Рубрика 2. НАУЧНЫЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
Направление «Электротехника»

УДК [UDC] 629.439
DOI 10.17816/transsyst20195292-105

© В. А. Поляков, Н. М. Хачапуридзе
Институт транспортных систем и технологий
Национальной академии наук Украины
(Днепр, Украина)

РЕЗОНЫ И РАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МАГНИТОЛЕВИТИРУЮЩЕГО ПОЕЗДА

Обоснование: Синтез качественной динамики и её анализ – кардинальные задачи проблемы создания магнитолевитирующего поезда (МЛП).

Цели работы: Разработать парадигму и методику рационального решения указанных задач.

Методы: Синтез желаемого движения предлагается осуществлять путем решения обратной задачи динамики системы, а его прелиментарный анализ – решением прямой задачи той же динамики.

Результаты: Выявлены и обоснованы резоны моделирования динамики МЛП. Разработана парадигма и тензорная методика её компьютерного синтеза и анализа.

Ключевые слова: магнитолевитирующий поезд, динамика, анализ и синтез, компьютерное моделирование, тензорная методика.

Rubric 2: SCIENTIFIC AND PRACTICAL DEVELOPMENTS
Field “Electrical Engineering”

© Vladislav A. Polyakov, Nikolai M. Khachapuridze
Institute of Transport Systems and Technologies
of Ukraine’s National Academy of Sciences
(St. Dnepr, Ukraine)

REASONS FOR AND RATIONAL METHODS OF MAGNETICALLY LEVITATED TRAINS DYNAMIC MODELLING

Background: The synthesis of high-quality dynamics and its analysis are the cardinal tasks of a magnetically levitated train’s (MLT) creating problem.

Aims of the work: Design the paradigm and technique of specified tasks’ rational solution.

Methods: The synthesis of the wanted motion is proposed to carry out by solving the system’s dynamic’s inverse problem, and its preliminary analysis – by solving the same dynamic’s direct problem.

Results: The reasons for MLT’s dynamic’s modeling are identified and substantiated.

Received: 27.06.2019 **Revised: 11.07.2019** **Accepted: 15.07.2019**
Поступила: 27.06.2019 **Одобрена: 11.07.2019** **Принята: 15.07.2019**

The paradigm and tensor technique of its computer synthesis and analysis was developed.

Keywords: magnetically levitated train, dynamics, analysis and synthesis, computer modeling, tensor technique.

Введение

Магнитолевитирующие поезда (МЛП) движутся со скоростями, намного более высокими, чем иные средства наземного транспорта. Безопасность такого движения должна быть гарантированно обеспечена во всех возможных эксплуатационных режимах и может быть индицирована критериями его качества. Это делает необходимым корректное и достаточно полное моделирование динамических процессов, протекающих в МЛП. Поэтому среди задач проблемы создания таких поездов диада синтеза их качественной динамики и её анализа является кардинальной.

Широкомасштабный натурный эксперимент с МЛП дорог, долог, опасен, а зачастую и вовсе невозможен. Традиционные аналитические методы исследования их динамики, как правило, также малоэффективны. Следовательно, возможно большая часть таких исследований должна выполняться путем компьютерного моделирования [1], сочетающего в себе, как известно, многие достоинства аналитических и экспериментальных методов. В то же время, достижение максимально возможной эффективности такого моделирования амбивалентно. Оно требует значительного повышения качества используемых математических моделей при наименьшей ресурсоемкости их получения и реализации. Традиционные способы решения задач динамики МЛП одновременно удовлетворить указанные антагонистические требования не позволяют.

Задачи исследования

Результаты анализа изложенных фактов выявляют потребность в разработке парадигмы и методики рационального решения задач синтеза и анализа динамики МЛП.

Рационализация алгоритма исследования динамики МЛП

Абсолютное большинство современных исследований динамики МЛП основано на решении ее прямой задачи [2–4], то есть – многократном интегрировании систем нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Их число обычно велико, а выражения элементов – громоздки и сложны. Решению упомянутой задачи должно предшествовать приведение уравнений модели к первому порядку, что сопряжено с обращением матриц высокой размерности. Если учитывается параметрическая и/или

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

структурная нестационарность системы, то такое обращение необходимо выполнять на каждом шаге интегрирования. Оперативный синтез движения поезда требует “бортовой”, прогнозирующей, многовариантной реализации его модели, выполнение которой описанным традиционным путем вовсе не реально. Но даже если модель предполагается использовать для поверочных расчётов в стационарных – не “бортовых” – условиях, а расчётная схема системы принята не слишком сложной, стационарной и голономной, интегрирование уравнений такой модели неоправданно ресурсоёмко. Причина этого – лавинообразный рост объёма и катастрофически быстрое падение точность требуемых информационных преобразований моделирования. Основной же неустранимый недостаток традиционного пути решения задач динамики МЛП состоит в том, что результат решения прямой задачи такой динамики носит предсказательно-констатирующий, когнитивный, не креативный характер и принципиально не может гарантировать достижение требуемого качества изучаемого движения.

Сдвиг парадигмы исследования динамики МЛП в сторону решения ее обратной задачи радикально меняет ситуацию. Реализация модели движения становится значительно менее ресурсоёмкой и вполне возможной непосредственно в процессе построения движения – на бортовых компьютерах. Осуществление результатов такой реализации позволяет гарантировать требуемое качество конструируемого движения и придать системе весьма важное свойство грубости [5]. Если, к тому же, управление поездом осуществляется по обобщённым ускорениям, то возникает дополнительная возможность автоматического обеспечения свойства адаптивности движения к обстановке [6]. Исследование, базирующееся на предлагаемой парадигме, обретает креативный, эвристический характер, не присущий традиционному пути его проведения. Это позволяет существенно облегчить процесс и усовершенствовать результат синтеза динамики рассматриваемой системы.

