УДК 538.31.001.2

К. Э. Воеводский[1], В. М. Стрепетов[2]
[1]Санкт-Петербургский государственный университет
[2]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

МЕТОД УСЛОВНОЙ ГРАНИЦЫ

Дата поступления 28.07.2016
Решение о публикации 01.09.2016
Дата публикации 30.09.2016

Аннотация: **Цель** работы состоит в том, чтобы предложить новый подход к расчету электромагнитного поля, которое возбуждается вихревыми токами, индуцированными в проводящей среде под воздействием внешнего источника магнитного поля. В работе принято квазистационарное приближение, то есть, не учитываются токи смещения.

Метод. Главная особенность метода – введение так называемых *условных границ*. Такое название дано мысленным поверхностям, которые можно провести в области, свободной от проводящей среды. Форма условной границы произвольна и диктуется соображениями удобства расчетов. Принимается соглашение, что на условной границе выполняются такие же граничные условия, как на границе проводник-вакуум.

В работе доказано, что такое изменение задачи приводит к изменению ее решения только вне проводника и только в части электрического поля. Вектор магнитной индукции во всем пространстве, а также вектор напряженности электрического поля в проводящей среде изменению не подвергаются.

В то же время, удачный выбор *условных границ* в ряде случаев позволяет упростить задачу с расчетной точки зрения.

Помимо введения условных границ, предлагаются также некоторые формальные преобразования основных соотношений, описывающих квазистационарное электромагнитное поле. Эти преобразования преследуют ту же цель облегчения расчетов.

Результат. Получена новая формулировка задачи расчета квазистационарного электромагнитного поля в виде системы дифференциальных уравнений и граничных условий, включающей как известные соотношения, так и вновь полученные. Новая формулировка равносильна традиционной (с описанной выше оговоркой). Вместе с тем она обладает некоторыми преимуществами с точки зрения удобства расчетов.

Практическая значимость. В практике конкретных расчетов разработанный метод будет полезен, в частности, в тех случаях, когда форма проводника близка к некоторой «простой» форме.

Ключевые слова: условная граница, электромагнитное поле, вихревые токи, проводящая среда, граничные условия, гармоническая функция, краевая задача, потенциал простого слоя, обобщенная функция, сингулярность, квазистационарное приближение.

Konstantin E. Voevodskii, Vladimir M. Strepetov
St. Petersburg State University
Emperor Alexander I Petersburg State Transport University
THE METHOD OF CONDITIONAL BOUNDARY

Abstract: **The goal** of this work is to propose a new approach to the calculation of electromagnetic field that excited by the eddy current induced in the conductive environment the influence of an external magnetic field source. The quasistationary approximation accepted, that is, the bias currents do not take into account.

Method. The main feature of the method is the introduction of so-called *conditional boundary*. This name is given for mental surfaces, which can be done in the area, free of conductive environment. Boundary form is arbitrary and dictated by considerations of calculations convenience. The agreement that the same boundary conditions, like on the conductor-vacuum boundary are performed.

We prove that this task change leads to a change in its decisions only outside of the conductor and the only for part of the electric field. Magnetic induction vector throughout the space, as well as electric field tension vector in the conductive environment do not change.

At the same time, a good choice *of conditional boundary* in some cases allows to simplify the task with calculation point of view.

In addition to the conditional boundaries introduction, some formal basic conversion ratios are proposed, describing quasistationary electromagnetic field. These changes had the same goal to simplify calculations.

The result. The new formulation of task of quasistationary electromagnetic field calculation is received in the form of differential equations system and boundary conditions, including both known ratio and the newly received. The new formulation is equivalent to traditional (with the above proviso). However, it has some advantages in terms of ease of calculation.

The practical significance. In practice of specific calculations the method would be useful, particularly in cases when the form guide is close to some "simple" form.

Keywords: conditional boundary, electromagnetic field, eddy current, conductive environment, boundary conditions, harmonic function, boundary value problem, a simple layer potential, generalized functions, singularity, quasistationary approximation.

