

УДК 539.374

С. Е. Александров, Е. А. Лямина

## НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ ПЛОСКОДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Дата поступления 01.10.2017

Решение о публикации 26.10.2017

**Введение.** Система уравнений, состоящая из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия, может быть исследована независимо от закона течения. Эта система уравнений является гиперболической, поэтому для решения рассматриваемой системы уравнений целесообразно использовать метод характеристик. В частном случае теории пластичности для материалов, условие текучести которых не зависит от среднего напряжения, применяют два метода для построения ортогональной сетки характеристик и определения поля напряжений:  $R$ – $S$  метод и метод координат Михлина. При условии текучести Кулона – Мора угол между характеристическими направлениями зависит от угла внутреннего трения. В связи с этим названные выше методы должны быть обобщены с учетом этого свойства характеристик.

**Цель.** В теории пластичности материалов, условие текучести которых не зависит от среднего давления, для расчета поля напряжений широко применяется метод координат Михлина. Цель нашей работы – обобщить этот метод в систему уравнений, состоящую из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия.

**Метод.** Используются геометрические свойства характеристик системы уравнений, состоящей из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия, для введения обобщенных координат Михлина.

**Результаты.** Показано, что решение системы уравнений, состоящей из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия, сводится к решению телеграфного уравнения и к последующему интегрированию.

**Практическая значимость.** Развитый метод решения системы уравнений, состоящей из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия, позволяет получать решения с высокой точностью при незначительных затратах машинного времени.

Условие текучести Кулона – Мора, метод характеристик, координаты Михлина, телеграфное уравнение.

### Введение

Для плоскодеформированного состояния идеально жесткопластического и идеально упругопластического тела уравнения для напряжений в пластической зоне состоят из условия текучести и двух уравнений равновесия. Эта система уравнений может быть исследована без привлечения

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ОАО «РЖД» в рамках научного проекта №17-20-03215.

закона течения. Во многих случаях отмеченная система уравнений является гиперболической [1]. Определение поля напряжений сводится к определению поля характеристик. При условии текучести, которое не зависит от среднего напряжения, широко применяются два метода построения поля характеристик:  $R$ – $S$ -метод, предложенный в [2], и метод координат Михлина [1, 3, 4]. Целесообразность применения того или иного метода зависит от заданных краевых условий. Для сыпучих сред условие текучести зависит от среднего напряжения [5, 6]. Как следует из современных обзорных работ [7, 8], до настоящего времени наиболее широко применяемым условием текучести такого типа является условие Кулона – Мора. В частности, это условие в основном используется в получившей широкое распространение модели [9] и в современной модели для гранулированных и сыпучих материалов, развитой в [10]. Для построения поля характеристик системы уравнений, состоящей из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия,  $R$ – $S$ -метод обобщен в [11]. В публикуемой работе для построения поля характеристик этой системы уравнений обобщается метод координат Михлина. Показано, что когда оба семейства характеристик криволинейны, решение краевой задачи сводится к решению телеграфного уравнения. Методы решения этого уравнения при краевых условиях, типичных для моделей идеально жесткопластического и идеально упругопластического тела, хорошо изучены [1, 3, 4]. Отметим, что предлагаемый метод определения напряженного состояния может использоваться и для ряда металлических материалов, как следует из [12–15].

### Обобщенные координаты Михлина

Рассмотрим произвольную плоскую ортогональную систему координат  $(\xi, \eta)$  и декартову систему координат  $(x, y)$ . Обе системы координат показаны на рис. 1. Рассмотрим произвольную точку  $P$ , определяемую радиусом-вектором  $\mathbf{R}$ , начало которого совпадает с началом декартовой системы координат. Введем прямолинейную координату  $\bar{y}$ , отсчитываемую от начала декартовой системы координат по направлению координаты  $\eta$  в точке  $P$ , и прямолинейную координату  $\bar{x}$ , отсчитываемую от начала декартовой системы координат по направлению координаты  $\xi$  в точке  $P$ . Пусть  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – единичные векторы по направлениям осей  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , соответственно.

Так как криволинейные координаты ортогональны, то очевидно, что ортогональны и координаты Михлина (рис. 1). Характеристики системы уравнений, состоящей из условия текучести, не зависящего от среднего напряжения, и уравнений равновесия, ортогональны. Поэтому можно принять, что  $(\xi, \eta)$  являются характеристическими координатами. В этом случае величины  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  по отдельности удовлетворяют телеграфному уравне-

нию [1, 3, 4]. Характеристики системы уравнений, состоящей из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия, не являются ортогональными [5]. Обозначим соответствующие характеристические координаты  $(\alpha, \beta)$ . Без ограничения общности можно принять, что направление максимального (в алгебраическом смысле) главного напряжения  $\sigma_1$  проходит через первый и третий квадранты (рис. 2).

