

УДК 629.01

Г. Е. Серeda, В. М. Стрепетов

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДУКТИВНОСТИ ЭКИПАЖНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТА МАГНИТОЛЕВИТАЦИОННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ

Дата поступления 11.07.2017

Решение о публикации 17.07.2017

**Цель.** Получить новые аналитические выражения для определения индуктивности экипажных электромагнитов транспортных левитационных систем.

**Методы.** Главная особенность расчетной модели бортовых катушек по определению их индуктивности на примере электромагнитов прямоугольной формы – допущение о малой величине высоты по сравнению с другими геометрическими размерами. Принято также допущение, что толщина скин-слоя проводника существенно превосходит поперечный размер провода, составляющего катушку. Рассматривается одновитковая катушка, индуктивность реального электромагнита принимается пропорциональной квадрату числа витков. При расчете индуктивности используются безразмерные величины. В качестве нормировки выбрана четверть периметра катушки по средней линии. Условием получения приближенной формулы расчета индуктивности плоской прямоугольной катушки является меньшая толщина обмотки по сравнению с геометрическими размерами катушки.

**Результаты.** Получено точное аналитическое выражение для величины индуктивности «тонкого» источника магнитного поля прямоугольной формы в виде алгебраической суммы элементарных функций. Результаты численного анализа показывают зависимость относительной индуктивности плоской катушки прямоугольной формы от отношения толщины к ее минимальному размеру. Исследовано влияние «вытянутости» катушки (отношения длины к ширине). Отмечено, что индуктивность уменьшается с уменьшением «вытянутости», а также с увеличением отношения толщины к минимальному размеру.

**Практическая значимость.** Получено приближенное выражение для вычисления значения индуктивности, погрешность которого не превышает 14 % в области изменений всех геометрических параметров электромагнита. Установлены границы практического применения полученных аналитических выражений при принятых допущениях. Выведенные выражения относительно просты по структуре и легко программируются.

Индуктивность бортовых электромагнитов, плоская катушка, скин-слой, численный анализ.

### Введение

Использование инновационных технологий как в пассажирских, так и в грузовых транспортных перевозках на основе магнитолевитационных транспортных систем способствует повышению их экономичности и экологичности [1–3].

Одним из вариантов магнитного подвешивания является комбинированная система левитации и тяги на однофазном переменном токе. В таком случае питание электромагнитов производится от статических преобразователей частоты. Допустимые значения напряжения ограничиваются параметрами используемых силовых полупроводниковых приборов (СП). У современных СП допустимое напряжение составляет 5000 В [4–6].

Величина требуемого напряжения на электромагнитах пропорциональна их индуктивности. При этом точность установления индуктивности во многом определяет достоверность результатов исследований электромеханических систем.

Расчет индуктивности проводящих систем – как правило, технически сложная процедура, связанная с громоздкими вычислениями даже для самых простых форм электромагнитов.

Множество справочников по вычислению указанных величин (см., например, библиографию в [7–9]) содержит в основном наборы приближенных формул, у которых точность и зоны их применимости указаны далеко не всегда.

Данная статья посвящена установлению величины индуктивности  $L$  для катушек определенной конфигурации, у которых величина «высоты» электромагнита пренебрежимо мала по сравнению с другими геометрическими размерами катушки. Такие электромагниты будем называть бесконечно тонкими (плоскими) источниками магнитного поля.

Следует заметить, что величина индуктивности существенно зависит от частоты протекающего по катушке тока. Будем предполагать, что ток  $I$ , определяющий магнитное поле системы, слабо меняется, т. е. величина скин-слоя проводника значительно превосходит поперечный размер провода, составляющего катушку.

### Методология расчета

Общая формула для определения индуктивности плоского источника магнитного поля  $L_T$  задается соотношением [7]

$$L_T = \frac{\mu_0 W^2}{4\pi I^2} \int_S d\mathbf{p} \int_{S'} d\mathbf{p}' (i, i') / |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|, \quad (1)$$

где  $d\mathbf{p} = dx dy$ ,  $d\mathbf{p}' = dx' dy'$ ;

$$|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2;$$

$(x, y)$  и  $(x', y')$  – подходящие декартовы координаты;

$i$  и  $i'$  – линейные плотности тока;

$S \equiv S'$  – токонесущая поверхность катушки;

$W$  – число витков катушки;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная вакуума.