Исчерпывающий анализ результирующей динамики МЛП требует проведения экспериментов натурных. Однако их объём должен быть сокращён до абсолютно неизбежного минимума. Все прелиминарные эксперименты должны быть компьютерными. Они вполне выполнимы в стационарных – не “бортовых” – условиях, в произвольном, удобном для исследования, масштабе времени и рационально реализуемы традиционным путем – решением прямой задачи динамики поезда.

Методика построения модели естественной динамики МЛП

Базисом построения желаемой динамики поезда являются его естественные – под воздействием объективных возмущений – движения. Они подлежат приоритетному моделированию. Основными критериями

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

выбора его методики должны быть: полнота, синтетичность и удобство органичного учёта параметров, структуры системы, а также протекающих в ней процессов. Результаты анализа, исходящего из этих критериев, подобного рода альтернативных методик свидетельствуют о преимуществах тензорных методов по сравнению с классическими. Основными из этих преимуществ являются: инвариантность получаемых уравнений относительно преобразований координат; геометризация процессов анализа и синтеза движения; радикальное повышение компактности и обозримости выражений; рекуррентно-блочный характер процедуры моделирования с любой требуемой глубиной вложенности; возможность высокой формализации и автоматизации процесса исследования на базе систематичного использования компьютерной техники. Изложенные факты выявляют целесообразность избрания тензорного типа методики для синтеза и анализа динамики МЛП.

При решении многих задач динамики МЛП в качестве расчётной схемы его механической подсистемы (МП) целесообразно принять агрегат абсолютно твёрдых – опорных – тел, соединённых с помощью связей через податливые блоки. Поэтому в качестве основы создаваемой методики примем дифференциальные уравнения пространственного движения такого тела в инерциальной системе координат $OX_p \; \forall\, p \in [\overline{1,3}]$. Последние уравнения известны [7], всегда неизменны и имеют вид

$$f_{ij\alpha\beta} \cdot \ddot{\varepsilon}^{\beta}_{ij} + \mathrm{E}_{ij\alpha,\beta\gamma} \cdot \dot{\varepsilon}^{\beta}_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}^{\gamma}_{ij} = \mathrm{K}_{ij\alpha} \;\; \forall\, \alpha,\beta,\gamma \in [\overline{1,6}], \qquad (1)$$

где $f_{ij\alpha\beta},\, \mathrm{E}_{ij\alpha,\beta\gamma} \forall\, \alpha,\beta,\gamma \in [\overline{1,6}]$ – ковариантный метрический тензор j-го опорного тела расчётной схемы i-го экипажа МЛП, а также трёхиндексный символ Кристоффеля 1-го рода того же тела в координатах $\varepsilon^{\beta}_{ij} \;\forall\, \beta \in [\overline{1,6}]$;

$\varepsilon^{\beta}_{ij}, \mathrm{K}_{ij\alpha} \;\forall\, \alpha,\beta \in [\overline{1,6}]$ – опорные координаты того же тела относительно триэдра $OX_p \;\forall\, p \in [\overline{1,3}]$, а также соответствующие им обобщённые силы.

Принимая, например

$$\varepsilon^{1}_{ij} = x_{ijC1}; \quad \varepsilon^{2}_{ij} = x_{ijC2}; \quad \varepsilon^{3}_{ij} = x_{ijC3};$$
$$\varepsilon^{4}_{ij} = \lambda^{1}_{ij} = \tilde{\psi}_{ij}; \quad \varepsilon^{5}_{ij} = \lambda^{2}_{ij} = \tilde{\theta}_{ij}; \quad \varepsilon^{6}_{ij} = \lambda^{3}_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij}, \qquad (2)$$

где $x_{ijCp} \forall\, p \in [\overline{1,3}]$ – декартовы координаты точки ijC – центра масс рассматриваемого тела – в триэдре $OX_p \;\forall\, p \in [\overline{1,3}]$;

$\tilde{\psi}_{ij}, \tilde{\theta}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}$ – эйлеровы углы, определяющие взаимную ориентацию связанного с телом $ijCz_r \forall\, r \in [\overline{1,3}]$ и того же инерциального $OX_p \;\forall\, p \in [\overline{1,3}]$ триэдров, можно показать, что

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

$$f_{ij\alpha\beta} = \begin{bmatrix} f_{ijt} & 0 \\ 0 & f_{ijr} \end{bmatrix} \forall \alpha, \beta \in [\overline{1,\ 6}];$$

$$f_{ijt} = diag\{m_{ij}, m_{ij}, m_{ij}\};$$

$$f_{ijr} = \begin{bmatrix} f_{ij44} & f_{ij45} & f_{ij46} \\ f_{ij54} & f_{ij55} & 0 \\ f_{ij64} & 0 & f_{ij66} \end{bmatrix};$$

$$f_{ij44} = (I_{ij11} \cdot \cos^{(2)} \tilde{\gamma}_{ij} + I_{ij22} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_{ij}) \cdot \cos^{(2)} \tilde{\theta}_{ij} + I_{ij33} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\theta}_{ij};$$

$$f_{ij45} = f_{ij54} = (I_{ij11} - I_{ij22}) \cdot \cos \tilde{\theta}_{ij} \cdot \sin \tilde{\gamma}_{ij} \cdot \cos \tilde{\gamma}_{ij};$$

$$f_{ij46} = f_{ij64} = I_{ij33} \cdot \sin \tilde{\theta}_{ij};$$

$$f_{ij55} = I_{ij11} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_{ij} + I_{ij22} \cdot \cos^{(2)} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad f_{ij66} = I_{ij33}, \tag{3}$$

где $m_{ij}, I_{ijpp} \ \forall p \in [\overline{1,\ 3}]$ – масса того же опорного тела, а также его главные центральные (относительно осей триэдра $ijCz_r \ \forall r \in [\overline{1,\ 3}]$) моменты инерции.