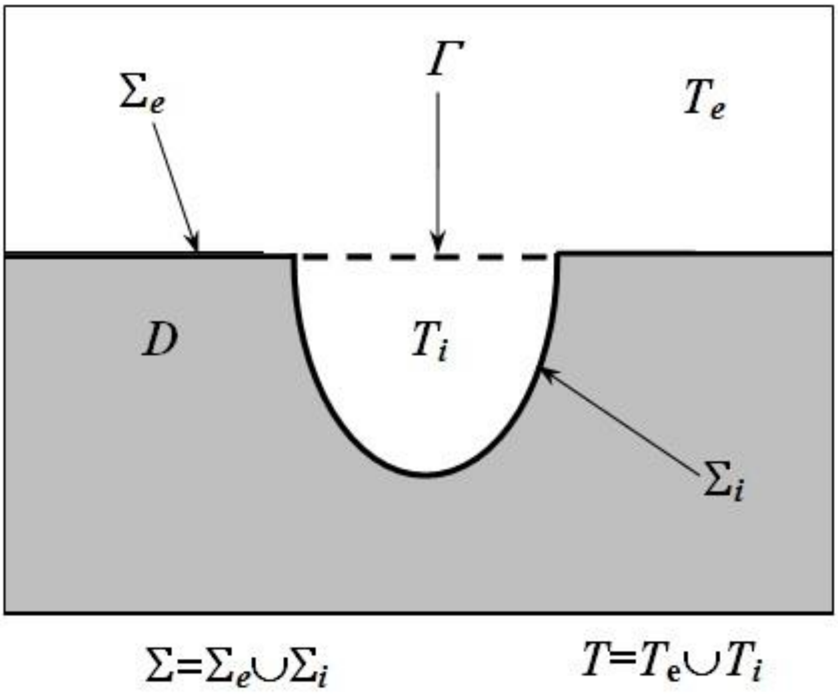
Введение

В последнее время резко возрос интерес к разработке и внедрению транспортных систем с использованием MAGLEV-технологий не только применительно к пассажирским, но и грузовым перевозкам [1-6]. В связи с чем является важной задача по совершенствованию методов электродинамических расчетов в подобных системах, включая и аналитические методы.

В данной работе рассматривается задача расчета квазистационарного электромагнитного поля, которое возникает в проводнике и в окружающем пространстве под действием расположенных вне проводника первичных источников – токов, изменяющихся во времени и движущихся в пространстве. Предлагается некоторая трансформация этой задачи, которая, с одной стороны, сохраняет все существенные результаты, с другой, облегчает расчеты для ряда случаев, представляющих практический интерес.

1. Исходная постановка задачи

Пусть *D* – область, занятая проводящей средой, вообще говоря, неоднородной (на рисунке, иллюстрирующем условные обозначения, область *D* закрашена), *T* – свободное пространство, Σ – их граница. Среда считается немагнитной, то есть, всюду $\mu = 1$; первичные источники расположены в свободном пространстве *T*.



К выбору обозначений

Выпишем известные соотношения, образующие исходную постановку задачи в ее *квазистационарном* приближении [7-8].

1.1) В области *D* выполняются уравнения:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \sigma \boldsymbol{E}\,, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t\,, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{1.3}$$

1.2) В области *T* выполняются уравнения (1.2) и (1.3), а также:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}\,, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0\,. \tag{1.5}$$

1.3) На границе Σ выполняются условия контакта:

$$[\boldsymbol{B}] = 0\,, \tag{1.6}$$

$$[E_t] = 0\,. \tag{1.7}$$

Здесь использованы следующие общепринятые обозначения:

σ – удельная проводимость (вообще говоря, зависит от координат);

$\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ – векторы магнитной индукции и напряженности электрического поля (зависят от координат и времени);

$\boldsymbol{j}$ – заданная плотность токов (первичный источник поля, зависит от координат и времени);

В условиях контакта квадратные скобки обозначают скачок на границе,

нижние индексы t и n – тангенциальные и нормальные компоненты вектора.