Рассмотрим одновитковую катушку ( $W = 1$ ), индуктивность реального электромагнита пропорциональна квадрату числа витков. В качестве источника магнитного поля рассмотрим электромагнит прямоугольной формы (рис. 1).

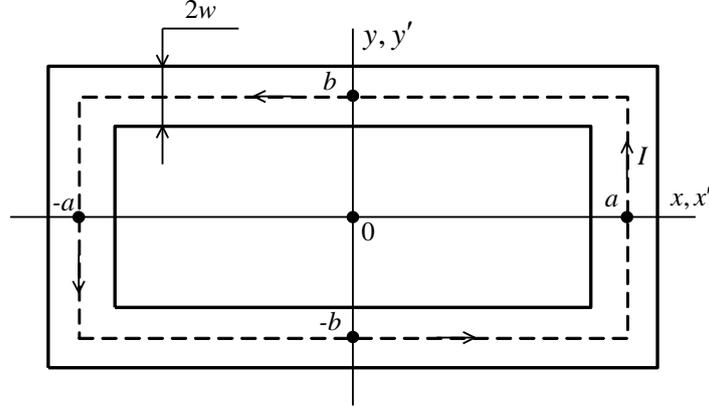


Рис. 1. Расчетная схема экипажного электромагнита

Отметим, что на геометрические параметры данного плоского электромагнита накладываем естественное ограничение:  $0 < w \leq \min(a, b)$ .

Для рассматриваемой конфигурации источника магнитного поля модуль линейной плотности тока определяется равенством  $i = i' = I/2w$ . Переходя в (1) к безразмерным координатам и совершая там же первичное двукратное интегрирование, можно получить следующее выражение для индуктивности плоской катушки прямоугольной формы  $L$ :

$$L = \frac{2\mu_0 P}{\pi} (L(\alpha) + L(\beta) - M(\alpha, \beta) - M(0, 0)), \quad (2)$$

где

$$L(v) = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} du \int_{-\delta+|u|+v}^{\delta-|u|+v} dv T(u, v), \quad v = \alpha, \beta; \quad (3)$$

$$M(\alpha, \beta) = \int_{-\delta}^{\delta} du (\delta - |u|) T(u + \alpha, u + \beta); \quad (4)$$

$$2\delta^2 T(u, v) = uln \frac{m+u}{m-u} + vln \frac{m+v}{m-v} - 4m. \quad (5)$$

В равенствах (2)–(5) приняты обозначения:

$$\alpha = a/p; \quad \beta = b/p; \quad \delta = w/p; \quad p = a + b; \quad m^2 = u^2 + v^2. \quad (6)$$

В качестве нормирующего множителя при переходе к безразмерным координатам в (2) выбрана величина  $2p$  – полупериметр катушки по средней линии.

Дальнейшее интегрирование квадратуры в (3) приводит к окончательной формуле для  $L(v)$ :

$$\begin{aligned} \frac{L(v)}{v} = & \ln \frac{1+r}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \ln(\varepsilon+r) - \frac{(2+r)^2 - 2}{3(1+r)} - \\ & - \frac{1}{3\sqrt{2}\varepsilon^2} \sum_{k=\pm 1} (1+k\varepsilon)^3 \ln \frac{1+\sqrt{2}r-k\varepsilon}{(1+\sqrt{2})(1+k\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $r^2 = 1 + \varepsilon^2$ ;  $\varepsilon = \delta/v$ ; ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ).

Слагаемое в сумме из (7) при  $k = -1$  и  $\varepsilon = 1$  доопределяется нулевым значением.

Выражение для  $M(\alpha, \beta)$  из (4) также может быть получено после соответствующих интегральных преобразований:

$$M(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm 1} (Q_k(\alpha, \beta) - Q_0(\alpha, \beta)), \quad (8)$$

где

$$Q_k(\alpha, \beta) \equiv Q(\alpha_k, \beta_k); \quad v_k = v + k\delta; \quad v = \alpha, \beta. \quad (9)$$

Функция  $Q(u, v)$  в (9) представляет собой сумму пяти слагаемых:

$$\begin{aligned} 2\delta^2 Q(u, v) = & \frac{s^2 d}{8} \ln \frac{u(m+u)}{v(m+v)} + \frac{sd^2}{\sqrt{2}} \times \\ & \times \ln \frac{\sqrt{2}m+s}{\sqrt{2}|d|} + \frac{5d^3}{12} \ln \frac{m+d}{\sqrt{2}uv} + \frac{s}{6} (uv - 2d^2) \times \\ & \times \ln \frac{(m+u)(m+v)}{uv} - \frac{2m}{3} (d^2 + uv), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $s = u + v$ ;  $d = u - v = \alpha - \beta$ .

Случай  $u = 0$  ( $v = 0$ ) в (10) отвечает ситуации, когда «окно» катушки представляет собой бесконечно тонкую щель, т. е.  $\delta = \min(\alpha, \beta)$ , формула (10) при этом доопределяется по непрерывности:

$$Q(u, 0) = Q(0, u) = u^3 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{2}{3} \right). \quad (11)$$

Второе слагаемое в (10) при  $\alpha = \beta (d = 0)$  равно нулю.

Предельный вариант, задающий плоский электромагнит в форме «проколотого» по центру квадрата ( $\alpha = \beta = \delta$ ), приводит к соотношению  $Q(0,0) = 0$ .

Поскольку при выводе выражения  $M(\alpha, \beta)$  из (8) использовалось условие  $\alpha + \beta = 1$ , формула для  $M(0,0)$  не может быть определена посредством равенств (8)–(10), а должна вычисляться непосредственно интегрированием квадратуры (4) с учетом равенств  $\alpha = \beta = 0$ , при этом

$$M(0,0) = \frac{2\delta}{3} \left( \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \right). \quad (12)$$

Равенства (2)–(12) полностью исчерпывают задачу определения *точной* формулы по расчету коэффициента самоиндукции плоской катушки прямоугольной формы.

Выражение для  $L$  при выполнении условия  $\delta \ll \min(\alpha, \beta)$  существенно упрощается, и в результате совершения в (2)–(11) предельного перехода можно получить

$$L \Big|_{\delta \ll \min(\alpha, \beta)} = \frac{2\mu_0 P}{\pi} \left\{ \ln \frac{2\alpha\beta}{\delta} - \alpha \ln(\alpha + \gamma) - \beta \ln(\beta + \gamma) - \frac{1}{2} + 2\gamma + \frac{2\delta}{3} \left( \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \right) \right\},$$

где  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

Несмотря на некоторую громоздкость соотношений (2)–(11), входящие в них формулы элементарны, легко программируются и – что очень важно – представляют собой процедуру вычисления *точного* значения искомого коэффициента самоиндукции  $L$ .

Величину  $L$  целесообразно рассчитывать в безразмерном виде. В качестве базовой выберем величину индуктивности плоской катушки  $L_0$ , представляющей собой квадрат с «проколотым» центром. После соответствующих вычислений по формулам (2)–(12) при  $\alpha = \beta = \delta$  можно записать

$$L_D = \frac{\mu_0 P}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \ln(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} \approx 2,078 \cdot 10^{-7} P, \quad (13)$$

где  $P = 4p$  – периметр квадратной катушки по средней линии.

Результаты численного анализа, показывающего зависимость относительной индуктивности  $L_T/L_D$  от параметра  $e$  при различных значениях «вытянутости» катушки  $\zeta$ , представлены на рис. 2 (числа у кривых соответствуют значениям «вытянутости» катушки). Параметры  $e$  и  $\zeta$ :  $e = w/\min(a, b)$ ,  $\zeta = \max(a, b)/\min(a, b)$ . Пунктирная линия отвечает приближенной формуле  $L|_{\delta \ll \min(\alpha\beta)}/L_D$  при  $\zeta = 1$ . В расчетах периметр катушки по средней линии  $P = 4p$  принимается постоянным,  $L_D$  определено в (13).

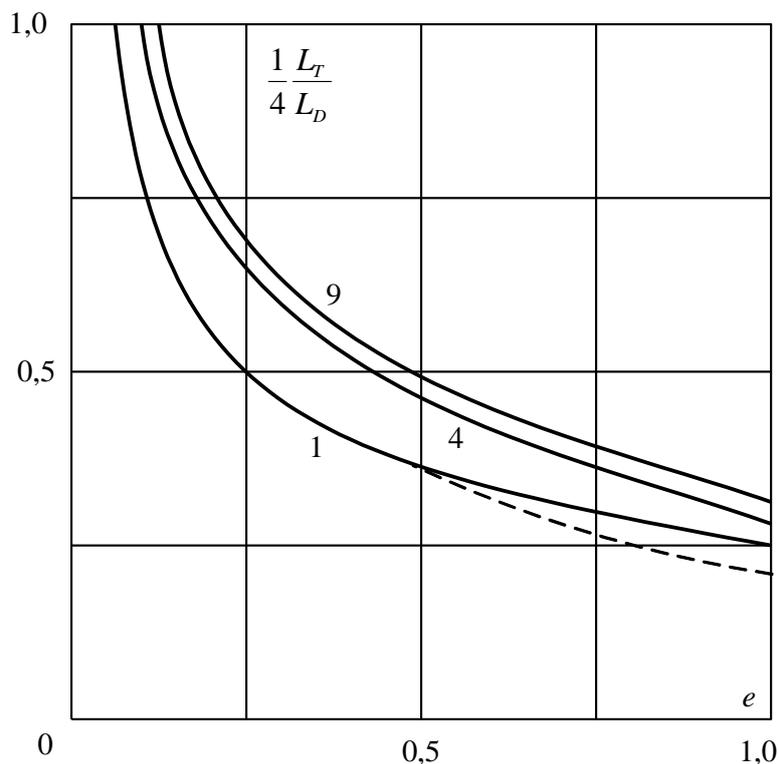


Рис. 2. Зависимость относительной индуктивности плоской катушки прямоугольной формы  $L_T/L_D$  от параметра  $e$

### Заключение

Получено точное аналитическое выражение для величины индукции «тонкого» источника магнитного поля прямоугольной формы в виде алгебраической суммы элементарных функций.

Выведена приближенная формула для вычисления коэффициента самоиндукции, погрешность которой не превышает 14 % в области изменений всех геометрических параметров электромагнита.

Полученные формулы относительно просты по структуре и легко программируются.

## Библиографический список

1. Антонов Ю.Ф. Магнитолевитационная транспортная технология / Ю.Ф.Антонов, А.А. Зайцев; под ред. В.П. Гапановича. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 476 с. – ISBN 978-5-9221-1540-7.
2. Зайцев А.А. Транспорт на магнитном подвесе / А.А. Зайцев, Г.Н. Талашкин, Я.В. Соколова; под ред. А.А. Зайцева. – СПб.: ПГУПС, 2010. – 160 с. – ISBN 978-5-7641-0262-7.
3. Зайцев А.А. Контейнерный мост Санкт-Петербург – Москва на основе левитации / А.А. Зайцев, Ю. Ф. Антонов // Магнитолевитационные транспортные системы и технологии. МТСТ-14: Труды 2-й международной науч. конф., Санкт-Петербург, 17–20 июня 2014 г.; под ред. проф. Ю.Ф. Антонова. – Киров: МЦНИП, 2014. – С. 11–23. – ISBN 978-5-00090-036-9.
4. Литовченко В.В. 4q-s – четырехквadrантный преобразователь электропоездов переменного тока (принцип работы, анализ и экспериментальные исследования) / В.В. Литовченко // Изв. вузов. Электромеханика. – 2000. – № 3. – С. 63–73.
5. Семенов Б.Ю. Силовая электроника для любителей и профессионалов / Б.Ю. Семенов. – М.: Солон-Р, 2001. – 327 с.
6. Силовые преобразовательные устройства НИИЭФА-ЭНЕРГО. – СПб.: ДиО, 2001. – 15 с.
7. Калантаров П.Л. Расчет индуктивностей / П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. – Л.: Энергоиздат, 1986. – 488 с.
8. Матвеев А.Н. Электродинамика / А.Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1980. – 383 с.
9. Немцов М.В. Справочник по расчету параметров катушек индуктивности / М.В. Немцов, Ю.М. Шамаев. – М.: Энергоиздат, 1981. – 136 с.

### Сведения об авторах:

СЕРЕДА Геннадий Евгеньевич, к. т. н., доцент.

E-mail: gennady.sereda@mail.ru

СТРЕПЕТОВ Владимир Михайлович, к. т. н., доцент.

E-mail: strepetov.vm@mail.ru

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

© Середа Г. Е., Стрепетов В. М., 2017

UDK 629.01

**G. E. Sereda, V. M. Strepetov**

## **DETERMINATION OF INDUCTANCE OF VEHICLE ELECTROMAGNET IN MAGNETIC LEVITATION TRANSPORT SYSTEM**

Data of receipt 11.07.2017

Decision on publication 17.07.2017

**Objective.** Of the work consists in receiving new analytic expressions for determination of inductance of vehicular electromagnets of transport levitation systems.

**Methods.** The key feature of calculation model of onboard coils in accordance with their inductance on the example of squared electromagnets lies an assumption about a smallness of the size «heights» in comparison with its other geometrical sizes. There is also an assumption that thickness of a skin layer of the conductor significantly surpasses cross sectional size of the wire making the coil. The single-turn coil is considered, inductance of an actual electromagnet is accepted proportional to a square of the number of turns. When calculating inductance the dimensionless quantities are used. As an absolute, a quarter of perimeter of the coil on the centerline is chosen. The condition of obtaining the approximate formula for calculation of inductance of the flat rectangular coil is the small thickness of a winding in comparison with the geometrical sizes of the coil.

**Results.** Accurate analytical expression for inductance of a «thin» source of square-shaped magnetic field as the algebraic sum of elementary functions has been received. Results of a numerical analysis show dependence of the relative inductance of the square-shaped flat coil on thickness relation to its minimum size. Influence of «elongation» of the coil (relation of length to width) is investigated. It is noted that inductance decreases with decrease of «elongation», and also with increase in the relation of thickness to the minimum size.

**Practical importance.** The approximate formula for calculation of value of inductance has been obtained. Its uncertainty does not exceed 14 % in the areas of changes of all geometrical parameters of an electromagnet is output. Borders of practical application of the received analytic expressions at the accepted assumptions have been set.

The received expressions are fairly simple structurally and are easily programmed

Inductance of onboard electromagnets, flat coil, skin layer, numerical analysis.

### **Introduction**

Application of innovative technologies in transportation of both passengers and cargo on the basis of maglev transport systems facilitates increase of efficiency and sustainability of the above systems [1–3].

One of the options of magnetic suspension is a combined system of levitation and traction with a single-phase alternating current. In this case, electromagnets are powered by stationary frequency converters. Permissible values of

voltage are limited by parameters of power semiconductor devices (PS) being used. The today's PSES have a permissible voltage of 5000 V [4–6].

The value of the required voltage in electromagnets is proportionate to their inductance. In this case, the accuracy of determination of inductance largely dictates the reliability of the results, obtained during researches of electromechanical systems.

Calculation of inductance of different conductor systems represents, as a rule, quite a sophisticated technical procedure, associated with awkward calculations even for simple forms of electromagnets.

A large number of referential books on calculation of the above values (see in, for example, Reference [7–9]) contain, mainly, sets of approximate formulae, whose accuracy and zones of application are far from being always specified.

The very article is devoted to determination of value of inductance  $L$  for coils of a specific configuration, in which value of “height” of electromagnet is negligibly low, compared to other geometrical sizes of the coil. Such electromagnets are hereafter referred to as infinitely thin (flat) sources of magnetic field.

It needs to be pointed out, that value of inductance is significantly dependent on frequency of the current running in a coil. Let us surmise, that current  $I$ , determining magnetic field of the system, changes slightly, namely, value of skin layer of a conductor significantly surpasses cross-sectional size of the wire, constituting the coil.

### Methodology of Calculation

The common formula for determination of inductance of a flat source of magnetic field  $L_T$  is given by the following relation [7]:

$$L_T = \frac{\mu_0 W^2}{4\pi I^2} \int_S d\boldsymbol{\rho} \int_{S'} d\boldsymbol{\rho}' (i, i') / |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|, \quad (1)$$

where  $d\boldsymbol{\rho} = dx dy$ ,  $d\boldsymbol{\rho}' = dx' dy'$ ;

$$|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2;$$

$(x, y)$  и  $(x', y')$  – suitable Cartesian system coordinates;

$i$  и  $i'$  – linear current densities;

$S \equiv S'$  – current-carrying surface of a coil,

$W$  – number of turns of a coil;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  – vacuum permeability.

In this case, single-turn ( $W = 1$ ) coil is considered, inductance of a real electromagnet is proportionate to the square of the number of turns. As a source

of electromagnetic field, let us consider a square-shaped electromagnet. Its calculation scheme is seen from the fig. 1.

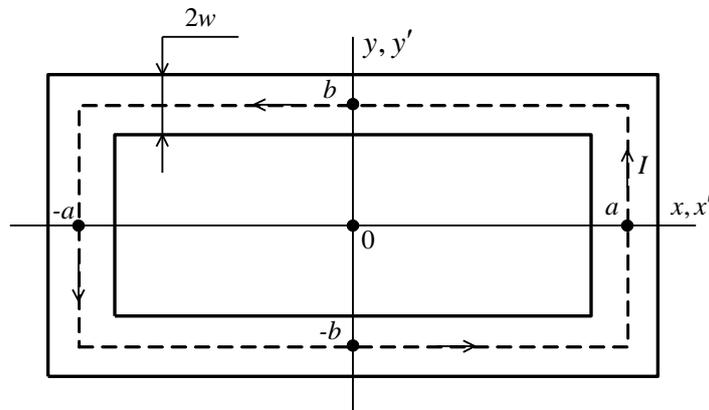


Fig. 1. Calculation scheme of vehicle electromagnet

It is to be pointed out, that natural limits are put on geometrical parameters of this flat electromagnet:  $0 < w \leq \min(a, b)$ .

For the configuration of the source of magnetic field being considered, module of linear current density is defined by equation  $i = i' = I/2w$ . Proceeding to the point (1) of dimensionless coordinates and committing there a primary double integration, one may obtain the following expression for inductance of a flat square-shaped coil  $L$ :

$$L = \frac{2\mu_0 p}{\pi} (L(\alpha) + L(\beta) - M(\alpha, \beta) - M(0, 0)), \quad (2)$$

where

$$L(v) = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} du \int_{-\delta+|u|+v}^{\delta-|u|+v} dv T(u, v), \quad v = \alpha, \beta; \quad (3)$$

$$M(\alpha, \beta) = \int_{-\delta}^{\delta} du (\delta - |u|) T(u + \alpha, u + \beta); \quad (4)$$

$$2\delta^2 T(u, v) = u \ln \frac{m+u}{m-u} + v \ln \frac{m+v}{m-v} - 4m. \quad (5)$$

In equations (2)–(5) the following notation is accepted:

$$\alpha = a/p; \quad \beta = b/p; \quad \delta = w/p; \quad p = a + b; \quad m^2 = u^2 + v^2. \quad (6)$$

As a normalising factor for transition to dimensionless coordinates in (2) the value  $2p$  has been chosen – semiperimeter of a coil at the medium line.

Further integration of quadrature in (3) leads to the final formula for  $L(v)$ :

$$\begin{aligned} \frac{L(v)}{v} = & \ln \frac{1+r}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \ln(\varepsilon+r) - \frac{(2+r)^2 - 2}{3(1+r)} - \\ & - \frac{1}{3\sqrt{2}\varepsilon^2} \sum_{k=\pm 1} (1+k\varepsilon)^3 \ln \frac{1+\sqrt{2}r-k\varepsilon}{(1+\sqrt{2})(1+k\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $r^2 = 1 + \varepsilon^2$ ;  $\varepsilon = \delta/v$ ; ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ).

The summand in the sum of (7) with  $k = -1$  and  $\varepsilon = 1$  is further defined by zero value.