Экипажи МЛП являются путенаправляемыми. Поэтому, как правило, его динамику удобно рассматривать относительно пути, по которому он двигается. Такой подход облегчает интерпретацию результатов исследований и повышает их информативность. В то же время, координатные триэдры, сопровождающие экипажи в движении и отслеживающие поверхность пути, являются неинерциальными: их начала имеют отличные от нуля абсолютные ускорения, а сами они вращаются. Итак, для МЛП, движущегося по пространственному перелому пути, возникает задача динамики относительного движения.

Уравнения (1) – тензорные. Поэтому они форминвариантны по отношению к преобразованиям координат, в которых записаны. В координатах $\rho_{ij}^{\kappa} \ \forall \kappa \in [\overline{1,\ 6}]$, определяющих положение того же опорного тела относительно неинерциального триэдра $iQY_q \ \forall q \in [\overline{1,\ 3}]$, сопровождающего i-ый экипаж в его движении относительно поверхности пути под ним, движение тела может быть описано моделью, получаемой из (1) подстановкой

$$\varepsilon_{ij}^{\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\beta}}{\partial \rho_{ij}^{\kappa}} \cdot \rho_{ij}^{\kappa} \ \forall \beta, \kappa \in [\overline{1,\ 6}] \tag{4}$$

и умножением получающихся выражений на матрицу преобразования

$$\tau_{ij\kappa}^{\ \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\beta}}{\partial \rho_{ij}^{\kappa}} \ \forall \beta, \kappa \in [\overline{1,\ 6}]. \tag{5}$$

Аналогично (2), положение тела в триэдре $i\mathrm{Q}Y_q \ \forall q \in [\overline{1,\ 3}]$ может быть определено, например, координатами

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

$$\rho_{ij}^1 = y_{ijC1}; \quad \rho_{ij}^2 = y_{ijC2}; \quad \rho_{ij}^3 = y_{ijC3};$$
$$\rho_{ij}^4 = \nu_{ij}^1 = \psi_{ij}; \quad \rho_{ij}^5 = \nu_{ij}^2 = \theta_{ij}; \quad \rho_{ij}^6 = \nu_{ij}^3 = \gamma_{ij}, \tag{6}$$

где $y_{ijC\xi}, \nu_{ij}^{\xi}\ \forall \xi \in [\overline{1,3}]$ – декартовы координаты точки ijC в триэдре $iQY_q\ \forall q \in [\overline{1,3}]$, а также эйлеровы углы, определяющие ориентацию относительно него триэдра $ijCz_r\ \forall r \in [\overline{1,3}]$.

Тогда из (2), (5) и (6) следует, что

$$\tau_{ij\kappa}^{\beta} = \begin{bmatrix} \varsigma_{ijpq} & 0 \\ 0 & \sigma_{ijv}^{u} \end{bmatrix}; \quad \varsigma_{ijpq} = \frac{\partial x_{ijCp}}{\partial y_{ijCq}}; \quad \sigma_{ijv}^{u} = \frac{\partial \lambda_{ij}^{u}}{\partial \nu_{ij}^{v}};$$
$$\forall \beta, \kappa \in [\overline{1,6}];\ p, q, v \in [\overline{1,3}]. \tag{7}$$

В то же время, из кинематических соображений заключаем, что

$$\lambda_{ij}^{u} = \lambda_{ij}^{u}(\nu_{ij}^{v}, \chi_i^{w})\ \forall u, v, w \in [\overline{1,3}], \tag{8}$$

где $\chi_i^w\ \forall w \in [\overline{1,3}]$ – эйлеровы углы, определяющие взаимную ориентацию триэдров $iQY_q\ \forall q \in [\overline{1,3}]$ и $OX_p\ \forall p \in [\overline{1,3}]$.

Можно принять, например, что

$$\chi_i^1 = \psi_i^*; \quad \chi_i^2 = \theta_i^*; \quad \chi_i^3 = \gamma_i^*, \tag{9}$$

где $\psi_i^*, \theta_i^*, \gamma_i^*$ – углы, определяющие конфигурацию пути под i-ым экипажем МЛП.

Считая путь склерономным, получаем

$$\chi_i^{\vartheta} = \chi_i^{\vartheta}(w_{iQ})\ \forall \vartheta \in [\overline{1,3}], \tag{10}$$

где w_{iQ} – расстояние, пройденное точкой iQ вдоль оси пути за интервал наблюдения движения поезда.

