Ясно виден пик в $\sim 70\%$ на 72,5 ГГц (длина волны $\lambda = 4.13$ мкм), что соответствует прозрачности, которая более чем в 2 раза превышает относительную площадь апертуры в 21%. Длина волны пика составляет примерно $8.6s$, где $s = 480$ нм. Также на рис. 15 пунктиром показан спектр коэффициента прохождения для простой апертуры Н-формы без набора из четырех меньших Н-форм второго порядка фрактала. В этом случае пик прозрачности расположен на 132 ГГц.

Поток мощности сконцентрирован в центральной щели **Н-фрактальной апертуры**. Величина электрического поля в щели усилена примерно в 25 раз по сравнению с падающим **Е-полем** [57]. Добавление высших порядков итераций фрактальной апертуры может сместить вниз частоту основного резонанса за счет введения более тонких пространственных структур в резонансной моде, что еще дальше снижает отношение λ/s . Также высшие фрактальные порядки итераций могут поддерживать другие резонансы, которые локализованы вдали от центральной щели.

Повышение прозрачности происходит благодаря возбуждению локализованного субволнового резонанса, который в основном независим от постоянной решетки a (рис. 11, а). Так как постоянная решетки существенно меньше, чем 4 мкм, любые индуцированные решеткой (т. е. расширенные) резонансы будут возникать на более высоких частотах. Более того, резонансная частота не зависит существенно от толщины пленки, так как пик прозрачности смещается вниз по частоте менее чем на 10 % при шестикратном увеличении толщины пленки (рис. 11, б). Это подразумевает, что постоянная распространения внутри апертуры β , и набег фазы через апертуру близки к нулю. Снижение амплитуды коэффициента передачи при увеличении толщины пленки происходит за счет потерь в металле.

Так как условие $\beta = 0$ возникает на частоте отсечки для волновода без потерь, резонансная частота **Н-фрактальных апертур может быть** интерпретирована в терминах частот отсечки волноводов с поперечным сечением, соответствующим апертуре. Дисперсионное соотношение для основной волноводной моды **Н-фрактальной апертуры**, бесконечно продолженной вдоль z -направления, приведено в [57]. При увеличении толщины пленки частота пика приближается к частоте отсечки. Таким образом, резонанс апертуры с конечной толщиной может рассматриваться как «резонанс отсечки». Резонанс отсечки является резонансом локализованного поверхностного плазмона, который может быть феноменологически интерпретирован как гибридизация внутренней волноводной моды апертуры с поверхностным плазмоном, возбужденным вдоль стенки апертуры.

Возбуждение поверхностных плазмонов вдоль боковой стенки определяется исследованием E_z – компоненты для реального металла и моды вол-

новода из идеального проводника, и т. к. эта компонента параллельна металлической границе, она является характерной особенностью поверхностных плазмонов. Данные моделирования [57] показывают, что при $\text{Re}(\beta/k_0) = 0.35$ величина E_z является ненулевой и локализованной на поверхности воздух-металл для волноводной моды с реальным металлом и равна нулю в случае с идеальным проводником. Как и в волноводах с другими апертурами, поверхностные плазмоны еще более снижают частоту отсечки **Н-фрактальной апертуры**. Если металл заменяется идеальным проводником, то моделирование показывает, что пик прозрачности в самом деле расположен на 110 ТГц для пленки толщиной 100 нм с геометрическими параметрами такими же, как на рис. 10.

Благодаря субволновому масштабу размеров **Н-фрактальной апертуры**, оптические свойства прохождения и отражения волн для решетки фрактальных апертур возможны с помощью эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon^{\text{эфф}}$ и эффективной магнитной проницаемости $\mu^{\text{эфф}}$. Дисперсионные соотношения для **Н-фрактального волновода** и золота [57] иллюстрируют, что частота отсечки **Н-фрактального волновода** играет роль, похожую на плазменную частоту в металле. В рамках приближения идеального проводника показано, что периодическая решетка из квадратных отверстий в полубесконечном металлическом слое имеет эффективную ω_n , задаваемую частотой отсечки волновода, соответствующего квадратным отверстиям, а также эффективный диамагнитный отклик. Однако, для того, чтобы эффективные параметры выполнялись для частот вблизи эффективной ω_n необходимо, чтобы длина волны отсечки волноводной моды была значительно больше размера отверстия и периода решетки, что требует заполнения отверстий диэлектриком с высоким показателем преломления. В противном случае период становится сравнимым с длиной волны и эффективные параметры не могут быть четко определены в этом случае.