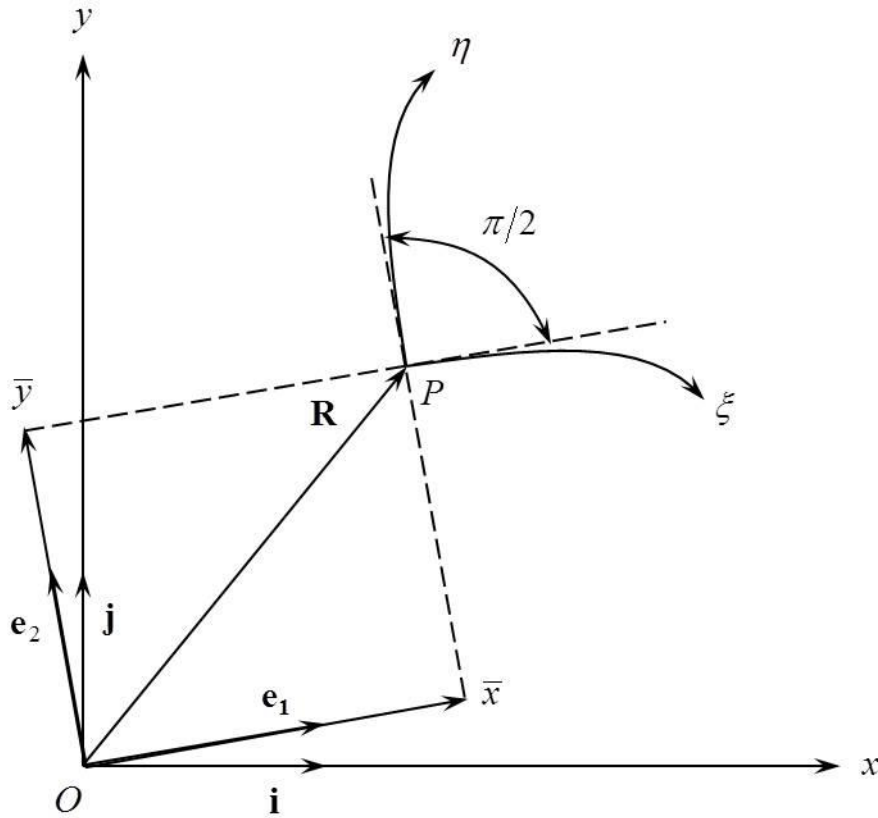


Рис. 1. Ортогональные координаты Михлина

Тогда координаты Михлина  $(\bar{x}, \bar{y})$  точки  $P$  определяются из уравнения

$$\mathbf{R} = \bar{x}\mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{e}_2. \quad (1)$$

Угол между направлением этого главного напряжения и каждым из характеристических направлений равен  $\pi/4 + \phi/2$  [5], где  $\phi$  – угол внутреннего трения. Если угол внутреннего трения является постоянной величиной, то угол между координатными кривыми характеристической системы координат тоже всюду является постоянной величиной. Обобщим для таких систем координат определение координат Михлина. Аналогично случаю ортогональных систем координат введем прямолинейную координату  $\bar{y}$ , отсчитываемую от начала декартовой системы координат по направлению

координаты  $\beta$  в точке  $P$ , и прямолинейную координату  $\bar{x}$ , отсчитываемую от начала декартовой системы координат по направлению координаты  $\alpha$  в точке  $P$ . Очевидно, что теперь система координат  $(\bar{x}, \bar{y})$  не является ортогональной. Тем не менее, уравнение (1) имеет силу, если векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  направлены вдоль новых осей  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , соответственно. Это уравнение можно переписать в виде

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \bar{x}\mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{e}_2, \quad (2)$$

где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – орты декартовой системы координат. Пусть  $\varphi$  – угол между осью  $x$  и касательной к линии  $\alpha$  в точке  $P$ . Тогда по определению  $\varphi$  – угол между осями  $x$  и  $\bar{x}$  в точке  $O$ . Из геометрических соображений (рис. 2) получим

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \varphi, \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2 = -\sin(\varphi + \phi), \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1 = \sin \varphi, \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2 = \cos(\varphi + \phi). \quad (3)$$

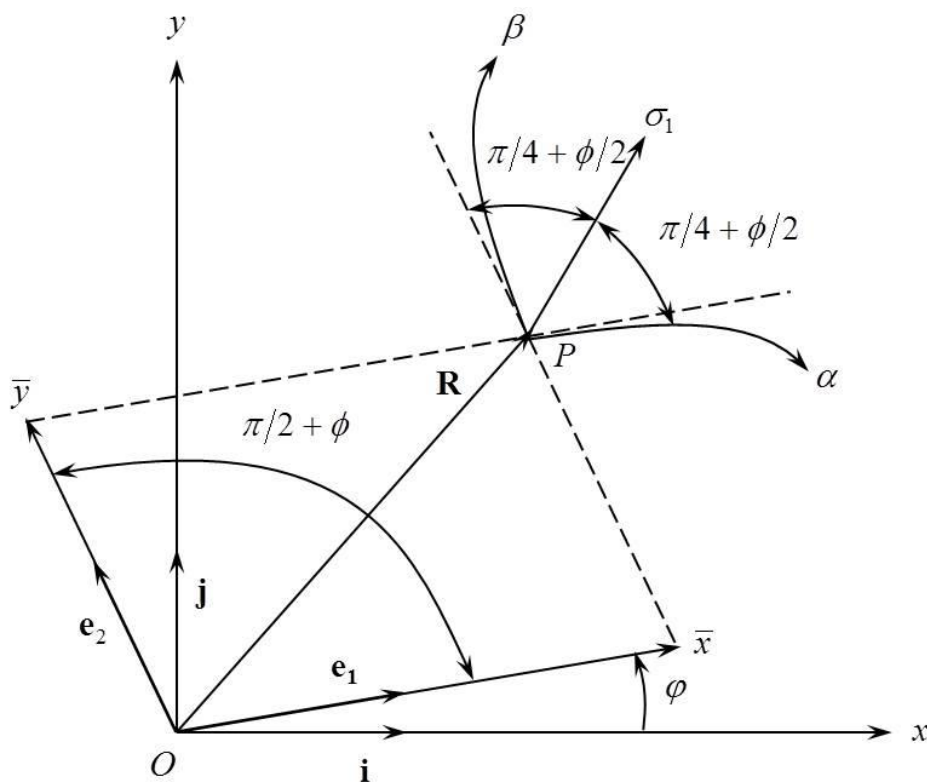


Рис. 2. Обобщенные координаты Михлина

Умножение уравнения (2) скалярно на вектор  $\mathbf{i}$  дает  $x = \bar{x}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2$ , а на вектор  $\mathbf{j}$   $y = \bar{x}\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2$ . Исключая в этих уравнениях скалярные произведения единичных векторов с помощью (3), находим

$$x = \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin(\varphi + \phi); \quad y = \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos(\varphi + \phi). \quad (4)$$

Решая эти уравнения относительно  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , получим

$$\bar{x} = \frac{x \cos(\varphi + \phi) + y \sin(\varphi + \phi)}{\cos \phi}; \quad \bar{y} = \frac{y \cos \varphi - x \sin \varphi}{\cos \phi}.$$

Дифференцируя первое уравнение по  $\beta$ , а второе по  $\alpha$ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} \cos \phi &= \frac{\partial x}{\partial \beta} \cos(\varphi + \phi) + \frac{\partial y}{\partial \beta} \sin(\varphi + \phi) + \\ &+ [y \cos(\varphi + \phi) - x \sin(\varphi + \phi)] \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} \cos \phi = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cos \varphi - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \sin \varphi - (y \sin \varphi + x \cos \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Уравнения характеристик имеют вид [5]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left( \varphi + \phi + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg}(\varphi + \phi). \quad (6)$$

Здесь первое уравнение определяет линии семейства  $\alpha$ , а второе – линии семейства  $\beta$ . Уравнения (6) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial x}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\operatorname{ctg}(\varphi + \phi) \frac{\partial x}{\partial \beta}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} \cos \phi &= [y \cos(\varphi + \phi) - x \sin(\varphi + \phi)] \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} \cos \phi &= -(y \sin \varphi + x \cos \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Исключая в этих уравнениях  $x$  и  $y$  с помощью (4), найдем

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} \cos \phi = (\bar{y} - \bar{x} \sin \phi) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} \cos \phi = (\bar{y} \sin \phi - \bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (8)$$

Единственное свойство системы координат  $(\alpha, \beta)$ , которое использовалось при выводе (8), состоит в том, что скалярное произведение  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$  – постоянная величина.

### Напряженное состояние в сыпучей среде

Уравнения (8) упрощаются при учете свойств характеристических кривых системы уравнений, состоящей из условия текучести Кулона – Мора и уравнений равновесия. В частности, в [11] показано, что

$$\varphi - \varphi_0 = (\alpha + \beta) \cos \phi, \quad (9)$$

где  $\varphi_0$  – постоянная, введенная для удобства. Подставляя (9) в (8), найдем

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} = \bar{y} - \bar{x} \sin \phi; \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} = \bar{y} \sin \phi - \bar{x}. \quad (10)$$

Отметим, что при  $\phi = 0$  эти уравнения совпадают с уравнениями, получаемыми в теории пластичности материалов, условие текучести которых не зависит от среднего напряжения [1, 3, 4]. Введем новые зависимые переменные  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  по формулам

$$\bar{x} = \bar{X} \exp(n\alpha + m\beta); \quad \bar{y} = \bar{Y} \exp(n\alpha + m\beta). \quad (11)$$

Здесь  $n$  и  $m$  – некоторые постоянные. Подставляя (11) в (10), получим

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \beta} + m\bar{X} = \bar{Y} - \bar{X} \sin \phi; \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \alpha} + n\bar{Y} = \bar{Y} \sin \phi - \bar{X}. \quad (12)$$

Принимая  $m = -\sin \phi$  и  $n = \sin \phi$ , приведем уравнения (12) к виду

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \beta} = \bar{Y}; \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \alpha} = -\bar{X}. \quad (13)$$

Кроме того, уравнения (11) примут форму

$$\bar{x} = \bar{X} \exp[(\alpha - \beta) \sin \phi]; \quad \bar{y} = \bar{Y} \exp[(\alpha - \beta) \sin \phi]. \quad (14)$$

Уравнения (13) приводятся к телеграфным уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \alpha \partial \beta} + \bar{X} = 0; \quad \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \alpha \partial \beta} + \bar{Y} = 0. \quad (15)$$

Эти уравнения решаются методом Римана. В частности, вдоль любого замкнутого контура имеет место уравнение

$$\oint \left[ \left( G \frac{\partial f}{\partial \alpha} - f \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left( f \frac{\partial G}{\partial \beta} - G \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) d\beta \right] = 0.$$

Здесь  $f \equiv \bar{X}$  или  $f \equiv \bar{Y}$ ,  $G(a, b, \alpha, \beta)$  – функция Грина. Причем

$$G(a, b, \alpha, \beta) \equiv J_0 \left[ 2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)} \right],$$

где  $J_0 \left[ 2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)} \right]$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Имея решение уравнений (15), можно найти зависимость  $x$  и  $y$  от  $\alpha$  и  $\beta$ . Действительно, уравнения (14) дают зависимость  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  от  $\alpha$  и  $\beta$ , тогда уравнения (4) и (9) – зависимость  $x$  и  $y$  от  $\alpha$  и  $\beta$ . Зависимость квадратичного инварианта тензора напряжения от  $\alpha$  и  $\beta$  имеет вид [11]

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = q_0 \exp[2(\beta - \alpha) \sin \phi]. \quad (16)$$

где  $\sigma_2$  – наименьшее (в алгебраическом смысле) главное напряжение;  
 $q_0$  – произвольная постоянная.

Условие текучести Кулона – Мора имеет вид

$$q - p \sin \phi = k \cos \phi, \quad (17)$$

где  $p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2$  и  $k$  – коэффициент сцепления, являющийся постоянной величиной. Уравнения (16) и (17) определяют  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  как функции  $\alpha$  и  $\beta$ . Учитывая (11), зависимости компонент тензора напряжения в декартовых координатах от  $\alpha$  и  $\beta$  находят с помощью стандартных уравнений преобразования компонент тензора в плоскости. Таким образом, с учетом имеющейся зависимости  $x$  и  $y$  от  $\alpha$  и  $\beta$  зависимости компонент тензора напряжения в декартовых координатах от  $x$  и  $y$  получены в параметрическом виде.

## Заключение

Показано, что методы, развитые ранее для построения поля напряжений при плоской деформации материала, подчиняющегося условию текучести, не зависящему от среднего напряжения, с помощью координат Михлина, полностью применимы для материалов, подчиняющихся условию текучести Кулона – Мора. Для этого достаточно ввести обобщенные координаты Михлина  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  (рис. 2), а также вспомогательные функции  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  по формулам (14). Эти вспомогательные функции удовлетворяют телеграфному уравнению (15). Такому же уравнению удовлетворяют координаты Михлина в теории пластичности, основанной на условии текучести, не зависящим от среднего напряжения. Методы решения соответствующих краевых задач хорошо развиты [1, 3, 4]. Все эти методы практически без изменений могут быть использованы для определения напряжений в сыпучей среде.

## Библиографический список

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.
2. Hill R. A Method of Numerical Analysis of Plastic Flow in Plane Strain and Its Application to the Compression of a Ductile Material Between Rough Plates / R. Hill, E.H. Lee, S.J Tupper // ASME J. Appl. Mech. – 1951. Vol. 18, № 1. – P. 46–52.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 324 с.
4. Друянов Б.А. Теория технологической пластичности / Б.А. Друянов, Р.И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.
5. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.: Физматлит, 1960. – 243 с.
6. Николаевский В.Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности / В.Н. Николаевский // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. – 1972. – № 6. – 85 с.
7. Cox G.M. Coulomb-Mohr Granular Materials: Quasi-Static Flows and the Highly Frictional Limit / G.M. Cox, N. Thamwattana, S.W. McCue, J.M. Hill // Appl. Mech. Rev. – 2008. – Vol. 61. – Paper 060802.
8. Goddard J.D. Continuum modeling of granular media / J.D. Goddard // Appl. Mech. Rev. – 2014. – Vol. 66. – Paper 050801.
9. Spencer A.J.M. A Theory of the Kinematics of Ideal Soils Under Plane Strain Conditions / A.J.M. Spencer // J. Mech. Phys. Solids. – 1964. – Vol. 12. – P. 337–351.



10. Harris D. A hyperbolic Augmented Elasto-Plastic Model for Pressure-Dependent Yield / D. Harris // *Acta Mech.* – 2014. – Vol. 225. – P. 2277–2299.

11. Alexandrov S. Geometry of plane strain characteristic fields in pressure-dependent plasticity / S. Alexandrov // *ZAMM.* – 2015. – Vol. 95. – P. 1296–1301.

12. Spitzig W.A. The Effect of Hydrostatic Pressure on the Deformation Behavior of Maraging and HY-80 Steels and Its Implications for Plasticity Theory / W.A. Spitzig, R.J. Sober, O. Richmond // *Metallurg. Trans.* – 1976. – 7A. – P. 1703–1710.

13. Kao A.S. Influence of Superimposed Hydrostatic Pressure on Bending Fracture and Formability of a Low Carbon Steel Containing Globular Sulfides / A.S. Kao, H.A. Kuhn, W.A. Spitzig, O. Richmond // *ASME J. Engng Mater. Technol.* – 1990. – Vol. 112. – P. 26–30.

14. Wilson C.D. A Critical Reexamination of Classical Metal Plasticity / C.D. Wilson // *ASME J. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 69. – № 1. – P. 63–68.

15. Liu P.S. Mechanical Behaviors of Porous Metals Under Biaxial Tensile Loads / P.S. Liu // *Mater. Sci. Engng.* – 2006. – Vol. A422. – P. 176–183.

**Сведения об авторах:**

АЛЕКСАНДРОВ Сергей Евгеньевич, д. ф.-м. н., доцент, в. н. с.

E-mail: sergei\_alexandrov@spartak.ru

ЛЯМИНА Елена Алексеевна, к. ф.-м. н., доцент.

E-mail: lyamina@inbox.ru

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики РАН (Москва)

© Александров С. Е., Лямина Е. А., 2017

**A NEW METHOD OF CALCULATING THE STATE OF STRESS  
IN GRANULAR MATERIALS UNDER PLANE STRAIN CONDITIONS**

Data of receipt 01.10.2017

Decision on publication 26.10.2017

The system of equations comprising the Mohr-Coulomb yield condition and the stress equilibrium equations may be studied independently of the flow law. This system of equations is hyperbolic. Accordingly, to solve the aforementioned system of equations, it is reasonable to apply the method of characteristics. In the special case of plasticity theory for materials whose yield criterion does not depend on the average stress, two methods are used to construct an orthogonal net of characteristics and to determine the stress field: the R-S method and Mikhlin's coordinate method. In the case of the Mohr-Coulomb yield condition, the angle between the characteristic directions depends on the internal friction angle. Therefore, the above-mentioned methods should be generalised in accordance with this property of characteristics.

**Purpose.** In the case of Plasticity theory for materials whose yield strength does not depend on the average stress, to calculate the stress field, Mikhlin's coordinate method is widely used. The purpose of this study is to generalise this method for the equation system consisting of the Mohr-Coulomb yield criterion and the pressure equilibrium equations.

**Methods.** The geometrical properties of the characteristics of the equations' system consisting of the Mohr-Coulomb yield condition and the equilibrium equations are used to introduce the generalised Mikhlin coordinates.

**Results.** It's been pointed out that solving equation system consisting of the Mohr-Coulomb yield condition and equilibrium equation comes to solving equation of telegraphy and to subsequent integration.

**Practical Significance.** The developed method of system of equations' solution, consisting of the Mohr-Coulomb yield condition and equilibrium equation enables obtaining high precision solutions at insignificant computer time expenditures.

Mohr-Coulomb yield condition, method of characteristics, Mikhlin's variables, equation of telegraphy.

**Introduction**

The plane strain deformation state of perfect rigid plastic solid and elastic-perfectly plastic solid the stress equations in the plastic zone consist of the yield condition and two equilibrium equations. This system of equations may be studied without invoking the flow law. In many cases, the above-mentioned system of equations is hyperbolic [1]. Determination of the stress field is brought to determination of the characteristics field. In the case of the yield condition equation which is not dependent upon the average stress, the two methods of con-

construction of characteristics field are used: the R–S method, suggested in [2], and Mikhlin's coordinates method [1, 3, 4]. The relevance of application this or that method of characteristics depends on the set boundary conditions. In the case of granular medium, the yield condition depends on the average stress [5, 6]. As it goes out of today's surveys [7, 8], by now the most widely used yield condition of such a type has been the Mohr-Coulomb yield condition. In particular, this condition is used in a widespread model [9] and in a modern model for granular materials, developed in [10]. To construct the field of characteristics of the system of equations consisting of the Mohr-Coulomb yield condition and the equilibrium equations, the R–S method is generalised in [11]. In this study, the method of Mikhlin's coordinates is generalised to construct the field of characteristics of this system of equations. It is shown that in the case when both characteristics are curvilinear, the solution of the boundary value task is brought to solution of the telegraph equation. The methods for solving this equation under boundary conditions, typical for models of perfect rigid plastic solid and elastic-perfectly plastic solid, have been well studied [1, 3, 4].

Let us point out that, the suggested method for determination of stress condition may be used for a range of metal materials as well, as it follows from [12–15].

### Generalised Mikhlin's coordinates

Let us consider arbitrary plane orthogonal coordinate system  $(\xi, \eta)$  and the Cartesian coordinate system  $(x, y)$ . Both the systems are shown in the fig. 1. Let us consider arbitrary point  $P$ , determined by the radius vector  $\mathbf{R}$ , the beginning of which coincides with the beginning of the Cartesian coordinate system. We introduce a rectilinear coordinate  $\bar{y}$ , counted from the beginning of the Cartesian coordinate system in the direction of the coordinate  $\eta$  in the point  $P$ , and a rectilinear coordinate  $\bar{x}$ , counted from the beginning of the Cartesian coordinate system in the direction of the coordinate  $\xi$  in the point  $P$ . Let  $\mathbf{e}_1$  and  $\mathbf{e}_2$  be unit vectors in the direction of axes  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  respectively.

Since the curvilinear coordinates are orthogonal, it is obvious that the Mikhlin's coordinates are also orthogonal (fig. 1). The characteristics of the system of equations consisting of the yield condition which is independent of the average stress, and the equilibrium equations, are orthogonal. Therefore, we can accept that are characteristic coordinates. In this case, the values and separately satisfy the telegraph equation [1, 3, 4]. The characteristics of the system of equations consisting of the Mohr-Coulomb yield condition and the equilibrium equations are not orthogonal [5]. Let us denote the corresponding characteristic coordinates. Without loss of generality, we can assume that the direction of the maximum (in the algebraic sense) of the main stress passes through the first and the third quadrants (fig. 2).

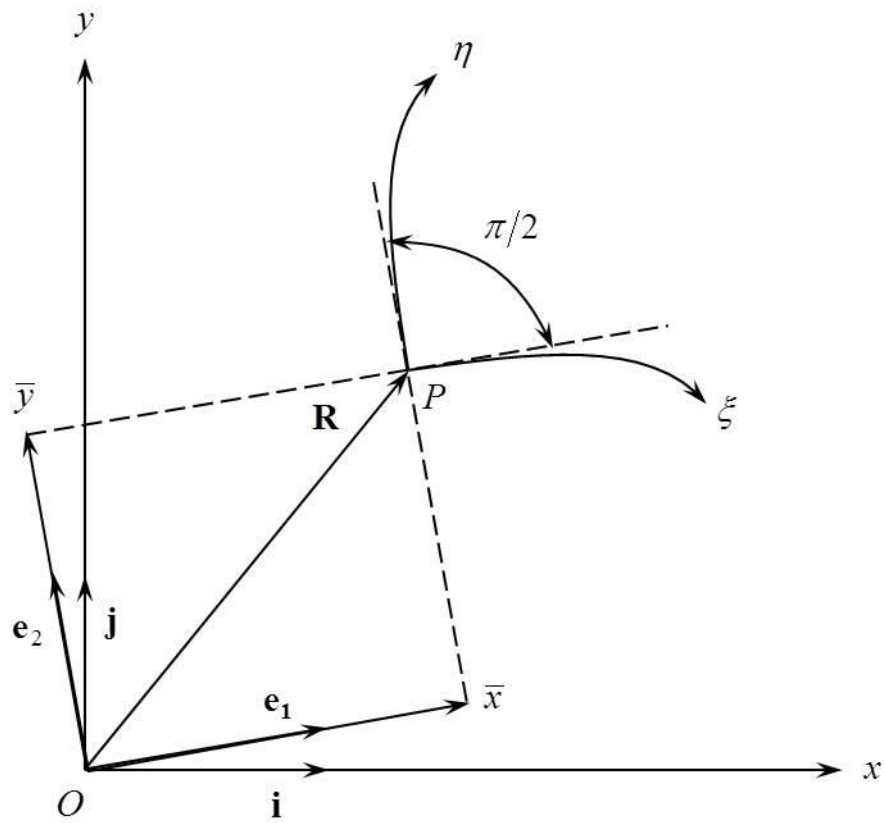


Fig. 1. Mikhlín's orthogonal coordinates

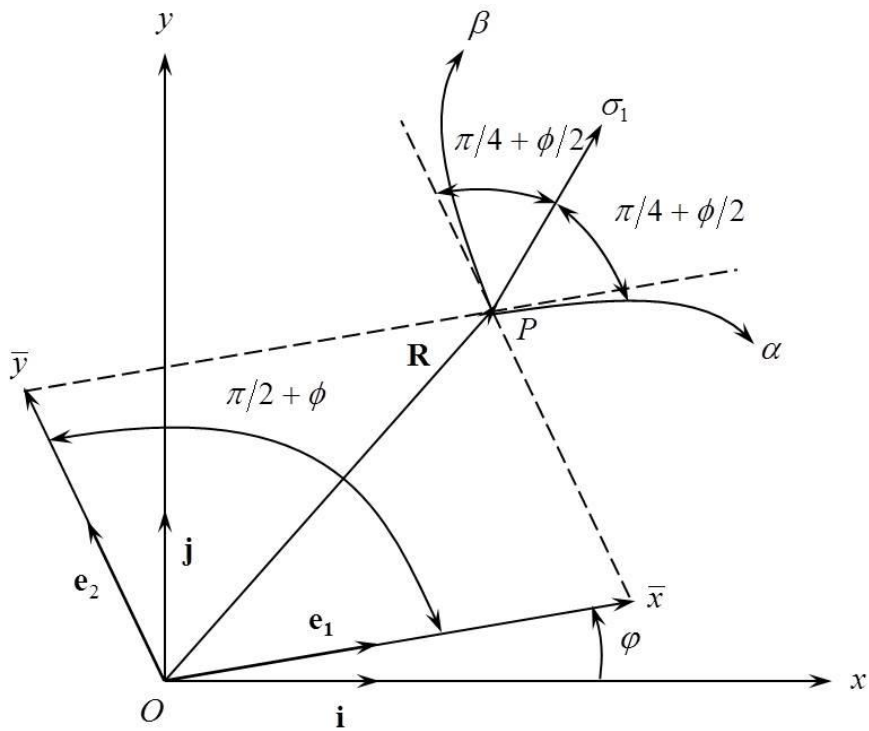


Fig. 2. Mikhlín's orthogonal coordinates

Then Mikhlin's coordinates  $(\bar{x}, \bar{y})$  of the point  $P$  are determined from the equation

$$\mathbf{R} = \bar{x}\mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{e}_2. \quad (1)$$

Then, the angle between the direction of this main stress and each of the characteristic directions equals  $\pi/4 + \phi/2$  [5], where  $\phi$  – angle of internal friction. If the angle of internal friction is a constant value, then the angle between coordinate curves of the characteristic system of the coordinates is a constant value everywhere. Let us generalise definition of Mikhlin's coordinates for these systems. Just like in the case of orthogonal coordinate systems, we introduce a rectilinear coordinate  $\bar{y}$ , counted from the beginning of the Cartesian coordinate system in the direction of the coordinate  $\beta$  in the point  $P$ , and a rectilinear coordinate  $\bar{x}$ , counted from the Cartesian coordinate system in the direction of the coordinate  $\alpha$  in the point  $P$ . It is obvious that now the system of coordinates  $(\bar{x}, \bar{y})$  does not appear orthogonal. However, the equation (1) is valid, if the vectors  $\mathbf{e}_1$  and  $\mathbf{e}_2$  are directed along the new axes  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$ , respectively. This equation can be written as follows:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \bar{x}\mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{e}_2, \quad (2)$$

here  $\mathbf{i}$  and  $\mathbf{j}$  are unit vectors of the Cartesian coordinate system. Let  $\varphi$  be the angle between the axis  $x$  and the tangent to the line  $\alpha$  in the point  $P$ . Then, following the definition,  $\varphi$  is the angle between the axes  $x$  and  $\bar{x}$  in the point  $O$ . Geometrically, we obtain (fig. 2)

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \varphi, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2 = -\sin(\varphi + \phi), \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1 = \sin \varphi, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2 = \cos(\varphi + \phi). \quad (3)$$

Multiplication of equation (2) scalarly by the vector  $\mathbf{i}$  gives us  $x = \bar{x}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2$ , and by vector  $\mathbf{j}$  –  $y = \bar{x}\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2$ . Excluding in these equations scalar multiplications of unit vectors by means of (3), we find

$$x = \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin(\varphi + \phi); \quad y = \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos(\varphi + \phi). \quad (4)$$

Solving these equations for  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$ , we obtain

$$\bar{x} = \frac{x \cos(\varphi + \phi) + y \sin(\varphi + \phi)}{\cos \phi}; \quad \bar{y} = \frac{y \cos \varphi - x \sin \varphi}{\cos \phi}.$$

Differentiating the first equation by  $\beta$ , and the second by  $\alpha$ , we find

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} \cos \phi &= \frac{\partial x}{\partial \beta} \cos(\varphi + \phi) + \frac{\partial y}{\partial \beta} \sin(\varphi + \phi) + \\ &+ [y \cos(\varphi + \phi) - x \sin(\varphi + \phi)] \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \quad (5) \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} \cos \phi &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cos \varphi - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \sin \varphi - (y \sin \varphi + x \cos \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Equations of characteristics have the form [5]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left( \varphi + \phi + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg}(\varphi + \phi). \quad (6)$$

Here the first equation defines the lines of the family  $\alpha$ , and the second – the lines of the family  $\beta$ . Equations (6) may be rewritten in the form

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial x}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\operatorname{ctg}(\varphi + \phi) \frac{\partial x}{\partial \beta}. \quad (7)$$

Putting (7) into (5), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} \cos \phi &= [y \cos(\varphi + \phi) - x \sin(\varphi + \phi)] \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} \cos \phi &= -(y \sin \varphi + x \cos \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Excluding in these equations  $x$  and  $y$  with the help of (4), we find

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} \cos \phi = (\bar{y} - \bar{x} \sin \phi) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} \cos \phi = (\bar{y} \sin \phi - \bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (8)$$

The only property of the coordinate system  $(\alpha, \beta)$  which was used in the conclusion (8) consists in the scalar multiplication  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$  being a constant value.

### Stress condition in granular medium

The equations (8) are simplified when considering the properties of characteristic curves of the equations' system consisting of the Mohr-Coulomb yield condition and the equilibrium equations. In particular, in [11] it is shown that

$$\varphi - \varphi_0 = (\alpha + \beta) \cos \phi, \quad (9)$$

here  $\varphi_0$  is constant, introduced for convenience. Putting (9) into (8), we find

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta} = \bar{y} - \bar{x} \sin \phi; \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} = \bar{y} \sin \phi - \bar{x}. \quad (10)$$

Let us point out that with  $\phi = 0$  these equations coincide with the equations, obtained in the theory of plasticity of materials, the yield condition of which does not depend on the average stress [1, 3, 4]. Let us introduce new dependent variables  $\bar{X}$  and  $\bar{Y}$  by formulas

$$\bar{x} = \bar{X} \exp(n\alpha + m\beta); \quad \bar{y} = \bar{Y} \exp(n\alpha + m\beta). \quad (11)$$

Here  $n$  and  $m$  – constants. Putting (11) into (10), we obtain

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \beta} + m\bar{X} = \bar{Y} - \bar{X} \sin \phi; \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \alpha} + n\bar{Y} = \bar{Y} \sin \phi - \bar{X}. \quad (12)$$

Accepting  $m = -\sin \phi$  and  $n = \sin \phi$ , we transform equations (12) into

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \beta} = \bar{Y}, \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \alpha} = -\bar{X}. \quad (13)$$

Besides, equations (11) accept the form

$$\bar{x} = \bar{X} \exp[(\alpha - \beta) \sin \phi]; \quad \bar{y} = \bar{Y} \exp[(\alpha - \beta) \sin \phi]. \quad (14)$$

Equations (13) are brought to the telegraph equations of the form

$$\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \alpha \partial \beta} + \bar{X} = 0; \quad \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \alpha \partial \beta} + \bar{Y} = 0. \quad (15)$$

These equations are solved by virtue of Riemann method. In particular, along any closed contour there is the equation

$$\oint \left[ \left( G \frac{\partial f}{\partial \alpha} - f \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left( f \frac{\partial G}{\partial \beta} - G \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) d\beta \right] = 0.$$

Here  $f \equiv \bar{X}$  or  $f \equiv \bar{Y}$ , and  $G(a, b, \alpha, \beta)$  – Green's function. Besides,

$$G(a, b, \alpha, \beta) \equiv J_0 \left[ 2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)} \right],$$

where  $J_0 \left[ 2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)} \right]$  – Bessel function of the zero order.

Having the solution of the equations (15), we can find the dependence of  $x$  and  $y$  from  $\alpha$  and  $\beta$ . The equations (14) virtually give dependence of  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  from  $\alpha$  and  $\beta$ , and then the equations (4) and (9) are the dependence of  $x$  and  $y$  from  $\alpha$  and  $\beta$ . The dependence of the quadratic invariant of the stress tensor from  $\alpha$  and  $\beta$  has the form [11]

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = q_0 \exp[2(\beta - \alpha) \sin \phi], \quad (16)$$

here  $\sigma_2$  – the lowest (in algebraic sense) main stress;

$q_0$  – arbitrary constant.

The Mohr-Coulomb yield condition has the form

$$q - p \sin \phi = k \cos \phi, \quad (17)$$

here  $p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2$  and  $k$  – cohesion coefficient which is a constant value. The equations (16) and (17) determine  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  as functions  $\alpha$  and  $\beta$ . Considering (11), the dependences of stress tensor components in the Cartesian coordinates from  $\alpha$  and  $\beta$  are found with the help of standard equations of transformation of tensor components in the plane. Thus, considering the present the dependence of  $x$  and  $y$  from  $\alpha$  and  $\beta$ , the dependences of stress tensor components in the Cartesian coordinates from  $x$  and  $y$  have been obtained in the parameter form.



## Conclusion

It has been shown that the earlier developed methods used for construction of stress field at plane deformation of material, subjected to a yield condition independent of the average stress, using Mikhlin's coordinates, are fully applicable for materials subject to the Mohr-Coulomb yield condition. To do this, it is sufficient to introduce the generalised Mikhlin's coordinates  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  by formulas (fig. 2), as well as the auxiliary functions  $\bar{X}$  and  $\bar{Y}$  by formulas (14). These auxiliary functions satisfy the telegraph equation (15). The same equation is satisfied by Mikhlin's coordinates in the theory of plasticity, based on the yield condition, independent of the average stress. The methods for solving the corresponding boundary value tasks are well developed [1, 3, 4]. All these methods can be used almost without changes to determine the stresses in the granular medium.

## References

1. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Moskow, 1956. 407 p.
2. Hill R., Lee E.H., Tupper S.J. A Method of Numerical Analysis of Plastic Flow in Plane Strain and Its Application to the Compression of a Ductile Material Between Rough Plates, *ASME J. Appl. Mech.*, 1951, vol. 18, no. 1, pp. 46–52.
3. Kachanov L.M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. Moskow, 1956. 324 p.
4. Druanov B.A., Nepershin R.I. Technological Plasticity [Teoriya tekhnologicheskoy plastichnosti]. Moscow, 1990. 272 p.
5. Sokolovskiy V.V. Statics of Soil [Statika sypuchei sredy]. Moscow, 1960. 243 p.
6. Nikolaevskiy V.N. Mechanical properties of soil and theory of plasticity [Itogi nauki i tekhniki Seriya Mekhanika tverdyh deformiruemykh tel]. *Rev. sci. and technol.* The series Solid mechanics, 1972, no. 6, 85 p.
7. Cox G.M., Thamwattana N., McCue S.W., Hill J.M. Coulomb-Mohr Granular Materials: Quasi-Static Flows and the Highly Frictional Limit, *Appl. Mech. Rev.*, 2008, vol. 61, Paper 060802.
8. Goddard J.D. Continuum modeling of granular media, *Appl. Mech. Rev.*, 2014, vol. 66, paper 050801.
9. Spencer A.J.M. A Theory of the Kinematics of Ideal Soils Under Plane Strain Conditions, *J. Mech. Phys. Solids*, 1964, vol. 12, pp. 337–351.
10. Harris D. A hyperbolic Augmented Elasto-Plastic Model for Pressure-Dependent Yield, *Acta Mech.*, 2014, vol. 225, pp. 2277–2299.
11. Alexandrov S. Geometry of plane strain characteristic fields in pressure-dependent plasticity, *ZAMM*, 2015, vol. 95, pp. 1296–1301.

12. Spitzig W.A., Sober R.J., Richmond O. The Effect of Hydrostatic Pressure on the Deformation Behavior of Maraging and HY-80 Steels and Its Implications for Plasticity Theory, *Metallurg. Trans.*, 1976, 7A, pp. 1703–1710.

13. Kao A.S., Kuhn H.A., Spitzig W.A., Richmond O. Influence of Superimposed Hydrostatic Pressure on Bending Fracture and Formability of a Low Carbon Steel Containing Globular Sulfides, *ASME J. Engng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, pp. 26–30.

14. Wilson C.D. A Critical Reexamination of Classical Metal Plasticity, *ASME J. Appl. Mech.*, 2002, vol. 69, no. 1, pp. 63–68.

15. Liu P.S. Mechanical Behaviors of Porous Metals Under Biaxial Tensile Loads, *Mater. Sci. Engng.* 2006, vol. A422, pp. 176–183.

**Information about the authors:**

Sergei E. ALEXANDROV, Dr. Sci. (Phys. and math.), Associate Prof.

E-mail: sergei\_alexandrov@spartak.ru

Elena A. LYAMINA, Cand. sci. (Phys. and math) Associate Prof.

E-mail: lyamina@inbox.ru

Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science (RAS) (Moscow)

© Alexandrov S. E., Lyamina E. A., 2017