Из (4) следует, что

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\beta}}{\partial \rho_{ij}^{\kappa}} \cdot \dot{\rho}_{ij}^{\kappa} = \tau_{ij\kappa}^{\beta} \cdot \dot{\rho}_{ij}^{\kappa}\ \beta, \kappa \in [\overline{1,6}]. \tag{11}$$

Тогда

$$\ddot{\varepsilon}_{ij}^{\beta} = \ddot{\rho}_{ij}^{\kappa} \cdot \tau_{ij\kappa}^{\beta} + \dot{\rho}_{ij}^{\kappa} \cdot \dot{\tau}_{ij\kappa}^{\beta}\ \forall \beta, \kappa \in [\overline{1,6}]. \tag{12}$$

В последних выражениях, исходя из (5),

$$\dot{\tau}_{ij\kappa}^{\beta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\beta}}{\partial \rho_{ij}^{\kappa}} = \dot{\rho}_{ij}^{n} \cdot \frac{\partial^{(2)} \varepsilon_{ij}^{\beta}}{\partial \rho_{ij}^{\kappa}\, \partial \rho_{ij}^{n}} = \dot{\rho}_{ij}^{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_{ij}^{n}} \tau_{ij\kappa}^{\beta}\ \forall \beta, \kappa, n \in [\overline{1,6}]. \tag{13}$$

После подстановки выражений (11)–(13) в модель (1), она приобретает вид

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

$$f_{ij\alpha\beta}\cdot(\ddot{\rho}_{ij}^{\kappa}\cdot\tau_{ij\kappa}^{\beta}+\dot{\rho}_{ij}^{\kappa}\cdot\dot{\rho}_{ij}^{n}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho_{ij}^{n}}\tau_{ij\kappa}^{\beta})+\mathrm{E}_{ij\alpha,\beta\gamma}\cdot\tau_{ij\kappa}^{\beta}\cdot\dot{\rho}_{ij}^{\kappa}\cdot\tau_{ijn}^{\gamma}\cdot\dot{\rho}_{ij}^{n}=\mathrm{K}_{ij\alpha}$$

$$\forall\,\alpha,\beta,\gamma,\kappa,n\in[\overline{1,\,6}]. \qquad (14)$$

Умножая эти уравнения на τ_{ijp}^{α}, со свёрткой по α, модель движения опорного тела относительно триэдра iQY_q $\forall\,q\in[\overline{1,\,3}]$ получаем в виде

$$g_{ijp\kappa}\cdot\ddot{\rho}_{ij}^{\kappa}+\Gamma_{ijp,\kappa n}\cdot\dot{\rho}_{ij}^{\kappa}\cdot\dot{\rho}_{ij}^{n}=\mathrm{T}_{ijp}\ \forall\,p,\kappa,n\in[\overline{1,\,6}]; \qquad (15)$$

$$g_{ijp\kappa}=f_{ij\alpha\beta}\cdot\tau_{ijp}^{\alpha}\cdot\tau_{ij\kappa}^{\beta};$$

$$\Gamma_{ijp,\kappa n}=f_{ij\alpha\beta}\cdot\tau_{ijp}^{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho_{ij}^{n}}\tau_{ij\kappa}^{\beta}+\mathrm{E}_{ij\alpha,\beta\gamma}\cdot\tau_{ijp}^{\alpha}\cdot\tau_{ij\kappa}^{\beta}\cdot\tau_{ijn}^{\gamma};$$

$$\mathrm{T}_{ijp}=\mathrm{K}_{ij\alpha}\cdot\tau_{ijp}^{\alpha}\ \ \forall\,\alpha,\beta,\gamma,p,\kappa,n\in[\overline{1,\,6}], \qquad (16)$$

где $g_{ijp\kappa},\Gamma_{ijp,\kappa n},\mathrm{T}_{ijp}$ $\forall\,p,\kappa,n\in[\overline{1,\,6}]$ – ковариантный метрический тензор рассматриваемого тела, его трёхиндексный символ Кристоффеля 1-го рода в координатах ρ_{ij}^{κ} $\forall\,\kappa\in[\overline{1,\,6}]$, а также соответствующие этим координатам обобщённые силы.

В модели (15), (16), как известно [7],

$$\Gamma_{ijp,\kappa n}=0{,}5\cdot\left(\frac{\partial g_{ijp\kappa}}{\partial\rho_{ij}^{n}}+\frac{\partial g_{ijpn}}{\partial\rho_{ij}^{\kappa}}-\frac{\partial g_{ij\kappa n}}{\partial\rho_{ij}^{p}}\right)\ \forall\,p,\kappa,n\in[\overline{1,\,6}]. \qquad (17)$$

Итак, модель (15)–(17) описывает относительное движение свободного опорного тела расчётной схемы МЛП в неинерциальном триэдре $i\mathrm{Q}Y_q$ $\forall\,q\in[\overline{1,\,3}]$.

До объединения в агрегат, являющийся расчётной схемой поезда, входящие в неё тела ничем не соединены, их движения ничем не стеснены и конфигурация этой совокупности в триэдрах $i\mathrm{Q}Y_q$ $\forall\,i\in[\overline{1,\,N}],q\in[\overline{1,\,3}]$ может быть определена опорными координатами

$$\xi^{\beta}\ \forall\beta\in[\overline{1,\,6\cdot\mathrm{H}\cdot N}], \qquad (18)$$

где H,N – число опорных тел в расчётной схеме экипажа, а также таких экипажей в поезде.

После сопряжения в агрегат, на движения тел расчётной схемы МЛП накладываются ограничения, формализуемые уравнениями связей, которые будем считать склерономными голономными

$$\xi^{\beta}=\xi^{\beta}(\eta^{\lambda})\ \forall\beta\in[\overline{1,\,6\cdot\mathrm{H}\cdot N}],\lambda\in[\overline{1,\,L}], \qquad (19)$$

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

где $\eta^{\lambda}\ \forall\lambda\in[\overline{1,\ L}], L$ – обобщённые координаты, принятые для описания движения рассматриваемой системы и их число.
Таким образом, способ сопряжения тел в агрегат, являющийся расчётной схемой МЛП, может быть описан структурной матрицей [8] этого агрегата

$$s=\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial\eta^{\lambda}}\ \forall\beta\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}],\lambda\in[\overline{1,\ L}]. \tag{20}$$