Чтобы сообщить задаче единственность, к этим соотношениям нужно добавить те или иные условия на бесконечности. Здесь они явно не выписаны и не конкретизированы, так как в дальнейшем не будут подвергаться изменению, и их конкретный вид роли не играет.

2. Введение условной границы

Проведем в свободной области T *мысленную* границу Γ, которая отделит от области T некоторую ее часть T_i. К этой выделенной области T_i предъявляется единственное требование: в ней $\boldsymbol{j} = 0$, иначе говоря, в области T_i нет источников. Тем самым, область T разбилась на части T_i и T_e, граница Σ (проводник-вакуум) – на части Σ_e (между T_e и D) и Σ_i (между T_i и D) – смотри рисунок. Поверхность Γ – и есть та *условная граница*, которая дала название методу.

Будем рассматривать уравнения (1.4)-(1.5), справедливые для всей области T, как действующие отдельно в областях T_i и в T_e (заметим, при этом, что в области T_i уравнение (1.4) принимает вид $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = 0$). Чтобы такая постановка была равносильна исходной, достаточно [9] потребовать, чтобы на границе Γ все компоненты векторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ были непрерывны.

Назовем задачу в такой постановке ЗАДАЧЕЙ I и перейдем к формулированию новой ЗАДАЧИ II.

Заменим непрерывность нормальной компоненты $\boldsymbol{E}$ на границе Γ условием

$$E_n^i = 0, \tag{2.1}$$

где индекс i обозначает предельное значение на границе Γ изнутри области T_i. При этом сохраним непрерывность остальных компонент $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ на границе Γ. Таким образом, на границе Γ выполнены условия (1.6), (1.7) и (2.1).

Выясним, как изменится вследствие этого решение задачи (то есть, векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$). Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Пусть $\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ – решение ЗАДАЧИ I, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ – решение ЗАДАЧИ II.Тогда

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}, \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ в области *D*, (2.3)

$\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{I}} + \mathbf{grad}\ \varphi_e$, где $\Delta\varphi_e = 0$ в области T_e, (2.4)

$\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{I}} + \mathbf{grad}\ \varphi_i$, где $\Delta\varphi_i = 0$ в области T_i, (2.5)

Доказательство.

1. Пусть $\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ – решение ЗАДАЧИ I. Построим $\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ согласно (2.2)-(2.5), где φ_i, и φ_e – гармонические функции [10], в областях T_i и T_e, удовлетворяющие на границах этих областей следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = -E_n^{\mathrm{I}} \text{ на границе } \Gamma, \qquad (2.6)$$

$$\varphi_i = 0 \text{ на границе } \Sigma_i, \qquad (2.7)$$

$$\varphi_e = \varphi_i \text{ на границе } \Gamma, \qquad 2.8)$$

$$\varphi_e = 0 \text{ на границе } \Sigma_e. \qquad (2.9)$$

Докажем, что построенные так $\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ суть решение ЗАДАЧИ II.

В силу равенств (2.2), (2.3) для $\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ выполняются все уравнения в области *D* и все уравнения и граничные условия, в которых присутствует только $\boldsymbol{B}$.

Поскольку $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ и $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ отличаются градиентным слагаемым, уравнение (1.2) выполняется в силу того, что ротор градиента равен нулю, а уравнение(1.5) – в силу того, что $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,\varphi_{e,i} = \Delta\varphi_{e,i} = 0$ [11].

Остается проверить выполнение:

– условий (2.1) и (1.7) на границе *Г*,

– условий (1.7) на границах Σ_i и Σ_e.

1) *Условия на границеГ*

Согласно уравнению (2.5), предельное значение E_n^{II}, со стороны области T_i равно $E_n^{\mathrm{I}} + \partial\varphi_i/\partial n$. Но, как видно, из выражения (2.6), $E_n^{\mathrm{I}} + \partial\varphi_i/\partial n = E_n^{\mathrm{I}} - E_n^{\mathrm{I}} = 0$. Тем самым условие (2.1) выполнено.