Размер **Н-фрактальной апертуры** является существенно субволновым даже в отсутствие заполняющего диэлектрика. Таким образом, *решетка из фрактальных апертур* может составить новый тип **плазмонных метаматериалов** со свойствами, контролируемыми выбором геометрических параметров.

12. Авторские концепции фрактальных импедансов и фрактальных радиосистем

Основываясь на многочисленных полученных и приведенных частично в данной статье результатах, мы можем смело говорить о проектировании не только фрактальных элементов (устройств), но и непосредственно фрактальных радиосистем (рис. 12).

Такие фрактальные радиосистемы включают в себя фрактальные антенны и цифровые фрактальные обнаружители, основаны на фрактальных методах обработки информации, а в перспективе могут использовать фрактальные методы модуляции и демодуляции радиосигналов [1–11, 41, 49, 52, 54]. На основе нанофазных материалов также можно создать планарные и объемные наноструктуры, моделирующие “фрактальные” радиоэлементы и радиоустройства микроэлектроники, т. е. речь идет о построении элементной базы нового поколения на основе фрактальных эффектов и свойств.

Моделирование фрактальных импедансов в физическом виде непосредственно связано с вопросами конструирования фрактальных антенн и других фрактальных частотно-избирательных структур на основе соответствующих поверхностей и объемов. В настоящее время именно микроскопические фрактальные антенны составляют наиболее перспективную основу [1–11, 41, 49, 52, 54] для синтеза новых фрактальных радиоэлементов и устройств на их основе. Набор фрактальных поверхностей в соответствующие

“стопки” или “сборки” при их различном взаимном положении позволяет создавать широкий класс фрактальных устройств, имеющих достаточно необычные свойства, существенно расширяющие возможности классических радиоустройств (например, **фрактальный резонатор**, имеющий более малые размеры и более широкий спектральный набор мод по сравнению с классическим).

Относительно дробных операторов можно отметить еще одно обстоятельство. Задолго до введения понятия динамической системы дробного порядка и появления работ о фрактальной природе реальных объектов, было замечено, что поведение некоторых процессов и объектов (распространение тепла, вязкоупругие свойства материалов, диффузия и др.) не укладывается в рамки традиционного описания с помощью дифференциальных уравнений целого порядка. Более точно эти процессы и объекты описываются операторами ДИД – $D^\alpha[f(t)]$, где $-1 < \alpha < 1$.

Несмотря на то, что понятие оператора ДИД было известно уже в конце XVII в., начало широкого применения дробного исчисления в науке и технике можно отнести к концу восьмидесятых – началу девяностых годов прошлого века [1–11, 10, 25]. Физически операторы дробного интегрирования играют роль своеобразных “**фильтров**”, выделяющих только те составляющие, которые локализованы на фрактальных (дробных) множествах исследуемого процесса.

Наличие в уравнениях дробной производной современными исследователями интерпретируется, повторим еще раз, как отражение особого



Рис. 12. Авторская концепция фрактальных радиосистем и устройств

свойства процесса/системы – память или **не-марковость** (**эрдитарность**). Отметим, что в последнее время в научном мире интенсивно обсуждаются фрактальные объекты и процессы, имеющие *отрицательные* и *комплексные* дробные степени [10].

Физическое моделирование дробных интегральных и дифференциальных операторов позволяет на основе нанотехнологий создавать радиоэлементы на пассивных элементах, моделирующие *фрактальные импедансы* $Z(\omega)$ с частотным скейлингом $Z(\omega) \equiv A(j\omega)^{-\eta}$, где $0 \leq \eta \leq 1$, $A - \text{const}$. В такие модели легко ввести элемент случайности в виде изменения числа веточек или кластеров, различных коэффициентов скейлинга, варьирования толщины и количества элементов сборки и т.п. Здесь можно говорить о “модных” в настоящее время **“фрактальных лабиринтах”**. Такие фрактальные конструкции выполнимы и при существующем уровне развития нанотехнологий. Для рассматриваемых задач автором предложены и используются в настоящее время следующие основные пути: **a)**–миниатюрные фрактальные антенны, **b)**–фрактальные структуры в фотонных и магнотонных кристаллах, **c)**–физическое моделирование фрактальных импедансов и дробных операторов, **d)**–перколяционный синтез наноструктурированных композитов и т. п.