Пользуясь координатами (18), движение совокупности тел, входящих в расчётную схему МЛП, может быть описано моделью, являющейся совокупностью уравнений вида (15)

$$b_{\alpha\beta}\cdot\ddot{\xi}^{\beta}+\text{B}_{\alpha,\beta\gamma}\cdot\dot{\xi}^{\beta}\cdot\dot{\xi}^{\gamma}=U_{\alpha}\ \forall\alpha,\beta,\gamma\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}]; \tag{21}$$

$$b_{\alpha\beta}=diag\{\lfloor g_{ijp\kappa}\rfloor\};\quad \text{B}_{\alpha,\beta\gamma}=diag\{\lfloor\Gamma_{ijp,\kappa n}\rfloor\};\quad U_{\alpha}=\lceil\text{T}_{ijp}\rceil^{T}$$
$$\forall\alpha,\beta,\gamma\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}];\ i\in[\overline{1,\ N}];\ j\in[\overline{1,\ \text{Н}}];\ p,\kappa,n\in[\overline{1,\ 6}], \tag{22}$$

где $b_{\alpha\beta},\text{B}_{\alpha,\beta\gamma}\ \forall\alpha,\beta,\gamma\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}]$ – ковариантный метрический тензор совокупности и её трёхиндексный символ Кристоффеля 1-го рода в координатах $\xi^{\beta}\ \forall\beta\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}]$;
$U_{\alpha}\ \forall\alpha\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}]$ – соответствующие им обобщённые силы.

Уравнения (21), как и их составляющие – уравнения (15), являются тензорными. Поэтому они форминвариантны относительно преобразований координат, в которых записаны. То есть, могут быть (без изменения формы) преобразованы к записи в координатах $\eta^{\lambda}\ \forall\lambda[\overline{1,\ L}]$. Для этого (аналогично преобразованию уравнений (1) в модель (15)) воспользуемся структурной матрицей (20) расчётной схемы МЛП, а также выражениями

$$\dot{\xi}^{\beta}=\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial\eta^{\lambda}}\cdot\dot{\eta}^{\lambda}\ \forall\beta\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}];\ \lambda\in[\overline{1,\ L}]; \tag{23}$$

$$\ddot{\xi}^{\beta}=\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial\eta^{\lambda}}\cdot\ddot{\eta}^{\lambda}+\frac{\partial^{2}\xi^{\beta}}{\partial\eta^{\lambda}\,\partial\eta^{\mu}}\cdot\dot{\eta}^{\lambda}\cdot\dot{\eta}^{\mu}\ \forall\beta\in[\overline{1,\ 6\cdot\text{Н}\cdot N}];\lambda,\mu\in[\overline{1,\ L}], \tag{24}$$

непосредственно следующих из уравнений (19) связей, наложенных на тела этой схемы. После умножения уравнений (21) на матрицу (20) (со свёрткой по “немым” индексам), а также подстановки в них соотношений (23) и (24), модель движения МЛП в координатах $\eta^{\lambda}\ \forall\lambda[\overline{1,\ L}]$, то есть относительно неинерциальных триэдров $iQY_q\ \forall i\in[\overline{1,\ N}],q\in[\overline{1,\ 3}]$, получаем в виде

$$c_{\lambda\mu}\cdot\ddot{\eta}^{\mu}+C_{\lambda,\mu\nu}\cdot\dot{\eta}^{\mu}\cdot\dot{\eta}^{\nu}=Y_{\lambda}\ \forall\lambda,\mu,\nu\in[\overline{1,\ L}]; \tag{25}$$

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

$$c_{\lambda\mu} = b_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{\lambda}} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{\mu}} \quad \forall \alpha, \beta \in [\overline{1,\ 6 \cdot \text{Н} \cdot N}]; \lambda, \mu \in [\overline{1, L}]; \tag{26}$$

$$C_{\lambda,\mu\nu} = b_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{\lambda}} \cdot \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial \eta^{\lambda}\, \partial \eta^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{\lambda}} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{\mu}} \cdot \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial \eta^{\nu}} \cdot \text{В}_{\alpha,\beta\gamma}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1,\ 6 \cdot \text{Н} \cdot N}];\ \lambda, \mu, \nu \in [\overline{1, L}]; \tag{27}$$

$$Y_{\lambda} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{\lambda}} \cdot U_{\alpha} \ \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1,\ 6 \cdot \text{Н} \cdot N}];\ \lambda \in [\overline{1, L}], \tag{28}$$

где $c_{\lambda\mu}, C_{\lambda,\mu\nu}, Y_{\lambda}\ \ \forall \lambda, \mu, \nu \in [\overline{1,\ L}]$ – ковариантный метрический тензор расчётной схемой поезда, её трёхиндексный символ Кристоффеля 1-го рода в координатах $\eta^{\lambda}\ \forall \lambda \in [\overline{1,\ L}]$, а также соответствующие обобщённые силы. Аналогично (17),

$$C_{\lambda,\mu\nu} = 0{,}5 \cdot \left(\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial \eta^{\nu}} + \frac{\partial c_{\lambda\nu}}{\partial \eta^{\mu}} - \frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial \eta^{\lambda}} \right) \forall \lambda, \mu, \nu \in [\overline{1,\ L}]. \tag{29}$$

Построение модели (25), (26), (28), (29) требует использования лишь операций матричной алгебры. Они реализовались программно с использованием символьного компонента системы компьютерной математики Mathematica. Поэтому такое построение происходит в полностью автоматическом режиме, имея своим итоговым результатом явные выражения всех элементов указанной модели (которые не приводятся ввиду громоздкости). При этом, благодаря синтетичности учёта функционально-структурной организации МЛП, в полученных уравнениях модели его относительного движения автоматически учтены все члены, отражающие истинное динамическое силовое равновесие в системе. Рассмотрение псевдосил инерции, как это предполагается, например, при использовании методики уравнений Лагранжа [9–11], при этом не требуются. Уравнения модели, получаемой с использованием предлагаемой методики, снова являются тензорными. Поэтому, при возникновении такой надобности, они, без фундаментальной перестройки, преобразуемы (согласно изложенному алгоритму) не только к любой иной удобной для какого-либо исследования системе обобщённых координат, но и к иной структуре расчётной схемы исследуемого объекта.

Методика построения управляемой динамики МЛП

Динамика поезда, определяемая его естественными возмущениями и описываемая моделью (25), в подавляющем большинстве случаев не обладает желательными свойствами. В свою очередь, эти свойства

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

определяют качество движения и могут быть представлены его задачами, а затем – в виде программ – целями, благодаря чему, – становятся доступными для использования. Чтобы МЛП совершал желаемое движение, описывающая модель должна не противоречить объективным законам механики и, в то же время, должна быть совместна с программами динамики управляемой [5]. Одновременное соблюдение обоих этих условий достижимо любым изменением модели естественной динамики, которое делает её совместной с такими программами. Способ преобразования модели принципиально не ограничен и определяется, в основном, удобством натурной реализации влекомых им изменений исследуемой системы или/и воздействий на неё. На практике наиболее распространённым является введение в модель движения аддитивных управляющих воздействий на систему [12].

С целью конкретизации рассмотрения, примем один из наиболее гибких и приемлемых для МЛП способ натурной реализации его желаемого движения – терминальное управление им [13, 14]. Тогда задачей движения поезда считается его приведение, по достижении принятой независимой переменной заданных значений, в априорно заданную последовательность состояний. А на пространства фазовых координат, естественных возмущений и управлений накладываются реальные ограничения $\Omega_x(t)$, $\Omega_w(t)$ и $\Omega_u(t)$ соответственно. В зависимости от целей и задач исследования, эти множества могут быть различно физически интерпретированы.

Исходя из модели (25) естественной динамики МП МЛП, в случае терминального управления им, модель управляемого движения этой подсистемы имеет вид

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), w(t), t] \ \forall t \in [t_s, \theta]; \quad x(t_s) = x_s, \tag{30}$$

где $x(t), u(t), w(t) \ \forall t \in [t_s, \theta]$ – векторы состояния подсистемы, а также управляющих и возмущающих воздействий на неё;
t – удобная для проведения исследования независимая переменная, например, время;
$[t_s, \theta]$ – интервал построения движения;
x_s – его начальные условия.

Цель движения поезда формализуем программой

$$x(\tau) = x_f, \tag{31}$$

где τ, x_f – значения независимой переменной и вектора состояния МП МЛП в конечный, на рассматриваемом терминальном интервале управления, момент.

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

При этом, исходя из физического смысла процесса движения, должны соблюдаться соотношения

$$x(t) \in \Omega_x(t),\ u(t) \in \Omega_u(t)\ \ \forall t \in [t_s, \tau] \tag{32}$$

и, кроме того, быть известна некоторая априорная информация

$$w(t) \in \Omega_w(t)\ \ \forall t \in [t_s\ \tau]. \tag{33}$$

Программа (31) накладывает ограничение лишь на конечное (на интервале $[t_s, \tau]$) состояние МП поезда. Поэтому моделью (30), совместно с условиями (31)–(33), определяется ансамбль фазовых траекторий изображающей точки подсистемы в пространстве её состояний

$$\begin{gathered} X[u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] = \{x[\bullet, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] \in \Omega_x(t): \\ u(\bullet) \in \Omega_u(t),\ w(\bullet) \in \Omega_w(t),\ t \in [t_s, \tau]\}; \\ u(\bullet) = \{u(t)\ \ \forall t \in [t_s, \tau]\};\ w(\bullet) = \{w(t)\ \ \forall t \in [t_s, \tau]\}; \\ \{x[\bullet, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f]\} = \{x[t, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f]\ \forall t \in [t_s, \tau]\}, \end{gathered} \tag{34}$$

каждая из которых удовлетворяет краевым условиям

$$x(t_s) = x_s, \quad x(\tau) = x_f. \tag{35}$$

Если, помимо удовлетворения этих условий, к движению МП МЛП не предъявляется никаких иных требований, то оно синтезируется в чисто терминальной постановке, предполагающей, в зависимости от конкретных значений возмущений (33), возможность реализации любой траектории из ансамбля (34). Таким образом, в данном случае движение определено лишь с точностью до этого возможного ансамбля.

Из изложенного следует, что, при чисто терминальной постановке задачи построения движения МП поезда, относительно его конкретной реализации имеется существенный конструктивный произвол. Он может быть использован для придания этому движению дополнительных полезных свойств. Например, если потребовать, чтобы, помимо удовлетворения условий (32) и (35), на реализуемой фазовой траектории подсистемы имело место соотношение

$$\begin{gathered} I = \inf_{u(\bullet)} \sup_{w(\bullet)} \{\int_{t_s}^{\tau} \lambda[u(\bullet), w(\bullet)] \cdot dt: \\ u(\bullet) \in \Omega_u(t),\ w(\bullet) \in \Omega_w(t),\ t \in [t_s, \tau]\}, \end{gathered} \tag{36}$$

где I – интегральный показатель качества движения;
λ – заданная функция своих аргументов,
то задача синтеза движения носит игровой минимаксный характер, базирующийся на концепции гарантированного результата [15]. При этом упомянутое движение приобретает свойства, оптимальные по критерию I,

Received: 27.06.2019 Revised: 11.07.2019 Accepted: 15.07.2019
Поступила: 27.06.2019 Одобрена: 11.07.2019 Принята: 15.07.2019

а из ансамбля (34) реализуется единственная траектория, экстремальная по этому критерию. Движение МП МЛП определено однозначно и гарантированно обладает оптимальностью в желаемом смысле при любых возможных возмущениях. Такой подход позволяет, в зависимости от необходимости, в различных эксплуатационных режимах оптимизировать требуемые характеристики указанного движения.