Займемся условиями (1.7). Вычислим скачок E_t^{II} (индекс *t* обозначает произвольное тангенциальное направление). Согласно равенств (2.4), (2.5), $\left[E_t^{\mathrm{II}}\right] = \left[E_t^{\mathrm{I}}\right] + \left(\partial\varphi_e/\partial t - \partial\varphi_i/\partial t\right)$. Первое слагаемое равно нулю, так как для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ имеет место (1.7), второе – в силу условия (2.8). Тем самым $\left[E_t^{\mathrm{II}}\right] = 0$, то есть, условие (1.7) выполнено и для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$.

2) *Условия на границе* Σ_i

Согласно (2.3), (2.5), $\left[E_t^{\mathrm{II}}\right] = \left[E_t^{\mathrm{I}}\right] + \partial\varphi_i/\partial t$. Первое слагаемое равно 0, так как для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ имеет место условие (1.7), а $\partial\varphi_i/\partial t = 0$ в силу (2.7). Тем самым, (1.7) выполнено и для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$.

3) Аналогично из (2.4), (2.5), условия (1.7) для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ и краевого условия (2.9) выводится (1.7) для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ на границе Σ_e.

Итак, для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ выполнены все соотношения ЗАДАЧИ II.

2. Пусть $\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ – решение ЗАДАЧИ II, построим решение ЗАДАЧИ I.

Пусть ψ – потенциал, создаваемый в области T простым слоем, распределенным на границе Γ с плотностью – $E_n^{\mathrm{II}^e}$ (нормальная компонента с внешней стороны) [12]. Как известно [13], ψ – гармоническая функция в областях T_e и T_i, а на их границе Γ

$$[\partial\psi/\partial n] = -E_n^{\mathrm{II}^e}. \tag{2.10}$$

Пусть u – гармоническая функция в области T, удовлетворяющая на границе Σ граничному условию

$$u = -\psi \tag{2.11}$$

Определим $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ в областях T_e и T_i следующим образом:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{II}} + \mathbf{grad}\,\psi + \mathbf{grad}\,u. \tag{2.12}$$

Проверим выполнение требований ЗАДАЧИ I.

Как и выше, автоматически выполняются все уравнения в области D, и все соотношения, не содержащие $\boldsymbol{E}$. Далее, уравнения, содержащие $\boldsymbol{E}$, также выполняются, так как для этого достаточно, чтобы $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ и $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ отличались градиентным слагаемым [11], а это имеет место в силу (2.12). Тем самым, остается проверить, что для $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ выполняются:

– условия непрерывности всех компонент на границе Γ,

– условия (1.7) на границах Σ_i и Σ_e.

1) *Условия на границе Γ*

Изучим три слагаемых в (2.12) с точки зрения непрерывности тангенциальных компонент на границе Γ. У $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ они непрерывны, так как $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ – решение ЗАДАЧИ II, у $\mathbf{grad}\,\psi$ – в силу непрерывности потенциала простого слоя [13], у $\mathbf{grad}\,u$ – поскольку в окрестности границы Γ функция u – гармоническая. Тем самым, на границе Γ тангенциальные компоненты $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ непрерывны.

Займемся нормальными компонентами на границе Γ. Нормальная компонента $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}}$ имеет скачок $E_n^{\mathrm{II}^e} - E_n^{\mathrm{II}^i}$. Но в силу (2.1), $E_n^{\mathrm{II}^i} = 0$, значит, скачок равен $E_n^{\mathrm{II}^e}$. Нормальная компонента $\mathbf{grad}\,\psi$ это $\partial\psi/\partial n$. Согласно (2.10), ее скачок равен $-E_n^{\mathrm{II}^e}$. Нормальная компонента $\mathbf{grad}\,u$ непрерывна, так как в окрестности границы Γ функция u – гармоническая. Таким образом, скачок нормальной компоненты $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ на границе Γ равен $E_n^{\mathrm{II}^e} - E_n^{\mathrm{II}^e} + 0 = 0$.