Предложенные впервые автором (рис. 63) фрактальные радиосистемы и фрактальные радиоэлементы/фрактальные импедансы открывают новые возможности в современной радиоэлектронике и могут иметь в будущем самые широкие перспективы практического применения [3].

13. Перспективные направления исследований

Здесь мы на основе выборки наших работ попытаемся дать общее видение наиболее перспективных направлений «фрактальных» исследований:

1. Исследование возможностей текстурных (пространственных и спектральных), фрактальных и энтропийных признаков для радиолокационных задач обнаружения.

2. Синтез новых моделей рассеяния радиолокационных сигналов земными покровами на основе теории детерминированного хаоса, странных аттракторов и фрактальных вероятностных распределений – устойчивых распределений.

3. Исследование волновых явлений (распро-

странение и рассеяние волн, процессы диффузии) во фрактальных неоднородных средах на основе операторов дробного интегрирования. Дальнейшее развитие фрактальной электродинамики.

4. Синтез моделей каналов радиолокационных и телекоммуникационных систем на основе пространственных фрактальных обобщенных корреляторов и фрактальных частотных функций когерентности.

5. Исследование возможностей распознавания формы или контуров целей с помощью фрактальных, текстурных и энтропийных признаков. Работа на сингулярностях входной функции.

6. Исследование потенциальных возможностей и ограничений фрактальных методов обработки радиолокационных и связных сигналов, в том числе фрактальной модуляции и демодуляции, фрактального кодирования и сжатия информации, фрактального синтеза изображений, фрактальных фильтров. Переход к фрактальным радиосистемам.

7. Исследование адаптивной пространственно-временной обработки сигналов на основе дробной размерности и дробных операторов.

8. Поиск и исследование новых комбинированных методов обнаружения и распознавания классов малоконтрастных целей в интенсивных негауссовских помехах.

9. Исследование возможностей создания новых сред для передачи информации, многодиапазонных фрактальных поглощающих материалов, конструирование фрактальных антенн и фрактальных частотно-селективных поверхностей и объемов. Дальнейшее развитие теории и техники фрактальных импедансов.

10. Синтез новых классов фракталов и мультифракталов с обобщением понятия меры множеств.

11. Изучение вида или топологии выборки одномерного (многомерного) сигнала для задач, например, искусственного интеллекта с целью создания словарей фрактальных признаков на основе фрактальных примитивов, являющихся элементами фрактального языка с фрактальной грамматикой, т. е. исследование **проблемы “размерностного склероза”** физических сигналов и сигнатур. Эти понятия, введенные автором, предполагают исследование топологических особенностей каждой конкретной индивидуальной выборки, а не усредненных реализаций, имеющих зачастую другой характер.

12. Прогноз механизмов формирования и характеристик шероховатости с целью управления геометрическими параметрами микрорельефа для получения заданных физико-химических и эксплуатационных свойств изделий при современных неравновесных технологиях обработки их поверхностного слоя. Фракталы в нанотехнологиях. (В 2008 г. автор предложил новую концепцию, а именно, “Скейлинг шероховатого фрактального слоя и нанотехнологии”).

13. Развитие фрактальной неинерциальной релятивистской радиолокации в искривленном пространстве-времени связанных структур [4, 9], т. е. фрактальной геометрии пространства-времени детерминированных структур.

Заключение

Коренное отличие фрактальной радиофизики от классической связано с принципиально иным подходом к основным составляющим сигнала и поля. Это позволяет перейти на новый уровень информационной структуры реальных *немарковских сигналов и полей*. Учет фрактальности и скейлинга модифицирует основные уравнения физики. Дробное интегрирование предлагает более богатый и более общий класс дифференциальных и интегральных операторов.