Итак, путем классификации и параметризации обстановки, в которой происходит движение МП МЛП [15], а также построения для каждой типовой ситуации оптимального, в желаемом смысле, управления этим движением, может быть решена задача его терминального синтеза [13], то есть – обратная задача динамики поезда в терминальной постановке. На практике при разработке конструктивных систем такого синтеза неизбежно возникает проблема необходимости одновременного удовлетворения совокупности разнородных, зачастую – антагонистичных, требований, предъявляемых к качеству синтезируемого движения. Рациональный способ его оптимизации, в этом случае, состоит во введении векторного критерия I, элементы которого – частные критерии, индицирующие оптимизируемые парциальные свойства такого движения [16, 17].

Заключение

Исследования динамики МЛП, проводимые в рамках разработанной парадигмы и основанной на ней методики, комплексно компьютеризированы на базе современных систем компьютерной математики [18–20]. Эти исследования значительно более эвристичны и ресурсно-экономичны по сравнению с проводимыми традиционными методами. Результаты, получаемые предлагаемым путем, креативны. Их использование позволяет гарантировать требуемое качество движения поезда, а также придать ему весьма важное свойство грубости. При этом если управление синтезируемым движением замыкается по обобщённым ускорениям системы, то это движение обретает свойство адаптивности к обстановке. Изложенные факты выявляют целесообразность использования предлагаемых парадигмы и методики при исследованиях динамики МЛП. Это позволит существенно облегчать процесс и усовершенствовать результат таких исследований.

Авторы заявляют что:

1. У них нет конфликта интересов;
2. Настоящая статья не содержит каких-либо исследований с участием людей или животных в качестве объектов исследований.

Received: 27.06.2019 **Revised: 11.07.2019** **Accepted: 15.07.2019**
Поступила: 27.06.2019 **Одобрена: 11.07.2019** **Принята: 15.07.2019**

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК / References

1. Дзензерский В.А., Омельяненко В.И., Васильев С.В. и др. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / под ред. В.А. Дзензерского, В.И. Омельяненко. – Киев: Нукова думка, 2001. – 479 с. [Dzenzerskii VA, Omel'yanenko VI, Vasil'ev SV, et al. *Vysokoskorostnoi magnitnyi transport s elektrodinamicheskoi levitatsiei*. Dzenzerskii VA, Omel'yanenko VI, editors. Kiev: Nukova dumka, 2001. 479 p. (In Russ.)].
2. Манашкин А.Л., Хачапуридзе Н.М. Математическое моделирование движения магнитолевитирующего экипажа с линейным синхронным двигателем и оценка уровня комфорта пассажиров // Физико-технические и технологические приложения математического моделирования: сб. научных трудов. – Киев, 1998. – С. 161–164. [Manashkin AL, Khachapuridze NM. Matematicheskoe modelirovanie dvizheniya magnitolevitiruyushchego ekipazha s lineinym sinkhronnym dvigatelem i otsenka urovnya komforta passazhirov. *Fiziko-tekhnicheskie i tekhnologicheskie prilozheniya matematicheskogo modelirovaniya: sb. nauchnykh trudov*. Kiev. 1998:161-164. (In Russ.)].
3. Дзензерский В.А., Зевин А.А., Радченко Н.А. и др. Некоторые вопросы математического моделирования левитационного движения электродинамических транспортных средств // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности: сб. научных трудов. – СПб: Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2000. – С. 65–66. [Dzenzerskii VA, Zevin AA, Radchenko NA, et al. Nekotorye voprosy matematicheskogo modelirovaniya levitatsionnogo dvizheniya elektrodinamicheskikh transportnykh sredstv. *Matematicheskoe modelirovanie v obrazovanii, nauke i promyshlennosti: sb. nauchnykh trudov*. St. Petersburg. 2000:65-66. (In Russ.)].
4. Дзензерский В.А., Радченко Н.А. Динамика транспорта на сверхпроводящих магнитах. – Днепропетровск, 2003. – 232 с. [Dzenzerskii VA, Radchenko NA *Dinamika transporta na sverkhprovodyashchikh magnitakh*. Dnepropetrovsk; 2003. 232 p. (In Russ.)].
5. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели: монография. – М.: Наука, 1988. – 328 с. [Krut'ko PD. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. Nelineinye modeli:* monografiya. Moscow: Nauka; 1988. 328 p. (In Russ.)].
6. Справочник по автоматическому управлению / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с. [Krasovskii AA, editor. *Spravochnik po avtomaticheskomu upravleniyu*. Moscow: Nauka; 1987. 712 p. (In Russ.)].
7. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гостехиздат, 1961. – 824 с. [Lur'e AI. *Analiticheskaya mekhanika*. Moscow: Gostekhizdat; 1961. 824 p. (In Russ.)].
8. Шатихин Л.Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем. – М.: Машиностроение, 1991. – 256 с. [Shatikhin LG. *Strukturnye matritsy i ikh primenenie dlya issledovaniya sistem*. Moscow: Mashinostroenie; 1991. 256 p. (In Russ.)].
9. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука, 1987. – 320 с. [Ishlinskii AYu *Klassicheskaya mekhanika i sily inertsii*. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. (In Russ.)].
10. Берёзкин Е.Н. Курс теоретической механики. – М: МГУ, 1974. – 647 с. [Berezkin EN. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki*. Moscow: MGU; 1974. 647 p. (In Russ.)].
11. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1976. – Т. ½. – 439 с. [Feinman R, Leiton R, Sends M. *Feinmanovskie lektsii po fizike*. Moscow: Mir; 1976. Vol. ½. 439 p. (In Russ.)].

Received: 27.06.2019 **Revised: 11.07.2019** **Accepted: 15.07.2019**
Поступила: 27.06.2019 **Одобрена: 11.07.2019** **Принята: 15.07.2019**

12. Галиуллин А.С. Аналитическая динамика. – М.: Высшая школа, 1989. – 264 с. [Galiullin AS. *Analiticheskaya dinamika*. Moscow: Vysshaya shkola; 1989. 264 p. (In Russ.)].
13. Bellman RE. *Adaptive Control Processes*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1961. 276 p. doi: 10.1515/9781400874668
14. Mathews M, Steeg C. Final value controller synthesis. *IRE Transactions on Automatic Control*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE); 1957;2(1):6-16. doi: 10.1109/tac.1957.1103775
15. Поляков В.А. Приспособляемость движения железнодорожного поезда // Динамика поезда и подвижного состава железных дорог. – 1990. – Вып. 273/37. – С. 107–117. [Polyakov VA. Prisposoblyaemost' dvizheniya zheleznodorozhnogo poezda. *Dinamika poezda i podvizhnogo sostava zheleznykh dorog*. 1990;37(273):107-117. (In Russ.)].
16. Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решения / под ред. И.Ф. Шиханова. – М: Статистика, 1979. – 184 с. [Shikhanov IF, editor. *Statisticheskie modeli i mnogokriterial'nye zadachi prinyatiya resheniya*. Moscow: Statistika; 1979. 184 p. (In Russ.)].
17. Кейн В.М., Смуров М.Ю. Управление самолётом на посадке в условиях неопределённости // Методы и средства навигации в УВД: сб. научных трудов. – Л.: Изд-во Академии ГА, 1980. – С. 37–45. [Kein VM, Smurov MYu. Upravlenie samoletom na posadke v usloviyakh neopredelennosti. *Metody i sredstva navigatsii v UVD: sb. nauchnykh trudov*. Leningrad: Akademii GA publ., 1980:37-45. (In Russ.)].
18. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры. – М.: ДМК Пресс, 2013. – 1264 с. [D'yakonov VP *Entsiklopediya komp'yuternoi algebry*. Moscow: DMK Press; 2013. 1264 p. (In Russ.)].
19. Муха В.С. Вычислительные методы и компьютерная алгебра. – Минск: БГУИР, 2-е изд., испр. и доп., 2010. – 148 с. [Mukha VS. *Vychislitel'nye metody i komp'yuternaya algebra*. 2nd ed. Minsk: BGUIR; 2010. 148 p. (In Russ.)].
20. Панкратьев Е.В. Элементы компьютерной алгебры. – М.: Интуит.ру, Бином. Лаборатория Знаний, 2007. – 247 с. [Pankrat'ev EV *Elementy komp'yuternoi algebry*. Moscow: Intuit.ru, Binom. Laboratoriya Znanii; 2007. 247 p. (In Russ.)].

Сведения об авторах:
Поляков Владислав Александрович, к.т.н., ст. научн. стор.;
адрес: 49005 Украина, г. Днепр, ул. Писаржевского, д. 5;
eLibrary SPIN: 5744-2789; ORCID: 0000-0002-4957-8028;
E-mail: p_v_a_725@mail.ru
Хачапуридзе Николай Михайлович, к.т.н., ст. научн. стор.;
eLibrary SPIN: 2115-4942; ORCID: 0000-0003-0682-6068;
E-mail: itst@westa-inter.com

Information about the authors:
Vladislav A. Polyakov, Ph.D. of Engineering Sciences;
address: 49005, Dnipr city, Pisarzhevskogo st., h. 5;
eLibrary SPIN: 5744-2789; ORCID: 0000-0002-4957-8028;
E-mail: p_v_a_725@mail.ru
Nicholas M. Khachapuridze: Ph.D. of Engineering Sciences;
eLibrary SPIN: 2115-4942; ORCID: 0000-0003-0682-6068;
E-mail: itst@westa-inter.com

Received: 27.06.2019 **Revised: 11.07.2019** **Accepted: 15.07.2019**
Поступила: 27.06.2019 **Одобрена: 11.07.2019** **Принята: 15.07.2019**

Цитировать:
Поляков В.А., Хачапуридзе Н.М. Резоны и рациональная методика моделирования динамики магнитолевитирующего поезда / Транспортные системы и технологии. – 2019. – Т. 5. – № 2. – С. 92–105. doi: 10.17816/transsyst20195292-105

To cite this article:
Polyakov VA, Khachapuridze NM. Reasons for and Rational Methods of Magnetically Levitated Trains Dynamic Modelling. *Transportation Systems and Technology*. 2019;5(2):92-105. doi: 10.17816/transsyst20195292-105

Received: 27.06.2019 **Revised: 11.07.2019** **Accepted: 15.07.2019**
Поступила: 27.06.2019 **Одобрена: 11.07.2019** **Принята: 15.07.2019**