Итак, на границе Γ все компоненты $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ непрерывны.

2) *Условия на границах* Σ_i и Σ_e

С внешней стороны $E_t^{\mathrm{I}} = E_t^{\mathrm{II}} + \partial\psi/\partial t + \partial u/\partial t$. Но $\partial\psi/\partial t + \partial u/\partial t = 0$ в силу (2.11). Значит, $E_t^{\mathrm{I}} = E_t^{\mathrm{II}}$. С внутренней стороны это равенство также выполняется (см. (2.3)). Значит, $\left[E_t^{\mathrm{I}}\right] = \left[E_t^{\mathrm{I}}\right] = 0$. Условие (1.7) выполнено.

3. «Стирание» Σ_i – внутренней части реальной границы

Дальнейшая трансформация задачи является равносильной, то есть, не приводит к изменению ее решения.

Доопределим функцию σ нулем в области T_i. Тогда уравнения (1.1) для области D и $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = 0$ для области T_i можно заменить одним уравнением (1.1) для объединенной области $T_i \cup D$.

Вычислим дивергенцию от обеих частей (1.1). Поскольку дивергенция ротора равна 0 [11], получим, что $\mathrm{div}(\sigma\boldsymbol{E}) = 0$. Или, что то же самое, $\sigma\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\cdot\mathbf{grad}\,\sigma = 0$. Разделив обе части на σ, получим: $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{p} = (\mathbf{grad}\sigma/\sigma)$. Будем считать, что в области T_i вектор $\boldsymbol{p}$ равен 0. Тогда уравнение

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}\,. \tag{3.1}$$

будет справедливо в объединенной области $T_i \cup D$, причем в T_i оно заменит собою (1.5), а в D будет следствием (1.1).

Итак, в объединенной области $T_i \cup D$, выполнена система уравнений: (1.1)-(1.3), (3.1). Докажем, что условия контакта (1.6), (1.7) на границе Σ_i также вытекают из этой системы, если считать, что она имеет силу для всей объединенной области $T_i \cup D$, включая границу Σ_i. При этом дифференцирование разрывных функций следует понимать в смысле *обобщенных* функций [14].

Введем в некоторой точке границы Σ_i локальную систему координат, направив ось z по нормали от D к T_i считая при этом, что на границе $z = 0$.

Запишем в этих координатах уравнение (1.3)

$$\partial B_z/\partial z + \partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y = 0\,.$$

Все три компоненты $\boldsymbol{B}$ имеют, вообще говоря, скачок при $z = 0$. Следовательно, производная по z будет иметь *сингулярное* слагаемое $[B_z]\delta(z)$, а продольные производные не будут содержать сингулярности (здесь через $\delta(z)$ обозначена дельта-функция Дирака) [15]. Таким образом, из (1.3) имеем: $[B_z]\delta(z) + ... = 0$, где многоточием обозначена обычная функция (то есть, не имеющая сингулярностей) [15]. Отсюда следует, что $[B_z] = 0$. Тем самым, на границе Σ_i нормальная компонента $\boldsymbol{B}$ непрерывна.

Перейдем к уравнению (1.1). Его правая часть не содержит производных, значит, это обычная функция. Выделим *сингулярную* составляющую левой части. В координатной записи выражения $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ производную по нормали содержат только два слагаемых, а именно:

$$(\partial B_x/\partial z)\boldsymbol{e}_y - (\partial B_y/\partial z)\boldsymbol{e}_x.$$

Сингулярная составляющая этого выражения равна $([B_x]\boldsymbol{e}_y - [B_x]\boldsymbol{e}_x)\delta(z)$ [15]. Приравнивая это выражение к 0, получим условие непрерывности тангенциальных компонент $\boldsymbol{B}$. Вместе с полученной ранее непрерывностью нормальной компоненты это дает условие (1.6) на границе Σ_i.