Создание широкополосных радиотехнических систем и их информационное обеспечение является одной из основных задач современной радиоэлектроники. Фрактальная геометрия излучающего устройства является очень перспективной для решения такого рода задач.

Уникальной особенностью фрактальных антенн является теоретически бесконечное уплотнение ограниченной области пространства геометрией антенны, и как результат – дополнительные резонансные частоты в рабочем диапазоне длин волн, часто превышающих внешние геометрические размеры фрактальной компактной структуры. Поскольку эффективные длины играют важную роль в дизайне антенн, то фрактальная упаковка может быть использована в качестве жизнеспособного аспекта техники миниатюризации. Увеличение фрактальной размерности D апертуры антенны, ведет к более высокой степени миниатюризации.

Фрактальные частотно-избирательные поверхности и объемы (особенно в микроминиатюрном исполнении) перспективны для современных широкополосных радиосистем, а так же для создания новых искусственных композитов

и метаматериалов на основе “*фрактальных лабиринтов*” [1–11, 54, 56] с элементами теории перколяции, в том числе и на плазмонных эффектах. Данные фрактальные среды могут ускорить выполнение жестких требований интегрированности, многофункциональности и адаптивности проектируемой аппаратуры. Впервые автором рассмотрены фрактальные частотно-избирательные **3D-среды или фрактальные “сэндвичи”**, т. е. инженерные радиоэлектронные микро/нано конструкции, содержащие не менее двух слоев.

Субволновые фрактальные апертуры могут составить новый тип *плазмонных метаматериалов* со свойствами, контролируемые выбором геометрических параметров. Таким образом, благодаря своим уникальным свойствам фрактальные антенны и фрактальные частотно-избирательных **3D-среды** позволяют решать ряд важных задач фундаментального и прикладного характера и открывают широкие перспективы для исследований в различных областях современной радиоэлектроники и физики.

Несколько слов о важности проводимых фундаментальных и прикладных исследований. В книге [58] в подразделе «Локационные системы», раздел «Информационные технологии и вычислительные системы» (с. 41) размещен текст: «Создан эталонный словарь фрактальных признаков оптических и радиоизображений, необходимый для реализации принципиально новых фрактальных методов обработки радиолокационной информации и синтеза высокоинформативных устройств обнаружения и распознавания слабых сигналов на фоне интенсивных негауссовских помех. Установлено, что для эффективного решения задач радиолокации и проектирования фрактальных обнаружителей многомерных радиосигналов существенное значение имеют дробная размерность, фрактальные сигнатуры и кепстры, а также текстурные сигнатуры фона местности. (ИРЭ РАН)».

В книге [59] в подразделе «Локационные системы. Геоинформационные технологии и системы», раздел «Нанотехнологии и информационные технологии» (с. 24) размещен текст: «Впервые в мировой практике предложены и экспериментально доказаны принципы построения новых, фрактальных адаптивных радиосистем и фрактальных радиоэлементов для современных задач радиотехники и радиолокации. Принцип действия таких систем и элементов основан на

введении дробных преобразований излучаемых и принятых сигналов в пространстве нецелой размерности при учете их скейлинговых эффектов и негауссовской статистики. Это позволяет выйти на новый уровень информационной структуры реальных немарковских сигналов и полей (ИРЭ РАН)».

Методы, аналогичные излагаемым в настоящей работе, могут быть применены при рассмотрении волновых и колебательных процессов в оптике, акустике и механике. Исходя из всего вышесказанного, можно объективно говорить о становлении *московской научной школы фрактальных методов* с центром в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН и хорошо известной в мире.