Expression for  $M(\alpha, \beta)$  from (4) may also be obtained after corresponding integral transformations are conducted:

$$M(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm 1} (Q_k(\alpha, \beta) - Q_0(\alpha, \beta)), \quad (8)$$

where

$$Q_k(\alpha, \beta) \equiv Q(\alpha_k, \beta_k); \quad v_k = v + k\delta; \quad v = \alpha, \beta. \quad (9)$$

Function  $Q(u, v)$  in (9) represents an addition of five summands:

$$\begin{aligned} 2\delta^2 Q(u, v) = & \frac{s^2 d}{8} \ln \frac{u(m+u)}{v(m+v)} + \frac{sd^2}{\sqrt{2}} \times \\ & \times \ln \frac{\sqrt{2}m+s}{\sqrt{2}|d|} + \frac{5d^3}{12} \ln \frac{m+d}{\sqrt{2}uv} + \frac{s}{6} (uv - 2d^2) \times \\ & \times \ln \frac{(m+u)(m+v)}{uv} - \frac{2m}{3} (d^2 + uv), \end{aligned} \quad (10)$$

where  $s = u + v$ ;  $d = u - v = \alpha - \beta$ .

The case  $u = 0$  ( $v = 0$ ) in (10) meets the situation when “the window” of a coil is an infinitively thin slot, that is  $\delta = \min(\alpha, \beta)$ , formula (10), in its turn, is further defined by continuity:

$$Q(u, 0) = Q(0, u) = u^3 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{2}{3} \right). \quad (11)$$

The second summand in (10) with  $\alpha = \beta(d = 0)$  equals zero.

The limiting variant, defining a flat electromagnet as a “pierced” in the centre square ( $\alpha = \beta = \delta$ ) leads to relation  $Q(0, 0) = 0$ .

Since during deriving the expression  $M(\alpha, \beta)$  form (8) the condition  $\alpha + \beta = 1$  was used, the formula for  $M(0, 0)$  cannot be defined by means of equations (8)–(10), but should be calculated directly by integrating quadrature (4) taking into account equations  $\alpha = \beta = 0$ , thus

$$M(0, 0) = \frac{2\delta}{3} \left( \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \right). \quad (12)$$

Equations (2)–(12) completely exhaust the problem of determination of an *accurate* formula for calculation of coefficient of self-inductance of a flat square-shaped coil.

Expression for  $L$  by completing the condition  $\delta \ll \min(\alpha, \beta)$  is significantly simplified, and in the result of completion in (2)–(11) of a corresponding maximum transition, one can obtain

$$L|_{\delta \ll \min(\alpha, \beta)} = \frac{2\mu_0 p}{\pi} \left\{ \ln \frac{2\alpha\beta}{\delta} - \alpha \ln(\alpha + \gamma) - \beta \ln(\beta + \gamma) - \frac{1}{2} + 2\gamma + \frac{2\delta}{3} \left( \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \right) \right\},$$

where  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

Despite some awkwardness of the relations (2)–(11), the formulae constituting them are elementary, are easy programmed and, which is very important, they represent themselves a procedure of calculation of an *accurate* value of the required self-inductance coefficient  $L$ .

It is advisable to conduct calculation of the value  $L$  in a dimensionless form. As a basic value, let us choose a value of inductance of a flat coil  $L_0$ , having a form of square, “pierced” in the centre. After calculations according to formulae (2)–(12) with  $\alpha = \beta = \delta$  we can write down

$$L_D = \frac{\mu_0 P}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \ln(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} \approx 2,078 \cdot 10^{-7} P, \quad (13)$$

where  $P = 4p$  – perimeter of a square coil on the medium line.

The results of a numerical analysis, showing the dependence of relative inductance  $L_T/L_D$  from the parameter  $e$  at different values of "elongation" of coil  $\zeta$ , are represented in the fig. 2 (figures on the curves correspond to the values of "elongation" of coil). Parameters  $e$  and  $\zeta$ , respectively, are equal:  $e = w/\min(a, b)$ ,  $\zeta = \max(a, b)/\min(a, b)$ . The dashed line corresponds to the approximate formula  $L|_{\delta \ll \min(\alpha, \beta)}/L_D$  with  $\zeta = 1$ . In calculations, perimeter of a coil along the medium line  $P = 4p$  is view as constant,  $L_D$  is defined in (13).

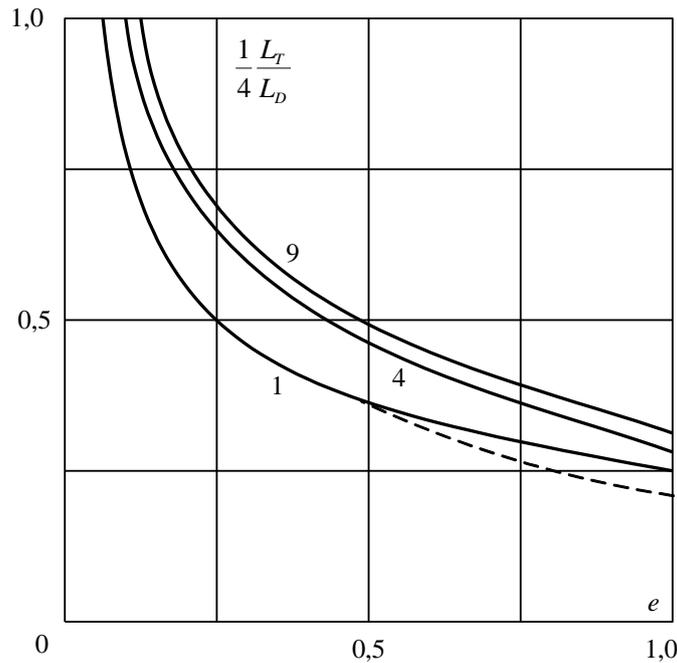


Fig. 2. Dependence of relative inductance of a flat square-shaped coil  $L_T/L_D$  from the parameter  $e$

### Conclusion

The accurate analytical expression for value of inductance of a "thin" source of a square-shaped magnetic field in the form of algebraic sum of elementary functions was obtained.

The approximate formula for calculation of value of inductance has been obtained. Its uncertainty does not exceed 14 % in the areas of changes of all geometrical parameters of an electromagnet is output.

The obtained expressions are fairly simple structurally and are easily programmed.

## References

1. Antonov Y.F., Zaitsev A.A. Magnetic Levitation Transport Technology. [Magnitolevitatsionnaya transportnaya tekhnologiya]. Moscow, 2014. 476 p.
2. Zaitsev A.A., Talashkin G.N., Sokolova Ya.V. Magnetic Suspension Transport [Transport na magnitnom podvese]. St. Petersburg, 2010. 160 p.
3. Zaitsev A.A., Antonov Yu.F. Container Bridge St. Petersburg – Moscow on the Basis of Levitation [Konteynernyi most Sankt-Peterburg – Moskva na osnove levitatsii]. *Proc. of 2<sup>nd</sup> Int. Conf. Magnetic Levitation Transport Systems and Technologies [Magnitolevitatsionnye transportnye sistemy i tekhnologii]*. Kirov, 2014, pp. 11–23.
4. Litovchenko V.V. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*, 2000, no. 3, pp. 63–73.
5. Semenov B.Yu. Power Plants for Amateurs and Professionals [Silovaya elektronika dlya lyubitelei i professionalov]. Moscow, Solon-R, 2001. 327 p.
6. Power transformers NIEFA-ENERGY [Silovye preobrazovatel'nye ustroystva NIEFA-ENERGO]. St. Petersburg, 2001. 15 p.
7. Kalantarov P.L., Tseitlin L.A. Calculation of Inductances [Raschet induktivnostei]. Leningrad, 1986. 488 p.
8. Matveev A.N. Electrical Dynamics [Elektrodinamika]. Moscow, Vysshaya shkola, 1980. 383 p.
9. Nemtsov M.V., Shamaev Yu.M. Reference Book on Calculation of Coil Inductance Parameters [Spravochnik po raschetu parametrov katushek induktivnosti]. Moscow, Energoizdat, 1981. 136 p.

### Information about the authors:

Gennady E. SEREDA, Cand. sci. (Eng.), Associate Prof.

E-mail: gennady.sereda@mail.ru

Vladimir M. STREPETOV, Cand. sci. (Eng.), Associate Prof.

E-mail: strepetov.vm@mail.ru

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University

© Sereda G. E., Strepetov V. M., 2017