Совершенно аналогичное рассмотрение уравнения (1.2) дает условие (1.7) – непрерывность на границе Σ_i тангенциальных компонент $\boldsymbol{E}$.

4. Унификация условий на внешней части реальной границы (Σ_e) и условной границе (Γ)

На обеих этих границах выполнены условия непрерывности вектора $\boldsymbol{B}$ (1.6) и тангенциальных компонент $\boldsymbol{E}$ (1.7), а на границе Γ – еще и условие (2.1). Как известно [7], для границы проводник-вакуум, каковой является граница Σ_e, условие (2.1) является следствием (1.6), (1.7) и уравнений для $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ по разные стороны границы (в предположении, что на границе внутреннее предельное значение проводимости отлично от нуля). Физически же условие (2.1) выражает тот факт, что вихревые токи не протекают сквозь границу. Таким образом, можно считать, что на всей объединенной границе $\Sigma_e \cup \Gamma$ выполнены условия (1.6), (1.7) и (2.1). (На рисунке, помещенном в разделе 1 статьи эта граница имеет вид плоскости).

5. Итоговая формулировка

В итоге мы пришли к задаче, включающей следующие уравнения и граничные условия.

5.1) В объединенной области $T_i \cup D$ (на рисунке она имеет вид нижнего полупространства) выполнена система уравнений:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\sigma\boldsymbol{E},\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t,\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0,\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{E}. \quad (5.1)$$

5.2) В области T_e (на том же рисунке – верхнее полупространство) – система уравнений

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{j},\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t,\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0,\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0. \quad (5.2)$$

5.3) На границе этих областей $\Sigma_e \cup \Gamma$ – условия

$$[\boldsymbol{B}] = 0,\ [E_t] = 0,\ E_n^i = 0. \quad (5.3)$$

Здесь:

$\boldsymbol{j}$ – заданная функция координат и времени (распределение плотности тока в первичном источнике поля),

σ – заданная функция координат (удельная проводимость, которая может принимать и нулевые значения),

$\boldsymbol{p} = (\mathbf{grad}\sigma / \sigma)$, причем в области, где $\sigma = 0$, $\boldsymbol{p}$ принимается равным нулю.

6. Физическая интерпретация

Вернемся к исходной задаче и поместим в область T_i однородную проводящую «вставку» с удельной проводимостью $\sigma_0 > 0$. Тогда вся объединенная область $T_i \cup D$ будет заполнена проводником, и вся ее граница $\Sigma_e \cup \Gamma$ станет реальной границей раздела проводник-вакуум. Поэтому в области $T_i \cup D$ будут выполняться уравнения для проводящей среды, причем их можно будет записать в виде (5.1). В области T_e будут выполнены уравнения для вакуума (5.2), а на границе этих областей $\Sigma_e \cup \Gamma$– граничные условия (5.3), в том числе условие $E_n^i = 0$.

Устремим теперь σ_0 к нулю. В пределе все соотношения примут тот вид, который отвечает случаю $\sigma_0 = 0$ (то есть, когда проводящей вставки, изначально нет). Исключение составляет поведение нормальной компоненты $\boldsymbol{E}$ на границе Γ. Если $\sigma_0 = 0$, то граница Γ не является границей раздела, поэтому на ней нормальная компонента $\boldsymbol{E}$ непрерывна. Однако при любом сколько угодно малом σ_0, отличном от 0, Γ есть граница раздела проводник-вакуум, поэтому на ней выполняется условие $E_n^i = 0$. Очевидно, это условие сохранится и в пределе при $\sigma_0 \to 0$.

Таким образом, задача (5.1)-(5.3), отвечает той ситуации, когда область T_i заполнена плохим проводником. Наличие проводимости (пусть и слабой) обеспечивает условие $E_n^i = 0$, однако вихревые токи, индуцированные в T_i, не оказывают заметного влияния на результирующие поля.