Список литературы

1. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002. 664 с.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
3. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах. - Дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ. М.: Техносфера, 2006. с. 374–479.
4. Подосенов С.А., Потапов А.А., Соколов А.А. Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур / Под ред. А.А. Потапова. М.: Радиотехника, 2003. 720 с.
5. Фрактальные модели и методы на основе скейлинга в фундаментальных и прикладных проблемах современной физики / А.А. Потапов [и др.] // В сб. науч. тр.: «Необратимые процессы в природе и технике» / Под ред. В.С. Горелика и А.Н. Морозова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. Вып. II. С. 5–107.
6. Потапов А.А. Новейшие методы обработки изображений / Под ред. А.А. Потапова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с. (монография - по гранту РФФИ № 07-07-07005).
7. Потапов А.А. Фрактальные методы исследования флуктуаций сигналов и динамических систем в пространстве дробной размерности. Глава в кн.: «Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы» / Под ред. Р.М. Юльметьева [и др.] Казань: Министерство образования и науки Республики Татарстан, 2008. С. 257–310.
8. Потапов А.А. О фрактальных радиосистемах, дробных операторах, скейлинге, и не только... Глава в кн.: Фракталы и дробные операторы / С предисловием акад. Ю.В. Гуляева и чл.-корр. РАН С.А. Никитова. Казань: Изд-во «Фэн» Академии наук РТ, 2010. С. 417 – 472.
9. Foukzon J., Potapov A.A., Podosenov S.A. Hausdorff-Colombeau measure and axiomatic quantum field theory in spacetime with negative B.Mandelbrot dimensions // <http://arxiv.org/abs/1004.0451>, 5 Feb. 2011. 206 p.
10. Потапов А.А., Черных В.А. Дробное исчисление. Наследие А.В. Летникова / Под ред. А.А. Потапова. М.: Физматлит, 2011.
11. Potapov A.A. Fractional Operators and Fractals for Non-Linear Radio Physics Problems // Abstracts 3rd IFAC Workshop on Fraction Differentiation and its Applications FDA'08 (Turkey, Ankara, 5 – 7 November 2008).- Ankara: Cankaya University, 2008. P.55. Proc. pdf. 5 pp. (<http://www.cankaya.edu.tr/fda08/proceedings.php>).
12. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus.- N. Y.: Academic Press, 1974.- 234 p.
13. Самко С.Г. Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения.- Минск: Наука и техника, 1987.- 688 с.
14. Mehaute A., Nigmatullin R.R., Nivanen L. Fleches du Temps et Geometrie Fractale.- Paris: Hermes, 1998. (in French).
15. West B.J., Bologna M., Grigolini P. Physics of Fractal Operators.- N. Y.: Springer-Verlag, 2003.- 354 p.
16. McBride A.C., Roash G.F. Fractional Calculus.- London: Pitman Publishing Limited, 1985.- 214 p.
17. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение.- Нальчик: Изд - во КБНЦ РАН, 2000. – 300 с.
18. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение.- М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
19. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354 – 368.
20. Чукбар К.В. Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 5 (II). С. 1875 – 1884.
21. Lutzen J. Liouville's differential calculus of arbitrary order and its electrodynamic origin // Proc. 19th Nordic Congress Mathematicians (Icelandic Mathematical Society, Reykjavik,). 1985. P. 149 – 160.
22. Потапов А.А. Краткое историческое эссе о зарождении и становлении теории дробного интегрирования // Нелинейный мир. 2003. Т. 1. № 1 – 2. С. 69 – 81.
23. Потапов А.А., Матвеев Е.Н. Фрактальная аномальная диффузия и операторы дробного интегрирования // Тр. IX Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» (Звенигород МО, 24 - 29 мая 2004 г.).- М.: Изд. МГУ, 2004. С. 23 - 24.
24. Потапов А.А., Матвеев Е.Н. Диффузионные уравнения дробных порядков для описания волновых процессов во фрактальных средах // Там же. С. 25 - 26.
25. Учайкин В.В. Метод дробных производных – Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.- 512 с.

