УДК: 624.012.45.04

Л. Ю. Соловьев
Сибирский государственный университет путей сообщения

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МОСТОВ

Дата поступления: 30.08.2016
Решение о публикации: 01.09.2016
Дата публикации: 30.09.2016

Аннотация: **Цель исследования** – совершенствование математических подходов к оценке долговечности железобетонных конструкций. Использованный в работе метод исследования основан на известных положениях теории пластического течения с двойным изотропным упрочнением.

Результатом работы являются основные математические зависимости модели нелинейного деформирования бетона на базе теории пластического течения, и алгоритм их применения для оценки долговечности бетонных и железобетонных конструкций мостов.

При построении модели использован закон неассоциированного течения. Для описания нелинейной сжимаемости материала при трехосном напряженном состоянии, введены дополнительные поверхности нагружения и пластического потенциала.

Поверхность прочности представлена в пространстве главных напряжений в виде замкнутого объема (колпачковая модель). Поверхность нагружения строится на основе принципа подобия поверхности прочности.

Сложность полученной математической модели компенсируется возможностями расчета конструкций при непропорциональных нагружениях.

Модель может быть встроена в общую модель деформирования бетона и железобетона с трещинами, в том числе – с учетом циклических и длительных нагружений.

Практическая значимость состоит в применимости модели для прогнозирования долговечности статически неопределимых бетонных и железобетонных конструкций, имеющих повреждения в виде трещин.

Ключевые слова: Теория пластического течения, неассоциированный закон течения, нелинейное деформирование бетона, долговечность железобетонных мостов

L. Yu. Solovyov
Siberian Transport University

MODEL OF DEFORMATION OF CONCRETE BASED ON FLOW PLASTICITY THEORY FOR ANALYSIS OF DURABILITY OF PLAIN CONCRETE AND REINFORCED CONCRETE BRIDGE CONSTRACTIONS

Abstract: **The purpose of research** - perfection of mathematical approaches to an estimation of durability of reinforced concrete structures. The method of research used in work is based on known positions of theories of plasticity with nonassociated flow rule and double isotropic hardening.

Result of work are the basic mathematical dependences of nonlinear model of concrete on the basis of the nonassociated flow rule, and algorithm of their application for an estimation of durability of concrete and reinforced concrete bridge structures.

The nonassociated flow rule is used. For the description of nonlinear compressibility of a material at the three-dimension stress state, additional loading surfaces and the plastic potential, are entered.

The strength surface of durability is presented in the principle stresses space in the form of the closed volume (cap model). The loading surface is under construction as similar of a strength surface.

Complexity of the received mathematical model is compensated by opportunities of calculation of designs at nonproportionate loadings.

The model can be built in the general model of deformation of concrete and reinforced concrete with cracks, including - in view of cyclic and long term loadings.

The practical importance consists in applicability of model for forecasting durability of statically indefinable concrete and ferro-concrete designs having damages in the form of cracks.

Keywords: the nonassociated law, nonlinear deformation of concrete, durability of reinforced concrete bridges

Введение

Срок службы конструкций транспортных сооружений определяется нагрузками, изменчивостью прочностных и деформативных параметров материалов под воздействием агрессивных факторов окружающей среды, конструкционными особенностями сооружения.

Под воздействием окружающей среды меняются прочностные и деформативные характеристики бетона и арматуры, за счет разрушения бетона продуктами коррозии арматуры сокращается рабочая площадь сечения. В результате этих процессов изменяется жесткость сечений, образуются трещины в бетоне, что приводит к перераспределению усилий как между сечениями конструкции (особенно статически неопределимых), так и между бетоном и арматурой в пределах одного сечения, изменяется несущая способность сооружения в целом.

Нагружение в зонах ослаблений становится непропорциональным даже при внешне монотонно изменяющейся нагрузке. Теория пластического течения позволяет с единых позиций учитывать такой характер нагружения отдельных зон конструкций, как при монотонном возрастании, так и при повторно-переменных воздействиях внешней нагрузки [1, 2, 5]. Это позволяет эффективно моделировать перераспределение усилий в конструкциях при нелинейном численном анализе методом конечных элементов.

В настоящее время существуют предложения по установлению зависимостей между параметрами диаграммы деформирования бетона, прочностью материалов, величиной сцепления арматуры с бетоном и т.д. и временем воздействия агрессивных факторов внешней среды [13-15]. Эти зависимости после преобразований для соответствия теории пластического течения бетона могут быть использованы для оценки технического состояния эксплуатируемых транспортных сооружений и установления долговечности конструкций.

Одним из критериев долговечности сооружения является время до исчерпания несущей способности, определяемое с учетом развития деградационных процессов в материале конструкций [3, 4]. При этом, несмотря на вероятностный характер исходных данных, определение несущей способности целесообразно выполнять в детерминированной форме.

Цель

Совершенствование математических подходов к оценке долговечности железобетонных конструкций, одним из которых является разработка модели нелинейного деформирования бетона на основе пластического течения для расчетов несущей способности бетонных и железобетонных конструкций мостов с учетом изменчивости свойств материалов под воздействием факторов времени и агрессивности внешней среды.

Метод

Теоретической основой для разработки модели является теория пластического течения.

Гипотезы [6, 9]

1. Приращение полных деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}, \tag{1}$$

где $d\varepsilon_{ij}^{e}$ – приращения упругих деформаций; $d\varepsilon_{ij}^{p}$ – приращения пластических деформаций.

2. Приращение упругих напряжений:

$$d\sigma_{ij}^{e} = D_{ijkl}^{e}\, d\varepsilon_{kl}, \tag{2}$$

где D_{ijkl}^{e} – матрица упругости.

3. Вектор пластических деформаций ортогонален поверхности пластического потенциала:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{3}$$

где $d\lambda$ – пластический множитель; G (σ_{ij}, ε^{p}) – функция пластического потенциала.

4. Поверхность нагружения состоит из двух независимых поверхностей: $f_1\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) = 0$, учитывающей процессы нелинейного увеличения объема бетона при сжатии, и $f_2\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) = 0$, отражающей процесс необратимой сжимаемости материала.

Полная величина пластической деформации определяется как [8]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^{p(1)} + d\varepsilon_{ij}^{p(2)}, \tag{4}$$

где

$$d\varepsilon_{ij}^{p(1)} = d\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}; d\varepsilon_{ij}^{p(2)} = d\lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{5}$$

$d\lambda_k$, $g_k\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right)$ – пластические множители и пластические потенциалы соответствующих поверхностей нагружения.

5. Механизмы упрочнения поверхностей не зависят друг от друга [10].

Основные соотношения модели

Стадия пластического (нелинейного) деформирования определяется как [7, 11,12]:

$$d\sigma_{ij} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_0} \geq 0; d\sigma_{ij} \frac{\partial f_\beta}{\partial \sigma_0} \leq 0, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1,2. \tag{6}$$

В моделях с составными поверхностями это условие записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\, f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{kl}^p} d\varepsilon_{kl}^p = 0; \\ \mathrm{d}\, f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{kl}^p} d\varepsilon_{kl}^p = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Принимая

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e\left(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p\right), \tag{8}$$

где D_{ijkl}^e — матрица упругости,

получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} - d\lambda_1 R_{11} - d\lambda_2 R_{12} = 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} - d\lambda_1 R_{21} - d\lambda_2 R_{22} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_\beta}{\partial \sigma_{rs}} - B_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1,2. \tag{10}$$

Согласно гипотезе 5 $B_{12} = B_{21} = 0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{1}{\det \mathbf{R}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} R_{22} - \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} R_{12}\right) d\sigma_{ij}^e ; \\ d\lambda_2 &= \frac{1}{\det \mathbf{R}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} R_{11} - \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} R_{21}\right) d\sigma_{ij}^e , \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $d\sigma_{ij}^e$ вычисляются по формуле (2); $\det \mathbf{R} = R_{11}R_{22} - R_{21}R_{12}$, $B_{\alpha\alpha} = -h_\alpha \sqrt{\dfrac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{kl}} \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{kl}}}$, $\alpha = 1, 2$, h_α – эмпирические параметры упрочнения.