Заключение

Новая формулировка задачи позволяет найти верные значения магнитного вектора во всем пространстве и электрического вектора в проводящей среде. Этого достаточно для отыскания всех характеристик системы, представляющих окончательный интерес, таких как силы взаимодействия первичного источника с вихревыми токами, тепловыделения в проводящей среде и т.п.

Польза перехода к новой формулировке связана с возможностью в ряде случаев «исправить» сложную форму проводящей области. Этого удается достичь, когда реальная форма в том или ином смысле близка к некоторой простой. Примерами могут служить проводники простой формы (скажем, плоской), содержащие изъяны, шероховатости, стыки и т.п.

Библиографический список

1. Антонов Ю. Ф. Магнитолевитационная транспортная технология / Ю. Ф. Антонов, А. А. Зайцев; под ред. В. П. Гапановича. – ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 476 с. – ISBN 978-5-9221-1540-7.

2. Зайцев А. А. Транспорт на магнитном подвесе /А. А. Зайцев, Г. Н. Талашкин, Я. В. Соколова. Под ред. А. А. Зайцева. – СПб: ПГУПС, 2010. – 160 с. – ISBN 978-5-7641-0262-7.

3. Зайцев А. А. Контейнерный мост Санкт-Петербург – Москва на основе левитации / А. А. Зайцев, Ю. Ф. Антонов // Магнитолевитационные транспортные системы и технологии. МТСТ-14: Труды 2-ой Международной научной конференции. Санкт-Петербург, 17-20 июня 2014 года; под ред. проф. Ю. Ф. Антонова, Киров: МЦНИП, 2014. – С. 11-23. – ISBN 978-5-00090-036-9.

4. Хожаинов А. И. Энергосберегающие преобразователи электроприводов магнитолевитационных транспортных систем / А. И. Хожаинов, В. В. Никитин, Е. Г. Середа // Магнитолевитационные транспортные системы и технологии. МТСТ’14: Труды 2-ой Международной научной конференции. Санкт-Петербург, 17-20 июня 2014 года; под ред. проф. Ю. Ф. Антонова, Киров: МЦНИП, 2014. – С. 313-322. – ISBN 978-5-00090-036-9.

5. Никитин В. В. Варианты схем электроснабжения транспортного средства с комбинированной системой левитации и тяги на переменном токе/ В. В. Никитин, В. М. Стрепетов, А. С. Волювач // Известия высших учебных заведений «Проблемы энергетики», 2010. – №3-4. – С.54-62.

6. Антонов Ю. Ф. Технология HSST в проектах LINIMO и ROTEM / Ю. Ф. Антонов, В. В. Никитин, А. И. Хожаинов // Магнитолевитационные транспортные системы и технологии. МТСТ-13: Труды 1-ой Международной научной конференции. Санкт-Петербург, 29-31 октября 2013 года. ; под ред. проф. Ю. Ф. Антонова, СПб: ООО PUDRA, 2013. – С. 133-137. – ISBN 978-5-85263-125-1.

7. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., испр. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – М.: изд-во Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 621 с. (т. VIII).

8. Voevodskii K. E. and Kochetkov V. M. Theory of superconducting magnet suspension: main results, survey // Cryogenics, 1981. – №12. – pp. 719-728.

9. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.

10. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М.: изд-во Наука, 1977. – 735 с.

11. Анчиков А. М. Основы векторного и тензорного анализа. – М.: изд-во Наука, 1988. – 140 с.

12. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 416 с.

13. Бабич В. М. Линейные уравнения математической физики / В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин, Г. И. Натансон, П. М. Риз, Л. Н. Слободецкий, М. М. Смирнов. Под ред. С. Г. Михлина; под общей ред. Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского. – М.: изд-во Наука, 1964. – 368 с.

14. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: изд-во Наука, 1965. – 328 с.

15. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М: Физматгиз, 1959. – 470 с.

References

1. Antonov Y. F. & Zaitsev A. A. Magnitolevitatcionnaia transportnaia tehnologiia [Magnetic Levitation Transport Technology]. Moscow, 2014. – 476 p.