26. Шостак Р.Я. Алексей Васильевич Летников // В книге: "Историко-математические исследования" / Под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. - М.: ГТТИ, 1952. Вып. 5. С. 167 - 240.
27. Davis H.T. The Theory of Linear Operators.- Bloomington, IN: Principia Press, 1936. P. 64 - 75, 276 - 292.
28. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем.- М.: "Янус - К", 2002.- 284 с.
29. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними.- М.: Физматлит, 1958.- 440 с.
30. Федер Е. Фракталы / Пер. с англ.- М.: Мир, 1991.- 262 с.
31. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова / Пер с англ.; Под ред. М. Л. Бланка.- М.: ФАЗИС, 1998.- 346 с.
32. Васильев А.Н. Квантополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике.- СПб.: Изд - во ПИЯФ, 1998.- 774 с.
33. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Пер. с англ.- М.: Мир, 1967. Т. 1.- 500 с.; Т. 2.- 752 с.
34. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы / Пер. с англ.; Под ред. А.В. Борисова.- М.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.- 528 с.
35. Гумбель Е. Статистика экстремальных значений / Пер. с англ.; Под ред. Д.М. Чибисова.- М.: Мир, 1965.- 452 с.
36. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Пер. с англ.; Под ред. А.Н. Романова.- М.: Мир, 2000.- 334 с.
37. Барду Ф., Буццо Ж.- Ф., Аспе А., Коэн - Таннуджи К. Статистика Леви и лазерное охлаждение. Как редкие события останавливают атомы / Пер. с англ.; Под ред. В.П. Яковлева.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.- 216 с.
38. Гнеденко Б.В. Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.- М.- Л.: Гостехиздат, 1949.- 264 с.
39. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - Изд. 9-е, испр. - М.: Изд-во ЛКИ, 2007.- 448 с.
40. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения.- М.: Наука, 1983.- 304 с.
41. Лазоренко О. В., Потапов А.А., Черногор Л. Ф. Фрактальные сверхширокополосные сигналы.- Глава в кн.: Защита информации (методы шифрования) / Под ред. Е.М. Сухарева.- М.: Радиотехника, 2011.
42. Бункин Б.В., Реутов А.П., Потапов А.А. и др. Вопросы перспективной радиолокации.- М.: Радиотехника, 2003.- 512 с.
43. Нелинейная радиолокация / Под ред. А.А. Горбачева, А.П. Колданова, А.А. Потапова, Е.П. Чигина (Библиотека журнала «Нелинейный мир»: Научная серия «Фракталы. Хаос. Вероятность»). - М.: Радиотехника, 2005.- Сб. статей. Ч. 1.- 96 с.; 2006.- Ч. 2.- 168 с.; 2007.- Ч. 3.- 128 с.
44. Jaggard D.L. On Fractal Electrodynamics // In: Recent Advances in Electromagnetic Theory / Ed. by H.N. Kritikos, D.L. Jaggard. N.Y.: Springer - Verlag, 1990. P. 183-224.
45. Jaggard D.L. Fractal Electrodynamics and Modeling // In: Directions in Electromagnetic Wave Modeling / Ed. by H. L. Bertoni and L. B. Felsen. N.Y.: Plenum, 1991. P. 435 - 446.
46. Jaggard D.L. Fractal Electrodynamics: Wave Interaction with Discretely Self - Similar Structures // In: Electromagnetic Symmetry / Ed. by C. Baum, H.N. Kritikos. L.: Taylor & Francis, 1995. P. 231 - 281.
47. Jaggard D.L. Fractal Electrodynamics: From Super Antennas to Superlattices // In: Fractals in Engineering / Ed. by J. Levy Vehel, E. Lutton, and C. Tricot. Berlin: Springer - Verlag, 1997. P. 204 - 221.
48. Jaggard D.L. Fractal Electrodynamics: Surfaces and Superlattices // In: Frontiers in Electromagnetics / Ed. by D. H. Werner, R. Mittra. N.Y.: IEEE Press, 2000. P. 2-47.
49. Потапов А.А., Матвеев Е.Н. Фрактальная электродинамика, скейлинг фрактальных антенн на основе кольцевых структур и мультимасштабные частотно-избирательные 3D-среды или фрактальные "сэндвичи": переход к фрактальным наноструктурам // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. № 10. С. 1157-1177.
50. Боголюбов А.Н., Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш. Способ введения дробного интегро-дифференцирования в классической электродинамике // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2009. № 4. С. 9-12.
51. Боголюбов А.Н., Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш. Интерпретация решения диффузионно-волнового уравнения с использованием дробного интегродифференцирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2010. № 3. С. 54-55.
52. Потапов А.А. Спецтема // Автореферат диссертации ... к.т.н.- М.: МФТИ, 1989. 28 с.; Потапов А.А. Синтез изображений земных покровов в оптическом и миллиметровом диапазонах волн // Дис. ... д. ф.-м. н. М.: ИРЭ РАН, 1994. 436 с.
53. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Давыдов А.Г. О проектировании фрактальных радиосистем. Численный анализ электродинамических свойств фрактальной антенны Серпинского // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 9. С.1070-1076.
54. Потапов А.А. О концепции фрактальных радиосистем и фрактальных устройств // Нелинейный мир. 2007. Т. 5, № 7-8. С. 415-444.
55. New Method for Calculating Pulsed Electromagnetic Fields from Traveling Current Waves in Complex Wire Structures / A.A Potapov [et al.] // Physics of Wave Phenomena. 2011. V. 19, № 2. P. 112-123.
56. Потапов А.А. Фрактальные антенны, нанотехнологии, резонансы и плазмоны // Успехи современной радиоэлектроники. 2011. № 5. С. 5-12.