После ряда преобразований [1] представим выражение для матрицы D_{ijkl}^{ep} как

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^{e} - \frac{1}{\det \mathbf{R}} \sum_{\alpha=1}^{2} D_{ijmn}^{e} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{mn}} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} R_{\beta\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial \sigma_{rs}} R_{\alpha\beta}\right) D_{rskl}^{e}, \quad (12)$$

$$\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2.$$

Для симметризации матрицы (12) вводим поверхность текучести эквивалентного материала F:

$$F_\alpha\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) = g_\alpha\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) + \Phi_\alpha\left(\varepsilon_{ij}^p\right) = 0,\ \alpha = 1, 2. \quad (15)$$

где $\Phi\left(\varepsilon_{ij}^p\right)$ – корректирующая функция

Используя (15) получим, как показано в [1] окончательное выражение для симметричной матрицы запишем в виде

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^{e} - \frac{1}{\det \mathbf{R}'} \sum_{\alpha=1}^{2} D_{ijmn}^{e} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{mn}} \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} R'_{\beta\beta} - \frac{\partial g_\beta}{\partial \sigma_{rs}} R'_{\alpha\beta}\right) D_{rskl}^{e}, \quad (16)$$

$$\det \mathbf{R}' = R'_{11}R'_{22} - R'_{12}R'_{21},\ \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2.$$

В (19) обозначено:

$$\mathbf{R}' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \dfrac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} - H_{11} & \dfrac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \dfrac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \dfrac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} & \dfrac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \dfrac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} - H_{22} \end{vmatrix}; \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{11} &= \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} - \\ &- \frac{1}{d\lambda_1}\left[\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}^e - \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} d\lambda_2\right] \\ H_{22} &= \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} - \\ &- \frac{1}{d\lambda_2}\left[\frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}^e - \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^{e} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} d\lambda_1\right] \end{aligned}\right\}. \quad (18)$$

Величины пластических множителей $d\lambda_\alpha$ в (18) определяются согласно (11).

Поверхности нагружения и пластического потенциала

Будем рассматривать модель нелинейного деформирования бетона с изотропным упрочнением. Все мгновенные (промежуточные) поверхности нагружения на всех этапах нагружения сохраняют подобие друг другу и предельной поверхности (поверхности прочности).

Первую поверхность нагружения примем в виде поверхности прочности [1]:

$$f_1\left(I_1(T_\sigma), J_2(D_\sigma), J_3(D_\sigma), m_c\right) = 0, \quad (19)$$

где $I_1(T_\sigma)$ – первый инвариант тензора напряжений; $J_2(D_\sigma)$, $J_3(D_\sigma)$ – второй и третий инварианты девиатора напряжений; m_c – показатель упрочнения материала.

При m_c = 1 функция (19) определяет предельную поверхность нагружения, при $m_c = m_0$ – начальную поверхность.

Примем мгновенную поверхность нагружения в виде

$$\bar{\tau}_0^2 + a_1 \bar{J}_3(D_\sigma) + c_1 = 0, \quad (20)$$

где

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}(1-K)}{\bar{\tau}_{0c}\left(1-K+K^2\right)}; c_1 = -\frac{\bar{\tau}_{0c}^2 K^2}{1-K+K^2};$$

$\bar{\tau}_0 = \tau_0 R_b^{-1}$ – относительное октаэдрическое касательное напряжение; $\bar{J}_3 = J_3 R_b^{-3}$;

$$\bar{\tau}_{0c} = \frac{1}{6}\left\{A + \sqrt{A^2 - 48\sqrt{2}m_c(\bar{\sigma}_0 - c)}\right\}, \quad (21)$$

где

$$A = m_c\left(\sqrt{2}-4\right) - 2c\left(3\bar{\sigma}_0 + 6 + m_c\right);$$
$$c = m_c\chi\left\{4a - \left[4 + \sqrt{2}a(\chi+b)^{-1}\right](1+b)\right\}\left\{2\left[m_c\chi(1+b) + 6ma\right]\right\}^{-1};$$
$$\chi = R_{bt}R_b^{-1};\ a = m(\chi-1);\ b = m(\chi+1);\ m = 1 + 1{,}25\chi.$$

$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 R_b^{-1}$ – относительное среднее нормальное напряжение;

$$K = m\sqrt{2}\left(m\sqrt{2} - \alpha\right)^{-1}, \quad (22)$$

$\alpha = 2(2+c)\bar{\tau}_{0c}\left[4(\bar{\sigma}_0 - c) - \bar{\tau}_{0c}\right]$, m, c – переменные, описанные в (24).

Сечение второй поверхности при $\mu_\sigma = \pm 1$:

$$f_2\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) = d_0\bar{\tau}_{0c}^* + \bar{\sigma}_0 - \sigma^* = 0, \quad (23)$$

где d_0 = –0,2; σ^* – параметр, связанный с механизмом упрочнения поверхности; $\bar{\tau}_{0c}^*$ – величина, определяемая из выражения (21).

Для получения других сечений достаточно продифференцировать функции первой поверхности по множителям m_c при заданных значениях $\bar{\tau}_{0c}^*$ и σ^*.

Первая поверхность пластического потенциала $g_1 = 0$ имеет вид

$$t(2\bar{\tau}_0 - t)(1 - \bar{\sigma}_0) + \bar{\tau}_0 = 0, \quad (24)$$

где $t = \bar{\tau}_0 + \sqrt{\bar{\tau}_0^2 + \bar{\tau}_0 (1 - \bar{\sigma}_0)^{-1}}$.

Вторая (замыкающая) поверхность пластического потенциала $g_2 = 0$:

$$q\bar{\tau}_0 + p\bar{\sigma}_0 - \sigma^* = 0, \qquad (25)$$

Где $p = -1; q = 2\left[1{,}25 - 0{,}2\bar{\sigma}_0 + \sqrt{(1{,}25 + 0{,}2\bar{\sigma}_0)^2 + 0{,}8(\bar{\tau}_0 - 0{,}2\bar{\sigma}_0)}\right]^{-1}$. Параметры упрочнения для поверхностей приведены в [1, 2].

Место представленных соотношений в общей модели деформирования трехмерных (массивных) железобетонных элементов с трещинами

Основная зависимость в общей модели железобетона [1, 5] между бесконечно малыми приращениями напряжений и деформаций сохраняет общую форму (2). Поэтому для включения разработанных соотношений в общую модель достаточно вычислить характеристики бетона D_{ijkl}, как показано выше, учесть армирование и трещинообразование, как показано, например, в [5].

Подробное описание алгоритмов общей модели железобетона с учетом представленной модели приведено в [1].

Оценка долговечности железобетонных конструкций с учетом разработанной модели

Особенностью применения модели для оценки долговечности конструкций состоит в том, что достаточно в параметры функций (20) и (21) ввести коэффициенты, учитывающие изменение прочностных и деформативных свойств материала со временем – принцип подобия поверхностей сохраняется и здесь. Для учета изменения модуля упругости бетона с течением времени можно воспользоваться известными зависимостями [4].

Коррозия и другие повреждения арматуры учитываются аналогично в рамках общей модели деформирования железобетона.

Долговечность как момент исчерпания эксплуатационной пригодности по условию прочности элементов конструкции определяется последовательными расчетами несущей способности при различных значениях времени эксплуатации.

Практическая значимость

Модель базируется на методе конечных элементов, что позволяет с единых позиций уже на стадии проектирования оценивать долговечность будущего строения.

Заключение

1. Представлены основные положения модели нелинейного деформирования бетона на основе теории течения.
2. Показано место полученных выражений в общей модели деформирования трехмерных железобетонных элементов.
3. Показаны пути применения модели для оценки долговечности бетонных и железобетонных конструкций.

Библиографический список

1. Круглов В. М. Нелинейное деформирование бетона и железобетона / В. М. Круглов, Н. И. Карпенко, Л. Ю. Соловьев. – Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2001. – 276 с.
2. Соловьев Л. Ю. Нелинейная модель бетона на основе теории пластического течения // Системы. Методы. Технологии, 2014. – 4 (24). - С. 131–140.
3. Овчинников И. Г. Инженерные методы расчета конструкций, эксплуатирующихся в агрессивных средах // Учебное пособие / И. Г. Овчинников, А. И. Айнабеков, Н. В. Кудайбегов. – Алматы, РИК, 1994. – 132 с.
4. Пухонто Л. М. Долговечность железобетонных конструкций инженерных сооружений – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 424 с.
5. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. – М.: АН СССР, 1948. – 376 с.
7. Wolffersdorf P.-A. Algorithmus zur Etwicklung allgemeiner elasto-plastisher stoffgleichungen und dessen anwendung auf bodenmechanische dopped-werfestigungs-Modelle // Wiss. Z. Hochsch. Archit. Wiemar, 1985. – No. 31. – 6B. – С. 288-291.
8. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
9. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М., 1975. – 400 с.
10. Desai C. S., Hashmi Q. S. E. Analisis, evaluation and implementation of nonassociative model for geologic material // Int. J. Plast., 1984. – vol. 5. – no. 4. – pp. 397-420.
11. Dvorkin E. N., Cuitino A. M., Gioia G. A concrete material model based on nonassociated plasticity and fracture // Eng. Comput., 1989. – vol. 6. – pp. 281-294.
12. Frantziskonis G., Desai C. S. Constitutive model for nonassociative behavior // J. Eng. Mech., 1986. – vol. 112. – no. 9. – pp. 932-946.
13. Бенин А. В. Математическое моделирование процесса разрушения

сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения. / А. В. Бенин, А. С. Семенов, С. Г. Семенов, Б. Е. Мельников // Инженерно-строительный журнал, 2013. – № 5 (40). – С. 86-99.

14. Бенин А. В. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 2. Модели без учета несплошности соединения. / А. В. Бенин, А. С. Семенов, С. Г. Семенов, Б. Е. Мельников // Инженерно-строительный журнал, 2014. – № 1 (45). – С. 23-40.

15. Бенин А. В. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения и оценка ресурса элементов автодорожного моста с учетом коррозионных повреждений. / А. В. Бенин, А. С. Семенов, С. Г. Семенов, Б. Е. Мельников // Инженерно-строительный журнал, 2012. – № 7 (33). – С. 32-42.

References

1. Karpenko N. I., Kruglov V. M. & Solovyov L. Yu. Nelineinoe deformirovanie betona i zelezobetona [Non-linear Deformation of Concrete and Reinforced Concrete]. Novosibirsk, 2001, 276 p.

2. Soloviev L. Yu. *Systems. Methods. Technologies*, 2014, no. 4 (24), pp. 131–140.

3. Ovchinnikov I. G., Ainabekov A. I. & Kudaybegov N. V. Ingenernye metody rascheta konstrukcyy, ekspluatiruyuschihsa v agressivnyh sredah [Engineering methods of calculation of strucrures, maintained in excited enviroments]. Almaty, 1994, 132 p.

4. Poukhonto L. M. Dolgovechnost zelezobetonnyh konstrukcyy ingenernyh sooruzenyy [Durability of reinforced concrete structures]. Moscow, 2004, 424 p.

5. Karpenko N. I. Obschie modeli mekhaniki zhelezobetona [General models of reinforced concrete mechanics]. Moscow, 1996. 416 p.

6. Ilushin A. A. Plastichnost [The plasticity]. Moscow, 1948. 376 p.

7. Wolffersdorf P.-A. *Wiss. Z. Hochsch. Archit. Wiemar*, 1985, no. 31, 6B, pp. 288–291.

8. Ivlev D. D. & Bykovtsev G. I. Teoria uprochniaiyschegosia plasticeskogo tela [The theory of the strengthened plastic environment]. Moscow, 1971. 232 p.

9. Malinin N. N. Prikladnaia teoria plastichnosi i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, 1975. 400 p.

10. Desai C. S. & Hashmi Q. S. E. *Int. J. Plast.*, 1984, vol. 5, no. 4, pp. 397–420.

11. Dvorkin E. N., Cuitino A. M. & Gioia G. *Eng. Comput.*, 1989, vol. 6,

pp. 281–294.

12. Frantziskonis G. & Desai C. S. *J. Eng. Mech.*, 1986, vol. 112, no. 9, pp. 932–946.

13. Benin A. V., Semenov A. S., Semenov S. G. & Melnikov B. E. *Ingenerno-stroitelnyi zhurnal – Engineering-building journal*, 2013, no. 5 (40), pp. 86–99.

14. Benin A. V., Semenov A. S., Semenov S. G& Melnikov B. E. *Ingenerno-stroitelnyi zhurnal – Engineering-building journal*, 2014, no. 1 (45), pp. 23–40.

15. Benin A. V., Semenov A. S., Semenov S. G. & Melnikov B. E. *Ingenerno-stroitelnyi zhurnal – Engineering-building journal*, 2012, no. 7 (33), pp. 32–42.

Сведения об авторе:

СОЛОВЬЕВ Леонид Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Мосты» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Сибирский государственный университет путей сообщения» (ФГБОУ ВПО СГУПС)

E-mail: lys111@yandex.ru

Information about author:

Leonid Yu. SOLOVYOV – candidate of technical sciences (PhD in engineering), associated professor of Siberian State Transport University

E-mail: lys111@yandex.ru