2. Zaitcev A. A., Talashkin G. N. and Sokolova Ya. V. Transport na magnitnom podvese [Transport on Magnetic Suspension]. St. Petersburg, 2010. 160 p.

3. Zaitcev A. A. Konteinernyi most Sankt-Petersburg – Moskva na osnove levitatcii [Container bridge St. Petersburg – Moscow on the basis levitation] *Magnitolevitatcionnye transportnye systemy i tekhnologii: trudy II mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Proc. 2nd Int. Conf. "Magnetic Levitation Transport Systems and Technologies"). St. Petersburg, 2014, pp. 11–23.

4. Khozhainov A. I., Nikitin V. V. & Sereda E. G. Energosberegaiushchie preobrazovateli ekektroprivodov magnitolevitatcionnych transportnykh sistem. [Energy-efficient converters electric drives of maglev transport system] *Magnitolevitatcionnye transportnye systemy i tekhnologii: trudy II mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Proc. 2nd Int. Scientific Conf. "Magnetic Levitation Transport Systems and Technologies"). St. Petersburg, 2014, pp. 313–322.

5. Nikitin V. V., Strepetov V. M. & Voliuvach A. S. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii Problemy energetiki – High School News "Problems of Energy"*, 2010. No 3–4, pp. 54–62.

6. Antonov IU. F., Nikitin V. V. & Khozhainov A. I. Tekhnologiia HSST v proektakh LINIMO i ROTEM [Technology HSST in projects LINIMO und ROTEM] *Magnitolevitatcionnye transportnye sistemy i tekhnologii: trudy I Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentcii* (Proc. 1st Int. Scientific Conf. "Magnetic Levitation Transport Systems and Technologies"). St. Petersburg, 2013. pp. 133–137.

7. Landau L. D. Teoreticheskaya fizika. Elektrodinamika sploshnyh sred [Theoretical Physics. Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, 1982. 621 p.

8. Voevodskii K. E. & Kochetkov V. M. *Cryogenics*, 1981, no 12, pp. 719–728.

9. Tamm I. E. Osnovy teorii elektrichestva [Basics of the Theory of Electricity]. Moscow, 2003. 616 p.

10. Tihonov A. N. & Samarski A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, 1977. 735 p.

11. Anchikov A. M. Osnovy vektornogo i tenzornogo analiza [Basics of Vector and Tensor Analysis] Moscow, 1988. 140 p.

12. Giunter N. M. Teoriya potenciala i ee primenenie k osnovnym zadacham matematicheskoi fiziki [Potential Theory and its Application to the Basic Problems of Mathematical Physics]. Moscow, 1953. 416 p.

13. Babich V. M., Kapilevich M. B., Mihlin S. G., Natanson G. I., Riz P. M, Slobodeckii L. N. & Smirnov M. M. Lineinye uravneniya matematicheskoi fiziki [Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, 1964. 368 p.

14. Shilov G. E. Matematicheskii analiz [Mathematical Analysis]. Moscow, 1965. 328 p.

15. Gel'fand I. M. & Shilov G. E. Obobshennye funkcii I deistviya nad nimi [Generalized Functions and Operations with Them]. Moscow, 1959. 470 p.

Сведения об авторах:

ВОЕВОДСКИЙ Константин Эммануилович, кандидат технических наук, доцент кафедры Высшей геометрии Санкт-Петербургского государственного университета
E-mail: kv5832@mail.ru
СТРЕПЕТОВ Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры "Электромеханические комплексы и системы" Петербургского государственного университета путей сообщение Императора Александра I
E-mail: strepetov.vm@mail.ru

Information about authors:

Konstantin E. VOEVODSKII, Ph.D., assistant professor of department High geometry, at St. Petersburg State University
E-mail: kv5832@mail.ru
Vladimir M. STREPETOV, Ph.D., assistant professor of department "Electromechanical complexes and systems" Emperor Alexander I Petersburg State Transport University
E-mail: strepetov.vm@mail.ru