57. Hou B., Liao X. Q., Poon J. K. S. Resonant Infrared Transmission and Effective Medium Response of Subwavelength H-Fractal Apertures // Optics Express. 2010. V. 18. № 4. P. 3946–3951.
58. Отчетный доклад Президиума Российской академии наук. Научные достижения Российской академии наук в 2007 году. М.: Наука, 2008. 204 с.
59. Отчетный доклад Президиума Российской академии наук. Научные достижения Российской академии наук в 2009 году. М.: Наука, 2010. 486 с.

Fractional operators and scaling in fractal electrodynamics, and wideband fractal antennas in the researches of high frequency resonances and plazmons

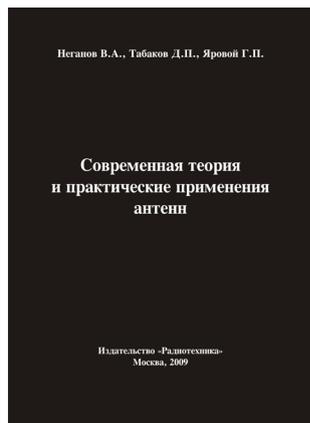
A.A. Potapov

The definitions and the main properties of fractional derivatives and integrals concerning the radio physics problems are presented. The historical essay of the beginnings of the fractional operators' mathematical theory is given. The scaling conceptions have been considered. It has been shown that often the non-Gaussian distributions as well as non-differentiable functions and fractals describe the temporal and spatial physical processes in much more detail. The definition of the fractal electrodynamics has been given. One of the methods of introduction of fractional integro-differentiation by the time into the main equations of electrodynamics of tangible media has been considered. Efficiency of the fractal antennas and fractal frequency-selective media has been shown. The application areas in the up-to-date radio electronics are pointed out. Review of the fractal apertures application in the researches of resonances and plasmons in the physical experiments has been given. The author conceptions of fractal impedances and fractal radio systems have been presented. The directions of promising investigations have been given.

Keywords: fractal, scaling, fractional operators, fractional electrodynamics, fractal antennas, nano-antennas, fractal media, fractal labyrinths, plasmons, meta-materials, fractal radiosystems.

Неганов, В.А.

Современная теория и практические применения антенн: монография / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; предисловие академика Ю.В. Гуляева; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.



ISBN 978-5-88070-222-0

УДК 621.396.67
ББК 32.845

Рассмотрены основные разделы теории и техники антенн. Освещены вопросы расчета и построения различных типов антенн (от вибраторных до рупорных и антенных решеток, включая фазированные). Основное внимание уделено антеннам СВЧ и расчетам их электромагнитных полей в ближней зоне, т. е. вопросам электромагнитной совместимости.

Принципиальное отличие книги от известных заключается в последовательном применении метода физической регуляризации (самосогласованного метода) к расчету электромагнитного поля антенн, позволяющего осуществлять непрерывный переход с излучающей поверхности антенны к пространству вне ее. С помощью самосогласованного метода получены новые результаты по теории антенн: установлены связь между поверхностной плотностью тока на вибраторной антенне и напряженностью электромагнитного поля, однонаправленный режим излучения для кольцевой (рамочной антенны), режимы стоячих и бегущих волн в цилиндрической спиральной антенне, входное сопротивление практически для всех типов антенн. Теоретический материал подкреплен примерами применения многолучевых антенн.

Предназначено для разработчиков антенно-фидерных устройств, аспирантов и докторантов, занимающихся вопросами проектирования антенных систем различного назначения, студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений.