

## О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ ТИПИЗАЦИИ ИСТОЧНИКОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ ПО ЗНАКАМ ПЕРВЫХ ВСТУПЛЕНИЙ ВОЛН В ЛАБОРАТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

© 2023 г. В. Б. Смирнов<sup>1, 2, \*</sup>, А. В. Исаева<sup>1</sup>, Т. И. Карцева<sup>2</sup>, А. В. Патонин<sup>3</sup>,  
Н. М. Шихова<sup>3</sup>, А. В. Пономарев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Геофизическая обсерватория “Борок” ИФЗ РАН, г. Борок, Россия

\*E-mail: vs60@mail.ru

Поступила в редакцию 15.04.2022 г.

После доработки 29.08.2022 г.

Принята к публикации 29.08.2022 г.

Предложенная в работе [Zang et al., 1998] и широко используемая в лабораторных экспериментах по физике горных пород процедура разделения типов событий акустической эмиссии (АЭ) на сдвиговые, отрывные и компакционные (*shear, tension and collapse*), опирающаяся на подсчет знаков первых вступлений волн на акустических датчиках, рассмотрена со статистических позиций. В предположении однородного и независимого распределения ошибок определения знаков вступлений на датчиках получены оценки статистической значимости и мощности критерия разделения типов для заданного количества используемых датчиков. Рассмотрены и сопоставлены между собой три подхода к построению статистического критерия, основанные на оценке вероятности события, симметричном и несимметричном критериях проверки гипотез. На основе результатов статистического исследования даны практические рекомендации по выбору порога для разделения типов событий АЭ в экспериментальных исследованиях.

**Ключевые слова:** акустическая эмиссия, фокальный механизм, статистическая проверка гипотез, лабораторные эксперименты, физика горных пород.

**DOI:** 10.31857/S0002333723010052, **EDN:** CADTET

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Тип разрушения в очаге землетрясения, известный в сейсмологии как фокальный механизм [Aki, Richards, 2002], несет существенную информацию, которая используется для прояснения тектонических условий и причин возникновения землетрясения [Stein, Wysession, 2003; Kanamori, 2009; Watts, 2015; Emdnov et al., 2022; Timoshkina et al., 2022]. Решения фокальных механизмов производятся по набору знаков первых вступлений волн на сети сейсмических станций, окружающих очаг землетрясения [Aki, Richards, 2002; Stein, Wysession, 2003]. Более продвинутой информацией об очагах землетрясений являются оценки тензора сейсмического момента (центроид-моменты) [Kostrov, Das, 2005; Udias et al., 2014; D’Amico, 2018]. Такие оценки в массовом порядке надежны для достаточно сильных землетрясений, они публикуются в нескольких мировых каталогах. На региональном уровне центроид-моменты определяются далеко не всеми сейсмическими агентствами (см., например, [Abubakirov et al.,

2021]), и фокальные механизмы все еще остаются распространенным типом сведений о характере подвижек в очагах слабых и умеренных землетрясений.

При лабораторных исследованиях по физике сейсмического процесса также используются решения фокальных механизмов и оценки тензоров момента источников акустических событий, рассматриваемых как микротрещины в испытываемых образцах горных пород [Sondergeld, Estey, 1982; Ohtsu, 1991; 2008a; 2008b; Ohtsu et al., 2007; Clarke et al., 2019; Lei et al., 1992; Kwiatek et al., 2014; Charalampidou et al., 2015; Kolář et al., 2020; Petružálek et al., 2018; 2019; 2020; Zang et al., 2000; Stierle et al., 2016; Graham et al., 2010; Naoi et al., 2020]. Главное преимущество лабораторных систем регистрации акустических событий по сравнению с сейсмическими сетями заключается в том, что в лабораторных условиях более равномерное окружение датчиками очаговой области. Однако надежное решение фокальных механизмов и отыскание тензоров момента при лабора-

торных экспериментах сопряжено с рядом технических трудностей.

Во-первых, количество датчиков обычно составляет 12–16, что согласно сейсмологической практике, находится на нижней допустимой грани для получения информации о механизме очага землетрясения. В глобальном Гарвардском каталоге для этих целей используются сотни сейсмических станций, а в региональном Калифорнийском каталоге количество станций превышает тысячу.

Во-вторых, частотный диапазон лабораторных акустических датчиков таков, что в экспериментах количество длин волн, укладываемое на интервале источник–приемник, обычно не превосходит 10 (а часто составляет 3–5), что на порядок-два меньше, чем в полевой сейсмологии. Это обстоятельство снижает точность локации акустических источников по сравнению с локацией очагов землетрясений, что, в свою очередь, снижает надежность решения фокального механизма в условиях лабораторных экспериментов.

Компромиссным решением вопроса получения информации о характере источника акустической эмиссии (АЭ) в лабораторных условиях является типизация микротрещин, излучающих акустические волны, которые регистрируются системой датчиков, расположенных на поверхности образца [Zang et al., 1996; 1998]. На основе анализа волновых форм АЭ соответствующему излучателю (очагу АЭ) присваивается один из трех типов:  $S$  – сдвиговый очаг (трещина сдвига),  $T$  – очаг расширения (трещина отрыва),  $C$  – очаг сжатия или компакция (например, схлопывание пор горной породы) [Zang et al., 1998].

Идея идентификации очага того или иного типа согласно работе [Zang et al., 1998] заключается в следующем. Если акустические волны излучаются при расширении некоторой микрообласти в образце горной породы (разрыв поры, образование трещины отрыва), то такой очаг обладает однополярной диаграммой направленности излучения [Ohtsu, 2008a], и все датчики на поверхности образца регистрируют в первом вступлении импульс одного знака – в данном случае импульс сжатия, которому в работе [Zang et al., 1998] присвоен знак минус. В классификации по работе [Zang et al., 1998] это будет очаг АЭ типа  $T$ . Такая ситуация в сейсмологии аналогична, например, взрыву, произведенному в земной коре на некоторой глубине.

Если, наоборот, происходит схлопывание локальной пустотности в образце (например, компакция порового пространства), то все датчики в первом вступлении зарегистрируют положительный импульс (импульс растяжения). Это будет очаг типа  $S$ .

В случае сдвиговой подвижки в очаге акустического события излучение имеет квадрупольный характер: в двух секторах излучаются импульсы сжатия, в двух – импульсы растяжения [Stein, Wyssession, 2003; Udias, Buform, 2018; Ohtsu, 2008a]. Соответственно, в идеале равномерного окружения источника АЭ акустическими датчиками половина из них зафиксирует положительные вступления, половина отрицательные. В этом случае мы имеем событие типа  $S$ .

В условиях реального лабораторного эксперимента идеальные сценарии обнаружения событий АЭ разных типов ( $T$  – на всех датчиках знаки минус,  $C$  – на всех датчиках знаки плюс и  $S$  – количество плюсов равно количеству минусов), оказываются “зашумлены”. Различные факторы накладывают на детерминированную теоретическую картину распределения знаков вступлений на датчиках случайную компоненту. К ним, в первую очередь, относятся: неравномерное покрытие датчиками поверхности образца, в частности, как правило, отсутствие датчиков на торцевых поверхностях цилиндрических образцов; ограниченная диаграмма направленности чувствительности датчиков и случайная ориентация трещин по отношению к системе акустических наблюдений; неравномерное и анизотропное распределение диссипативных свойств образца и их изменения в процессе постепенного разрушения образца; различное качество контакта датчиков с образцом (и, соответственно, разная эффективная чувствительность датчиков), обусловленное как неоднородностями поверхности образца, так и технологическими особенностями крепления датчиков на образце; механические и электрические шумы, создающие помехи в приемном тракте и др. Эти факторы приводят к тому, что на том или ином датчике либо вообще не выделяется вступление волны, либо выделяется не первое вступление. Во втором случае из-за накладывающихся на акустический сигнал помех пропускается один или несколько полупериодов волны, что определяет вероятность неверного определения знака вступления.

Ошибки определения знаков первых вступлений на датчиках могут иметь различные, не связанные между собой, причины. В этой ситуации процедура типизации очагов АЭ может рассматриваться с позиций математической статистики. Если наблюдаемое количество плюсов превышает количество минусов, и такое преобладание плюсов является статистически значимым, то можно говорить о реализации события типа  $S$ . Если минусов больше, чем плюсов – то событие типа  $T$ . Если же нельзя сделать заключения о статистически значимом преобладании того или иного знака, то событию следует присвоить тип  $S$ .

Для отнесения очага АЭ к тому или иному типу в работе [Zang et al., 1998] было предложено использовать порог дискриминации по величине, названной “полярностью” (*polarity*, формула (2) в работе [Zang et al., 1998]):

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i, \quad (1)$$

где  $G_i$  обозначает знак вступления на  $i$ -м датчике:  $G_i = 1$ , если знак плюс и  $G_i = -1$ , если знак минус;  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  — количество датчиков;  $-1 \leq \delta \leq 1$ . Величина порога отнесения очага АЭ к тому или иному типу выбиралась эмпирически и составила 0.25 [Zang et al., 1998]. Таким образом, если  $\delta \leq -0.25$ , то очаг относят к типу  $T$ ; если  $-0.25 < \delta < 0.25$ , то — к типу  $S$ ; если  $\delta \geq 0.25$ , то — к типу  $C$ .

Простота предложенной в работе [Zang et al., 1998] процедуры по сравнению с процедурами решения фокальных механизмов или оценки тензора сейсмического момента позволяет производить массовую типизацию очагов АЭ в экспериментах даже с достаточно простыми системами регистрации сигналов АЭ, что определяет ее широкое использование в лабораторных исследованиях вплоть до настоящего времени [Zang et al., 2000; Stanchits et al., 2006; 2011; Fortin et al., 2009; Graham et al., 2010; Stanchits, Dresen, 2010; Charalampidou et al., 2015; Patonin, Shikhova, 2018; Petružálek et al., 2019; Zhang et al., 2019]. При этом, однако, встает вопрос о статистической значимости принятых решения об отнесении очага АЭ к тому или иному типу в зависимости от количества используемых датчиков и доли датчиков, на которых идентифицировано вступление того или иного знака. В настоящей статье приведены результаты рассмотрения этого вопроса в предположении однородного и независимого распределения ошибок определения знаков вступлений.

## 2. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

В предположении что факторы, “зашумляющие” сигнал на конкретном датчике, не зависят от факторов, действующих в это же время на других датчиках, можно рассматривать  $G_i$  как набор  $n$  независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть вероятность “выпадения” знака минус на датчике равна  $p$ , т.е.  $P(G_i = -1) = p$ , соответственно, вероятность выпадения знака плюс равна  $q = 1 - p$ , или  $P(G_i = 1) = q$ .

Для определенности будем обозначать через  $(n, k)$  случай, когда на  $k$  из  $n$  датчиков “выпали” знаки минус. В таком случае вероятность реализации случая  $(n, k)$  определяется биномиальным распределением:

$$P(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (2)$$

Примем, что для очага сдвигового типа  $S$  вероятности “выпадения” на любом датчике знаков плюс и минус равны:  $p = q = 1/2$ . Тогда, из формулы (2) получаем:

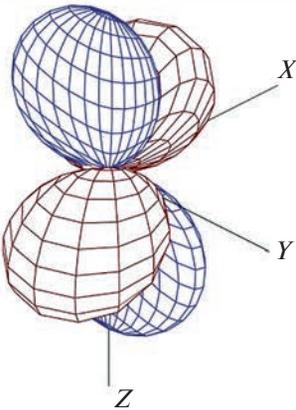
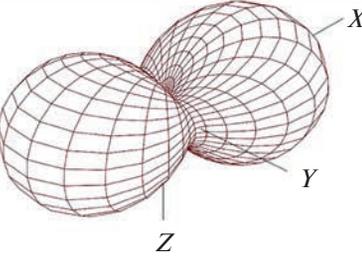
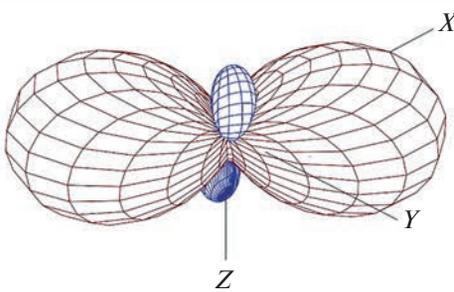
$$P(n, k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3)$$

Заметим, что в статистическом смысле это эквивалентно известной задаче о выпадении  $k$  раз решки в  $n$  опытах по подбрасыванию монеты.

## 3. ФИЗИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ

С физической точки зрения различные значения вероятности  $p$  в нашей модели соответствуют различным механизмам очагов акустических событий. Для очагов “чистых” типов — сдвига, расширения или коллапса — вероятность  $p$  “выпадения” минусов может принимать только одно из трех значений:  $1/2$  — для сдвига  $S$ ;  $0$  — для коллапса  $C$ ;  $1$  — для расширения  $T$ .

В природе могут быть очаги смешанного типа, например, сдвиг с расширением. Такое наблюдается, в частности, в вулканических постройках, когда магма “расширяет” трещину, находящуюся в сдвиговом поле напряжений. В сейсмологии события с очагами смешанных типов известны как недипольные (*non double-couple*) [Stein, Wysession, 2003; Dreger, 2018]. Такие очаги наблюдаются и в лабораторных экспериментах [Petružálek et al., 2018; 2020; Zhang et al., 2019; Zhuang, Zang, 2021]. Параметры недипольных очагов описываются тензором сейсмического момента, который в общем случае рассчитывается по полным волновым формам, а в лабораторных экспериментах — с учетом не только знаков, но и величин первых вступлений продольных волн [Graham et al., 2010]. Пример диаграммы направленности излучения при сдвиге с расширением  $ST$  (*shear-tensile*) в сравнении с чистыми типами сдвига  $S$  и отрыва (расширения)  $T$  показан на рис. 1 (согласно работе [Petružálek et al., 2020]). На рисунке видно, что диаграмма остается квадрупольной, но лепестки волн сжатия и растяжения теперь становятся неодинаковыми (в отличие от чисто сдвигового источника типа  $S$ ). Это означает, что в случае определения в эксперименте знаков по превышению вступления некоторого порога в положительную или отрицательную сторону, количество минусов в случае смешанного очага сдвига с расширением будет больше, чем при чистом сдвиге. Соответственно, в этом случае вероятность возникновения минусов  $p$  может быть больше  $1/2$ , но меньше 1.

Тип $S$	Тип $T$	Тип $ST$
		
$p = 1/2$	$p = 1$	$1/2 < p < 1$

**Рис. 1.** Диаграммы излучения очагов разных типов [Petružálek et al., 2020] и соответствующие им вероятности  $p$ . Красным цветом показаны лепестки волн сжатия (знаки минус на датчиках), синим – волн расширения (знаки плюс на датчиках).

#### 4. МЕТОД ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ (*P-VALUE APPROACH*)

Рассмотрим вопрос о вероятности  $P(n, k)$  реализации случая  $(n, k)$  в предположении справедливости гипотезы:  $p = q = 1/2$  (соответствует типу  $S$  очага зарегистрированного события АЭ). Воспользуемся подходом расчета  $P$ -значения, используемым иногда в математической статистике наряду с методом проверки статистических гипотез [Stern et al., 2016]. Данный подход подразумевает, что для фактически наблюдаемого события рассчитывается вероятность его наступления при условии, что гипотеза была верна. В нашем случае в качестве такого события рассмотрим факт “выпадения” конкретного количества минусов  $k$ . Гипотеза  $H_0$  сводится к равенству:  $p = q = 1/2$ , а вероятность “выпадения”  $k$  минусов при условии справедливости  $H_0$  определяется формулой (3).

Подход оценки  $P$ -значения предполагает, что если рассчитанная вероятность рассматриваемого события мала, то мы должны заключить, что реализация такого маловероятного случая в эксперименте указывает на несправедливость гипотезы  $H_0$ . Таким образом, в нашем случае, получив в эксперименте конкретное количество минусов  $k$  и рассчитав вероятность по формуле (3), следует сравнить эту вероятность с некоторым порогом. Если рассчитанная вероятность оказалась ниже порога, то мы отклоняем гипотезу  $H_0$  и принимаем, что тип данного события АЭ –  $S$  или  $T$ .

Дальнейший выбор между  $S$  или  $T$ , согласно идее работы [Zang et al., 1998], осуществляется детерминистским образом: определяется преобладание знаков плюс или минус, чтобы отнести событие к типу  $S$  или  $T$ , соответственно.

##### 4.1. Вероятности выпадения конкретного количества минусов на $n$ датчиках

С использованием  $P$ -значений мы можем наглядно представить зависимость вероятности выпадения конкретного количества минусов  $k$  от количества датчиков  $n$ . При этом величину вероятности  $(1 - P(n, k))$  будем воспринимать как характеристику “величины статистических доказательств”, направленных против правдоподобия “нулевой” гипотезы  $H_0$  ( $p = q = 1/2$ ) [Amrhein et al., 2017].

Иллюстрацию наших оценок мы проведем на примере акустической системы, используемой в Геофизическая обсерватория “Борок” Института физики Земли РАН. В составе сервоуправляемого прессового комплекса INOVA [Patonin et al., 2014] используется система регистрации сигналов АЭ шестнадцатью продольными датчиками, тем самым количество “ненулевых” датчиков с определенными на них знаками вступлений заключено в диапазоне от 4 до 16. На рис. 2 представлены рассчитанные по формуле (3) кривые вероятностей  $P(n, k)$  “выпадения”  $k$  минусов в случаях различного количества “ненулевых” датчиков  $n$ . Явля-

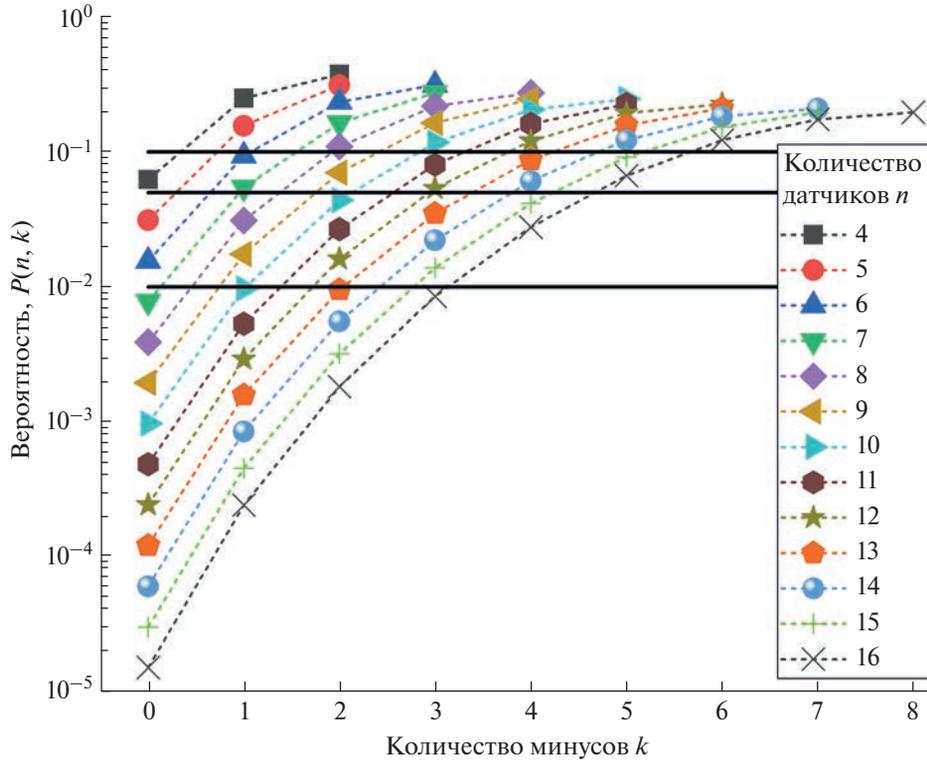


Рис. 2. Вероятность “выпадения”  $k$  минусов в случае  $n$  датчиков, рассчитанная по формуле (3). Горизонтальными линиями показаны уровни вероятностей 0.01, 0.05 и 0.1.

ясь вероятностью “выпадения” минусов на  $k$  датчиках из  $n$  в предположении справедливости “нулевой” гипотезы  $H_0$ , величина  $P(n, k)$  показывает вероятность реализации события АЭ типа  $S$  в случае  $(n, k)$ . Для сравнения на рис. 4 горизонтальными линиями показаны уровни вероятностей 0.01, 0.05 и 0.1. Обычно такие величины используют в качестве уровней значимости в методах проверки статистических гипотез.

#### 4.2. Вероятности достижения порогов “полярности”

Поскольку методика работы [Zang et al., 1998] предусматривает отделение очагов типа  $S$  от типов  $T$  и  $C$  при переходе “полярности” через пороги  $-0.25$  и  $0.25$ , пересчитаем ось абсцисс на рис. 2, связав ее с величинами “полярности” из формулы (1). Пусть  $k$  датчиков из  $n$  зарегистрировали знак минус, соответственно,  $(n - k)$  зарегистрировали знак плюс. Тогда, согласно (1) “полярность” равна:

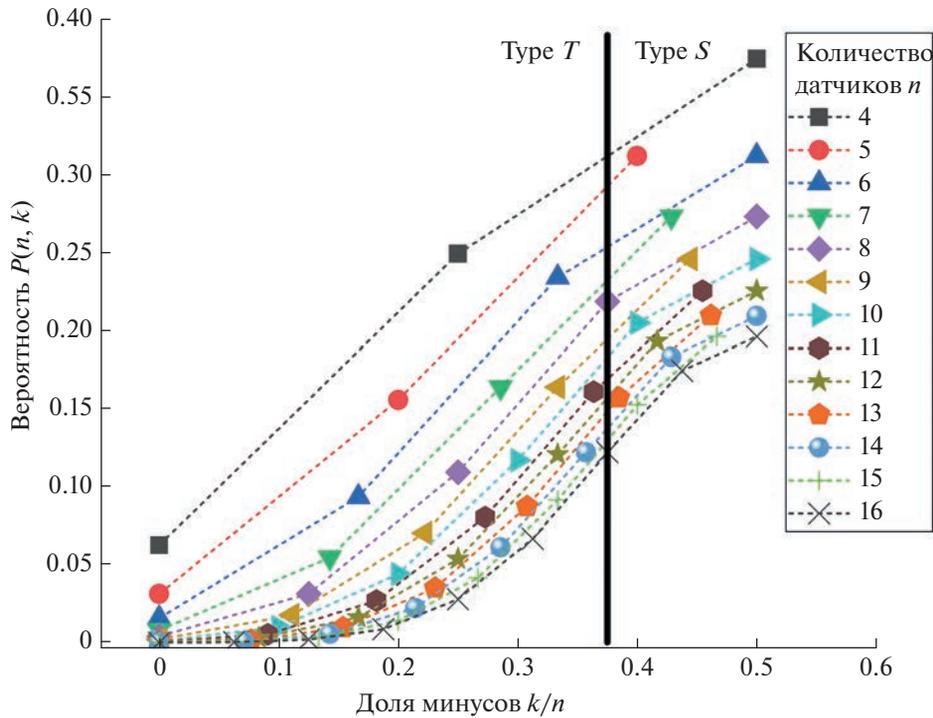
$$\delta = \frac{(n - k) - k}{n} = 1 - 2\frac{k}{n}. \quad (4)$$

Для определенности теперь будем считать, что плюсов больше, чем минусов, следовательно,

значение “полярности”  $\delta$  положительное. Из (4) видно, что величина “полярности” определяется долей знаков  $k/n$  (в рассмотренном случае – долей знаков минус). К примеру, из (4) находим, что при выбранном в работе [Zang et al., 1998] пороге  $\delta_0 = 0.25$  (разделяющем типы  $S$  и  $C$ ), соответствующее значение  $\frac{k}{n} = 0.375$ .

На рис. 3 вероятность  $P(n, k)$  представлена как функция отношения  $k/n$  для разных количеств датчиков  $n$ . Также на рис. 3 вертикальной линией отмечено значение  $\frac{k}{n} = 0.375$ , отвечающее  $\delta_0 = 0.25$ . Как обсуждалось выше, в рамках подхода, подразумевающего расчет  $P$ -значений, по величине  $P(n, k)$  принимается решение о том, отвергается гипотеза  $H_0$  (тип события  $S$ ) или нет. При этом  $P(n, k)$  сравнивается с некоторой пороговой величиной вероятности, ниже которой наблюдаемое событие признается маловероятным, и гипотеза  $H_0$  отклоняется.

Если в своих рассуждениях мы зафиксируем не какое-то конкретное количество минусов  $k$ , а отношение  $\frac{k}{n} = 0.375$ , то из рис. 3 видно, что с ро-



**Рис. 3.** Вероятность “выпадения”  $k$  минусов в случае  $n$  датчиков в зависимости от доли знаков минус  $k/n$ . Сплошная вертикальная линия отмечает значение  $k/n = 0.375$ , соответствующее порогу  $\delta_0 = 0.25$ , предложенному в работе [Zang et al., 1998].

стом количества датчиков соответствующая вероятность  $P(n, k)$  уменьшается (ордината пересечения  $P(n, k)$  с вертикальной линией при  $\frac{k}{n} = 0.375$  уменьшается с ростом количества датчиков  $n$ ). Таким образом, если при большем количестве датчиков  $n$  мы наблюдаем  $\frac{k}{n} = 0.375$  или меньшее значение, то все более уверенно мы можем считать гипотезу  $H_0$  (тип события  $S$ ) несправедливой. Действительно, если при большом количестве датчиков наблюдаемое количество минусов мало, то разумно отказаться от предположения, что наблюдаемое событие относится к типу  $S$ .

На рис. 4 сплошной линией показана зависимость вероятности  $P(n, k)$  от количества датчиков  $n$  для  $\delta_0 = 0.25$  из [Zang et al., 1998] (что соответствует  $\frac{k}{n} = 0.375$ ). Приведенные на рис. 4 значения вероятности получены как ординаты пересечения кривых  $P(n, k)$  с вертикальной линией  $\frac{k}{n} = 0.375$  на рис. 3. Будем обозначать такую зависимость как  $P(n, \delta_0)$ .

#### 4.3. Обсуждение: метод вероятности события

На рис. 4 видно, что при пороговом значении  $\delta_0 = 0.25$ , предложенном в работе [Zang et al., 1998], даже для 16 датчиков уровень вероятности  $P(n, \delta_0)$  превышает значение 0.1. Обычно уровень вероятности 0.1 используют в методе проверки статистических гипотез как максимально допустимый уровень вероятности ошибок 1-го рода (уровень значимости), т.е. вероятности ошибочно отвергнуть верную гипотезу. Получается, что выбор порога  $\delta_0 = 0.25$  предписывает отвергать гипотезу  $H_0$  ( $S$ -тип события), хотя при этом и при справедливой гипотезе  $H_0$  вероятность наблюдать в эксперименте соответствующие соотношения плюсов и минусов ( $\frac{k}{n} \leq 0.375$ ) сравнительно велика — более чем 0.1. Таким образом, выбор  $\delta_0 = 0.25$  может приводить к ошибочному отказу от гипотезы  $H_0$  и занижать, тем самым, долю событий типа  $S$ .

Ситуация улучшается, если использовать порог  $\delta_0 = 0.5$  ( $\frac{k}{n} = 0.25$ ). Соответствующая кривая показана на рис. 4 пунктиром. В этом случае “значимость” на уровне 0.1 (и ниже) достигается при числе датчиков 9 и более. Таким образом, для

порога  $\delta_0 = 0.5$  получаем следующее правило разделения типов  $S$  и  $C$ : если знаки минус наблюдаются не более чем на четверти датчиков, то мы отказываемся от типа  $S$  в пользу  $C$ . При этом если мы все же ошибаемся, к примеру, наблюдая  $\frac{k}{n} = 0.25$  и отвергая на самом деле верную гипотезу  $H_0$  о  $S$ -типе события, то при 9 и более датчиках вероятность такой ошибки не превысит 0.1, т.е. будет относительно невелика.

Аналогичные рассуждения можно провести для противоположного случая, когда количество минусов превышает количество плюсов, чтобы получить правило разделения типов  $S$  и  $T$ .

Для обеспечения одинакового уровня вероятности отклонения гипотезы  $H_0$  ( $S$ -тип) при различном количестве датчиков нужно задавать для каждого  $n$  свой порог селекции  $\delta_{\min}$ . На рис. 5а и в табл. 1 представлены зависимости порогового значения  $\delta_{\min}$  от  $n$  для уровня вероятности, заданного равным 0.1. На этом же рисунке для каждого  $n$  показано максимальное количество датчиков со знаком минус  $k_{\max}$ , обеспечивающее отклонение гипотезы  $H_0$  о реализации события типа  $S$  в пользу события типа  $C$ . Величина  $k_{\max}$  рассчитана согласно (3) из условия:  $P(n, k_{\max}) \leq 0.1$ . На рис. 5б и в табл. 1 для сравнения представлены аналогичные зависимости для более жесткого уровня вероятности 0.05.

### 5. МЕТОД ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Наряду с рассмотренным выше методом вероятности события ( $P$ -value approach), в математической статистике используют более продвинутый метод проверки статистических гипотез. Дело в том, что применение метода вероятности события может приводить к неконтролируемым ошибкам 1-го рода [Amrhein et al., 2017]. Метод проверки статистических гипотез предполагает прямое отыскание вероятностей ошибок 1-го рода (отклонить справедливую нулевую гипотезу) и 2-го рода (принять несправедливую нулевую гипотезу). Это позволяет для конкретного критерия рассматривать величины вероятностей ошибок 1-го и 2-го родов в совокупности, в зависимости от селектирующего параметра критерия.

Во ВВЕДЕНИИ отмечалось, что согласно пороговому критерию, предложенному в работе [Zang et al., 1998], события АЭ относятся к типу  $S$ , если величина “полярности” (1) лежит в диапазоне  $-\delta_0 < \delta < \delta_0$ , к типу  $T$  – если  $\delta$  оказывается меньше или равна  $-\delta_0$ , к типу  $C$  – если  $\delta$  больше или равна  $\delta_0$ , где величина порога  $\delta_0$  задается заранее. Из соотношения (4) следует, что задание

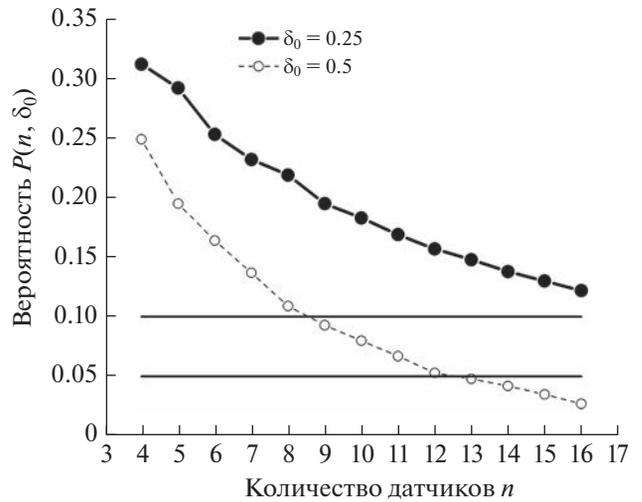


Рис. 4. Зависимость вероятности достижения порогового значения “полярности”  $\delta_0$  от количества датчиков  $n$  в предположении справедливости гипотезы  $H_0$ :  $p = q = 1/2$ . Сплошная кривая – для порогового значения  $\delta_0 = 0.25$  из работы [Zang et al., 1998]. Пунктирная кривая – для  $\delta_0 = 0.5$ . Горизонтальными линиями отмечены значения вероятностей 0.1 и 0.05.

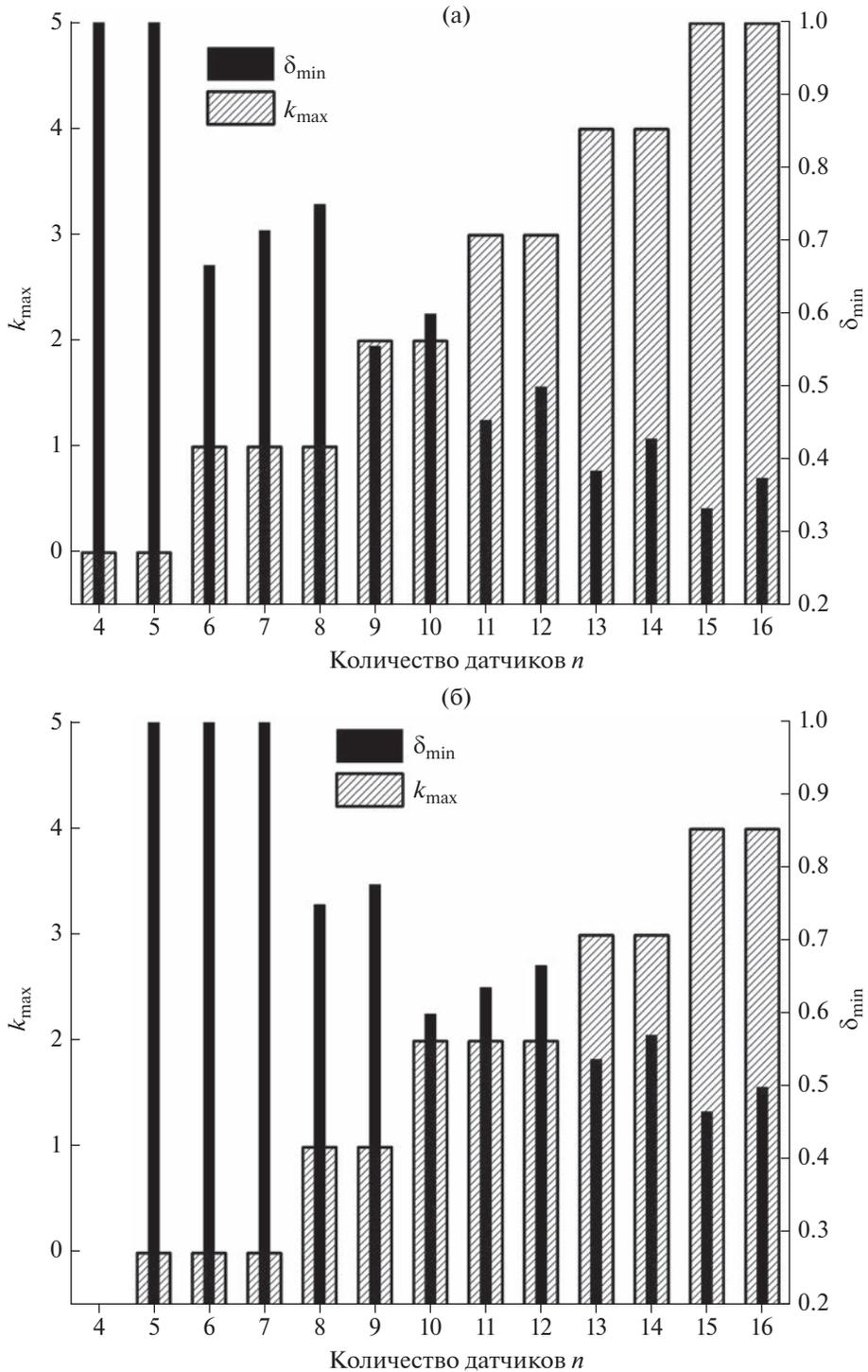
порога  $\delta_0$  эквивалентно заданию порогового значения для количества знаков минус (или плюс) в наборе из  $n$  датчиков. Далее мы будем пользоваться именно такой формулировкой порогового критерия, в которой задается диапазон изменений для количества знаков минус, а решение о типе события ( $S$ ,  $T$  или  $C$ ) принимается в зависимости от того, в каком диапазоне оказалось фактически наблюдаемое количество минусов. Мы рассмотрим такой подход с позиций теории проверки статистических гипотез, оценим значимость и мощность соответствующих критериев.

#### 5.1. Симметричный критерий

Обозначим, для определенности, количество фактически “выпавших” минусов через  $\eta$ . Заметим, что значение  $\eta$  непосредственно вычисляется через величины  $G_i$  – знаки вступления на  $i$ -м датчике,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $G_i$  принимают значения 1 или  $-1$ . Формально такую связь можно записать в виде:

$$\eta = \sum_{i=1}^n S(G_i),$$

где  $S(G_i) = 1$ , если  $G_i = -1$ , и  $S(G_i) = 0$ , если  $G_i = 1$ . Поскольку, как обсуждалось выше,  $G_i$  рассматриваются как независимые одинаково распределенные случайные величины, то и вычисляемая с их помощью величина  $\eta$  тоже является случайной. Если мы, как раньше, считаем, что



**Рис. 5.** Порог селекции  $\delta_{\min}$  и максимальное количество  $k_{\max}$  знаков минус в наборе из  $n$  датчиков, обеспечивающие отклонение гипотезы  $p = q = 1/2$  (реализация события типа  $S$ ) в пользу гипотезы о реализации события типа  $C$  при заданном значении пороговой вероятности  $P_0 = P(n, k_{\max}) = P(n, \delta_{\min})$ : (а) –  $P_0 = 0.1$ ; (б) –  $P_0 = 0.05$ .

$P(G_i = -1) = p$  и  $P(G_i = 1) = q = 1 - p$ , тогда  $\eta$  будет иметь биномиальное распределение, т.е.  $P(\eta = k) = P(n, k)$ , задаваемое формулой (2), где  $k = 0, \dots, n$ .

Переформулируем в терминах пороговых значений для количества минусов условие из работы [Zang et al., 1998]: если величина “полярности” (1) лежит в диапазоне  $-\delta_0 < \delta < \delta_0$ , то событие АЭ от-

носят к типу  $S$ , где порог  $0 < \delta_0 \leq 1$ . Для количества минусов такое симметричное условие формулируется следующим образом: если фактически наблюдаемое количество минусов  $\eta$  лежит в диапазоне  $m_0 < \eta < n - m_0$ , то событие АЭ следует отнести к типу  $S$ .

Заметим, что согласно (4) значению  $\delta_0 = 1$  соответствует пороговое значение для количества минусов  $m_0 = 0$ . Тогда для нечетного количества датчиков  $n$  порог  $m_0$  может принимать значения  $m_0 = 0, 1, \dots, \left(\frac{n}{2}\right)$ , где  $n/2$  – целая часть числа. Для четного количества датчиков  $n$  диапазон возможных изменений порогового значения  $m_0$  включает в себя  $m_0 = 0, 1, \dots, \left(\frac{n}{2}\right) - 1$  (вариант  $m_0 = \frac{n}{2}$  исключается, поскольку в этом случае  $\delta_0 = 0$ , что нарушает условие  $0 < \delta_0 \leq 1$ ).

Как обсуждалось выше, реализация события АЭ типа  $S$  отождествляется с гипотезой  $H_0$ :  $p = q = 1/2$ . Альтернативой можно считать ситуацию, что в проведенном эксперименте наблюдалось событие АЭ, которое не относится к типу  $S$ . При этом, в соответствии с нашими предположениями, случайная величина  $\eta$ , выражающая количество минусов, в любом случае имеет биномиальное распределение (2). Тогда альтернативу  $H_1$  можно сформулировать как  $p \neq 1/2$  в формуле (2). Поскольку величина  $p$  имеет смысл вероятности, ее возможные значения лежат в диапазоне от 0 до 1. Тогда альтернатива  $H_1$  задается условием:  $0 \leq p < 1/2$  или  $1/2 < p \leq 1$ .

Сформулируем теперь в терминах ограниченный на наблюдаемое количество минусов симметричный статистический критерий отделения событий типа  $S$  от  $T$  или  $C$ : гипотеза  $H_0$  ( $S$ -тип) принимается, если  $m_0 < \eta < n - m_0$ ; гипотеза  $H_0$  отклоняется, если  $\eta \leq m_0$  или  $\eta \geq n - m_0$ . В такой постановке события типов  $T$  и  $C$  не разделяются между собой, а лишь отделяются от событий типа  $S$ .

5.1.1. Уровень значимости симметричного критерия

Теперь для сформулированного критерия получим связь его уровня значимости с величиной порога  $m_0$ . По определению уровень значимости  $\alpha$  статистического критерия равен вероятности совершить ошибку первого рода [Everitt, Skrondal, 2002; Vorovkov, 1998]. Ошибка первого рода состоит в том, что справедливую гипотезу  $H_0$  ошибочно отклоняют. В наших терминах получаем, что в таком случае значение  $\eta$  оказалось в диапазоне  $\eta \leq m_0$  или  $\eta \geq n - m_0$ , но при этом все-та-

**Таблица 1.** Порог селекции  $\delta_{\min}$  и максимальное количество  $k_{\max}$  знаков минус при  $n$  датчиках, обеспечивающие отклонение гипотезы  $p = q = 1/2$  при заданном значении порога вероятности  $P_0 = P(n, k_{\max}) = P(n, \delta_{\min})$

$n$	$P_0 = 0.1$		$P_0 = 0.05$	
	$k_{\max}$	$\delta_{\min}$	$k_{\max}$	$\delta_{\min}$
4	0	1	—	—
5	0	0.66667	0	1
6	1	0.71429	0	1
7	1	0.75	0	1
8	1	0.55556	1	0.75
9	2	0.6	1	0.77778
10	2	0.45455	2	0.6
11	3	0.5	2	0.63636
12	3	0.38462	2	0.66667
13	4	0.42857	3	0.53846
14	4	0.33333	3	0.57143
15	5	0.375	4	0.46667
16	5	1	4	0.5

Прочерки в строке  $n = 4$  для  $P_0 = 0.05$  означают, что вероятность выпадения нуля минусов (выпадения четырех плюсов) при справедливости гипотезы  $p = q = 1/2$  в этом случае больше 0.05.

ки была справедлива  $H_0$ . Соответственно, в такой ситуации, пользуясь сформулированным выше критерием, мы совершим ошибку первого рода. Таким образом, зависимость  $\alpha$  от выбора  $m_0$  для симметричного критерия можно записать в виде:

$$\alpha(m_0) = P(\eta \leq m_0 | H_0) + P(\eta \geq n - m_0 | H_0). \quad (6)$$

Поскольку в предположении справедливости  $H_0$  биномиальное распределение, контролирующее  $\eta$ , симметрично, можно записать выражение для уровня значимости  $\alpha$  как

$$\alpha(m_0) = 2P(\eta \leq m_0 | H_0) = 2 \sum_{k=0}^{m_0} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (7)$$

На рис. 6 показаны графики зависимости уровня значимости  $\alpha(m_0)$  от порогового значения  $m_0$ , рассчитанные по формуле (7) для различного количества датчиков  $n$ . Видно, что, во-первых, с ростом количества датчиков  $n$  величина  $\alpha(m_0)$  уменьшается – таким образом, увеличение количества датчиков снижает вероятность совершить ошибку первого рода и отклонить на самом деле верную гипотезу. Во-вторых, при фиксированном количестве датчиков  $n$  с ростом  $m_0$  наблюдается рост  $\alpha(m_0)$ . Такой результат тоже понятен. Увеличение  $m_0$  сужает интервал  $m_0 < \eta < n - m_0$

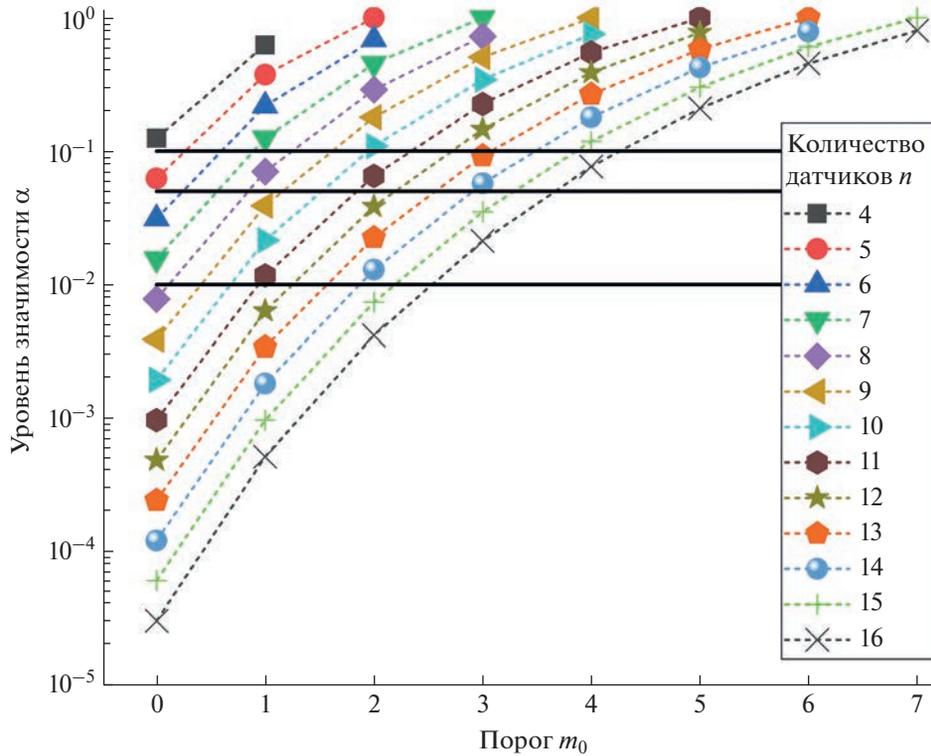


Рис. 6. Зависимость уровня значимости  $\alpha(m_0)$  от порогового значения  $m_0$ . Горизонтальными линиями показаны уровни вероятностей 0.01, 0.05 и 0.1.

для допустимого количества минусов  $\eta$ , когда мы считаем, что гипотеза  $H_0$  ( $S$ -тип) справедлива. Для “узких” интервалов мы будем часто отклонять гипотезу  $H_0$ , что как раз может приводить к ошибкам первого рода, поэтому на рис. 6 мы видим рост  $\alpha(m_0)$  при увеличении  $m_0$ .

### 5.1.2. Мощность симметричного критерия

Чтобы определить мощность статистического критерия  $\gamma$ , нужно рассчитать вероятность ошибки второго рода  $\beta$ , т.е. вероятность принять несправедливую гипотезу  $H_0$ , когда на самом деле верна альтернатива  $H_1$  [Everitt, 2002]. Мощность статистического критерия и вероятность ошибки второго рода связаны простым соотношением:  $\gamma = (1 - \beta)$ .

Для рассматриваемого симметричного критерия нужно вычислить вероятность

$$\begin{aligned} \beta &= P(m_0 < \eta < n - m_0 | H_1) = \\ &= \sum_{k=m_0+1}^{n-(m_0+1)} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned} \quad (8)$$

В альтернативе  $H_1$  вероятность  $p$  может быть некоторым значением в диапазоне:  $0 \leq p < 1/2$

или  $1/2 < p \leq 1$ . Согласно (8) вероятность ошибки второго рода  $\beta$  зависит от величины  $p$ . Варьируя  $p$ , можно выяснить, какое наихудшее (наибольшее) значение вероятности ошибки второго рода  $\beta$  можно получить. На рис. 7а показана зависимость  $\beta$  от  $p$  для 16 датчиков при различном уровне порогового значения  $m_0$ . На этом же рисунке показана зависимость мощности критерия  $\gamma = (1 - \beta)$  от величины  $p$  в диапазонах  $0 \leq p < 1/2$  и  $1/2 < p \leq 1$ . На рис. 7б для примера представлены зависимости  $\beta$  и  $\gamma$  для меньшего количества датчиков.

### 5.1.3. Обсуждение: симметричный критерий

а) На рис. 7 видно, что для  $p = 0$  или  $p = 1$  мощность критерия  $\gamma$  равна 1. Это – понятно: если при вероятности, например,  $p = 0$  “выпадает” хотя бы один минус, то  $p$  уже гарантировано не равна 0 – альтернативная гипотеза  $p = 0$  отвергается с вероятностью  $\gamma = 1$ .

б) Видно, что для всех  $m_0$  наихудший результат (максимальные значения  $\beta$  получается, когда значение  $p$  близко к  $1/2$ . Это – тоже понятно: чем ближе параметры (значения) при нулевой гипотезе и при альтернативе, тем сложнее их разделить с

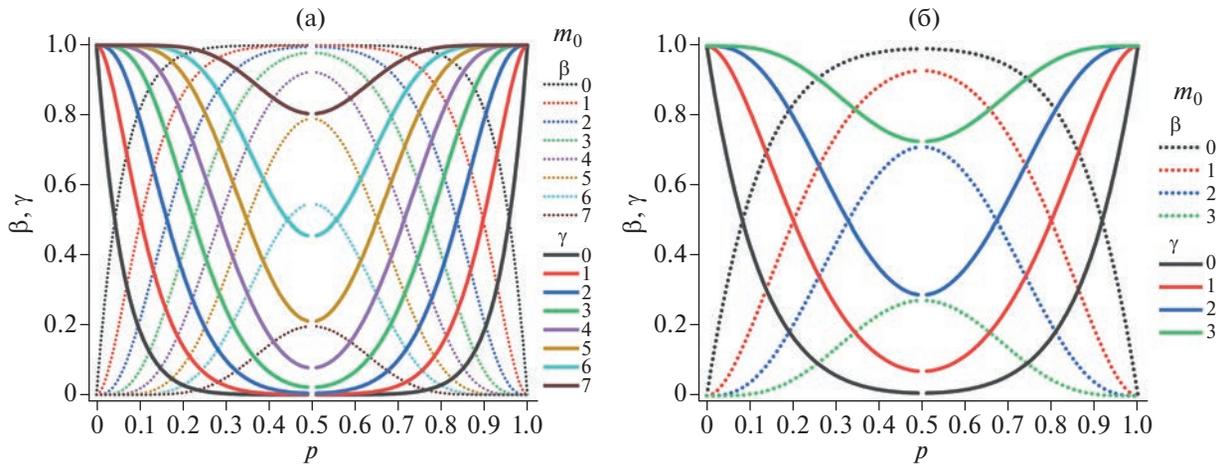


Рис. 7. Зависимость вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности симметричного критерия  $\gamma$  от значения вероятности  $p$  в диапазонах  $0 \leq p < 1/2$  и  $1/2 < p \leq 1$  для  $n = 16$  (а) и  $n = 8$  (б) при различных величинах порога  $m_0$ .

помощью какого-либо статистического критерия. В ПРИЛОЖЕНИЕ вынесено доказательство того, что в общем случае (для любых заданных  $m_0$  и  $p$ ) вероятность ошибки второго рода  $\beta$ , определяемая формулой (8), будет иметь максимум при  $p \rightarrow 1/2$ . Соответственно, мощность критерия  $\gamma = (1 - \beta)$  будет иметь минимум для значений  $p$ , близких к  $1/2$ . При этом с уменьшением  $p$  вплоть до нуля (чистый тип  $C$ ) или с ростом  $p$  до единицы (чистый тип  $T$ ) мощность критерия растет до единицы. В случае смешанных типов (см. рис. 1) мощность симметричного критерия будет больше ее минимального значения (достигаемого при  $p \rightarrow 1/2$ ) и меньше 1 (при  $p = 1$ ).

в) Вероятность  $\beta$  уменьшается с ростом  $m_0$ . Увеличение порогового значения  $m_0$  сужает интервал  $m_0 < \eta < n - m_0$  значений  $\eta$ , при реализации которых нулевая гипотеза признается справедливой. Следовательно, с ростом  $m_0$  мы будем чаще отклонять гипотезу  $H_0$  и реже ошибаться, признав ее справедливой, когда на самом деле верна альтернатива  $H_1$ . Таким образом, с ростом  $m_0$  вероятность совершить ошибку второго рода уменьшается. Следовательно, критерий тем более мощный, чем больше  $m_0$ . Но напомним, что с увеличением  $m_0$  увеличивается величина ошибки первого рода  $\alpha$  (см. рис. 6). Тем самым, выбор порога  $m_0$  является компромиссом между приемлемыми вероятностями ошибок первого и второго рода. Используя рис. 7, можно найти наихудшее значение вероятности, при котором будет совершена ошибка второго рода. Это — вероятность  $p = 1/2$ . В ЗАКЛЮЧЕНИИ мы обсудим рекомендации по заданию значений  $\alpha$  и  $m_0$ . Пока же мы

сосредоточим внимание на вероятности  $\beta$  совершить ошибку второго рода для сравнения двух вариантов критериев: симметричного и несимметричного.

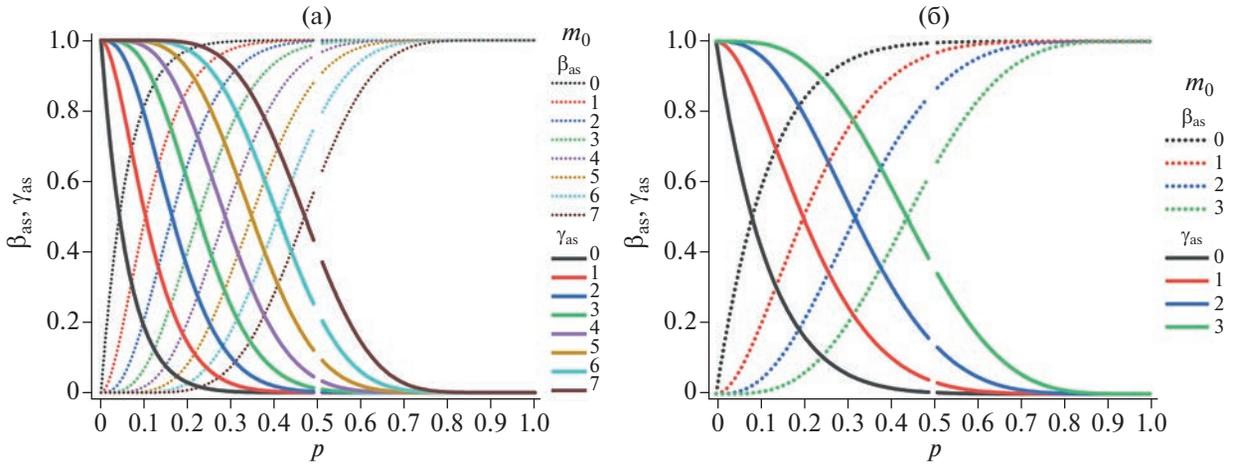
## 5.2. Несимметричный критерий

Рассмотрим теперь методику [Zang et al., 1998] с другой точки зрения. Описанная в работе [Zang et al., 1998] процедура предполагает, что по знаку “полярности” сразу принимается решение, из какой пары типов событий АЭ делается дальнейший выбор: если  $\delta > 0$ , то речь идет о разделении типов  $S$  и  $C$ , если  $\delta < 0$ , то  $S$  и  $T$ . Переформулируем соответствующим образом критерий, по которому принимается решение о типе события АЭ в этом случае. Будем считать, что гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  остаются прежними, но критерии теперь формулируются следующим образом.

Пусть, по-прежнему,  $m_0$  — пороговое значение для количества знаков минус в наборе из  $n$  датчиков,  $m_0 = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ .

I. Случай  $\delta > 0$  для разделения типов  $S$  и  $C$ . В этом случае будем считать гипотезу  $H_0$  справедливой, если фактически наблюдаемое количество минусов  $\eta$  больше порогового значения  $\eta > m_0$ , т.е. в этом случае мы считаем, что тип события АЭ —  $S$ . В противном случае  $\eta \leq m_0$  мы считаем, что реализовался тип  $C$  и справедлива альтернатива  $H_1$ .

II. Случай  $\delta < 0$  для разделения типов  $S$  и  $T$ . В этом случае мы считаем гипотезу  $H_0$  справедливой, если фактически наблюдаемое количество минусов  $\eta$  меньше значения  $\eta < (n - m_0)$ , т.е. в этом случае мы считаем, что тип события АЭ —  $S$ . В про-



**Рис. 8.** Зависимость вероятности ошибки второго рода  $\beta_{as}$  и мощности несимметричного критерия  $\gamma_{as}$  от значения вероятности  $p$  в диапазонах  $0 \leq p < 1/2$  и  $1/2 < p \leq 1$  для  $n = 16$  (а) и  $n = 8$  (б) при различных величинах порога  $m_0$ .

тивном случае  $\eta \geq (n - m_0)$  мы считаем, что реализовался тип  $T$  и справедлива альтернатива  $H_1$ .

**5.2.1. Уровень значимости несимметричного критерия**

Для определенности рассмотрим случай I, когда  $\delta > 0$ , поскольку рассмотрение варианта  $\delta < 0$  можно провести аналогичным способом. Вероятность ошибки первого рода  $\alpha_{as}$  (подстрочный индекс говорит о том, что вероятность рассчитывается для несимметричного критерия) в этом случае равна:

$$\alpha_{as}(m_0) = P(\eta \leq m_0 | H_0) = \sum_{k=0}^{m_0} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (9)$$

Сопоставляя выражение (9) с (7), замечаем, что  $\alpha_{as}(m_0) = \frac{1}{2} \alpha(m_0)$ . Соответственно, графики зависимости  $\alpha_{as}$  от  $m_0$  выглядят так же, как графики, представленные на рис. 6, но значения  $\alpha_{as}$  будут вдвое меньше. Используя дополнительную информацию  $\delta > 0$  и перейдя к несимметричному критерию, мы разделяем только типы  $S$  и  $C$ . При этом вероятность ошибки первого рода уменьшается, что логично, поскольку теперь мы не можем ошибиться, отклонив тип  $S$  (верную гипотезу  $H_0$ ) в пользу типа  $T$ . В то же время, необходимо отметить, что более строгий анализ ошибки первого рода в случае несимметричного критерия должен также учитывать вероятность самого события-условия  $\delta > 0$ . В рамках настоящей работы мы ограничимся лишь формулой (9) и перейдем к оценке мощности несимметричного критерия.

**5.2.2. Мощность несимметричного критерия**

Определим вероятность ошибки второго рода  $\beta_{as}$  для несимметричного критерия, а затем рассчитаем его мощность по формуле  $\gamma_{as} = (1 - \beta_{as})$ :

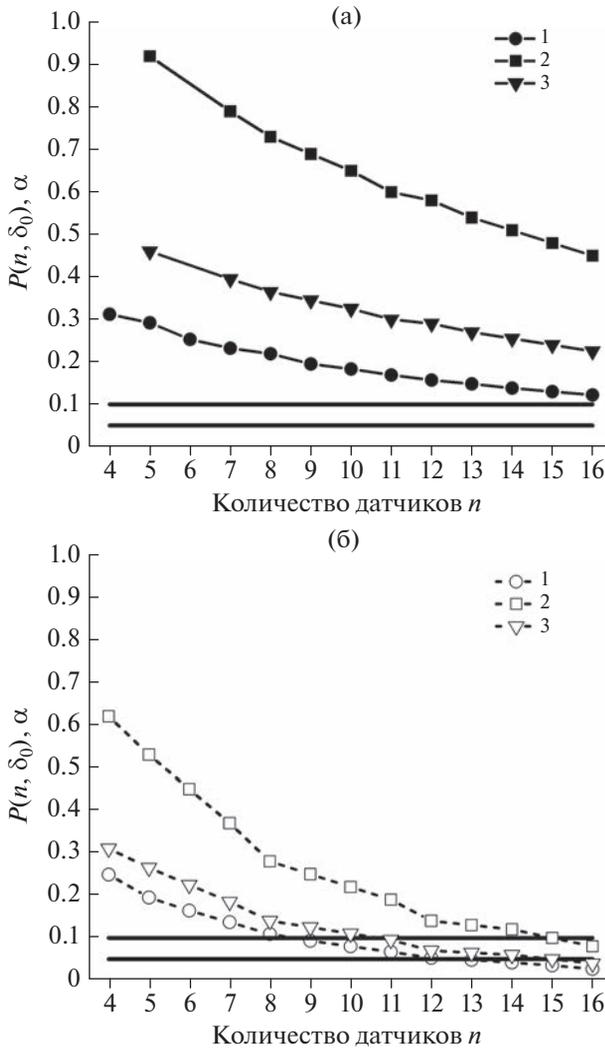
$$\beta_{as} = P(\eta > m_0 | H_1) = \sum_{k=m_0+1}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (10)$$

где вероятность  $p$  при справедливой альтернативе  $H_1$ :  $0 \leq p < 1/2$  или  $1/2 < p \leq 1$ . Таким образом, как и в случае симметричного критерия (8), вероятность ошибки второго рода зависит от значения  $p$ .

На рис. 8 показана зависимость вероятности ошибки второго рода  $\beta_{as}$  несимметричного критерия, используемого для разделения типов  $S$  и  $C$ , от вероятности  $p$ . Графики на рис. 8а соответствуют 16 датчикам, т.е.  $n = 16$ . Также на рис. 8а показана зависимость мощности несимметричного критерия  $\gamma_{as}$  от  $p$ . На рис. 8б для примера представлены зависимости  $\beta_{as}$  и  $\gamma_{as}$  в случае 8 датчиков.

**5.2.3. Обсуждение: несимметричный критерий**

Из рис. 8 видно, что несимметричный критерий дает высокие вероятности ошибок второго рода и, соответственно, имеет низкую мощность, если оказалось, что  $p > 1/2$ . Случай  $p > 1/2$  может реализоваться, если все же оказалось, что наблюдаемое событие АЭ имело тип  $T$ . Поскольку при формулировке несимметричного критерия для случая I ( $\delta > 0$ ) мы исходно отказались от рассмотрения событий типа  $T$ , логично, что мы ошибемся, если все же оказалось, что произошедшее событие относилось к этому типу. Поэтому на рис. 8 график  $\beta_{as}$  стремится к единице при  $p \rightarrow 1$ .



**Рис. 9.** Зависимость вероятности  $P(n, \delta_0)$  достижения порогового значения “полярности”  $\delta_0$  в методе  $P$ -значения и уровня значимости симметричного и несимметричного критериев  $\alpha$  для порога “полярности”  $\delta_0$  от количества датчиков  $n$ : (а) – для  $\delta_0 = 0.25$ ; (б) – для  $\delta_0 = 0.5$ ; 1 – метод  $P$ -значения; 2 – симметричный критерий; 3 – несимметричный критерий. Сплошными горизонтальными линиями отмечены значения уровней 0.1 и 0.05.

Очевидно, возникновение такой ошибки будет зависеть от вероятности события-условия  $\delta > 0$ , что нужно учитывать при более строгом анализе несимметричного критерия.

Применив несимметричный критерий для разделения типов  $S$  и  $C$  в случае  $\delta > 0$ , мы получаем “выигрыш” в уменьшении вероятности совершить ошибку первого рода  $\alpha_{as}$  по сравнению с симметричным критерием. В то же время “платой” за такое преимущество является увеличение вероятности ошибки второго рода при  $p > 1/2$ ,

соответственно, в такой ситуации мощность несимметричного критерия меньше, чем симметричного. Действительно, применяя несимметричный критерий, когда при  $\delta > 0$  событие все же было типа  $T$ , мы неминуемо совершим ошибку второго рода.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение предложенной в работе [Zang et al., 1998] процедуры определения типа события АЭ по соотношению знаков вступлений на регистрирующих датчиках со статистических позиций позволяет построить оценки значимости решения об отнесении источника АЭ к тому или иному типу. Возможно использование трех различных подходов: основанной на концепции  $P$ -значения оценке вероятности реализации зарегистрированного в эксперименте соотношения числа знаков, симметричного критерия для порогового критерия отделения событий типа  $S$  от  $T$  и  $C$  без их разделения и несимметричного критерия для порогового критерия разделения событий всех трех типов, соответствующего работе [Zang et al., 1998]. Во всех трех подходах в качестве нулевой гипотезы рассматривается отнесение события к типу  $S$ . Мощность пороговых критериев зависит от априорных представлений о допустимых механизмах очага событий альтернативных типов, отличных от  $S$ . Мощность максимальна для механизмов чистых типов  $T$  и  $C$ , рассмотренных в [Zang et al., 1998], и уменьшается для смешанных типов, таких, например, как  $ST$  (*shear-tensile*), рассмотренных в работе [Petružálek et al., 2020] (см. рис. 1).

На рис. 9 представлено сравнение уровней значимости (вероятностей отклонить справедливую нулевую гипотезу) для трех рассмотренных подходов. Рис. 9 аналогичен рис. 4, на который добавлены результаты отыскания уровней значимости симметричного и несимметричного критериев для пороговых значений “полярности”  $\delta_0$ , равных 0.25 (рис. 9а) и 0.5 (рис. 9б).

На рис. 9а видно, что при величине порога “полярности”  $\delta_0 = 0.25$  в случае характерного для экспериментов количества датчиков общепринятая величина значимости разделения гипотез в 0.1 не достигается. Для обеспечения уровня значимости разделения типов событий АЭ не хуже 0.1 порог дискриминации по “полярности” целесообразно увеличить со значения 0.25, предложенного в работе [Zang et al., 1998], до 0.5 (рис. 9б). При этом для определения типа нужно использовать данные не менее, чем 9 датчиков. На рис. 9б видно также, что при использовании порога  $\delta_0 = 0.5$  результаты использования  $P$ -значения и несимметричного критерия практически совпадают при  $n \geq 9$ .

Можно также задавать априори уровень значимости и использовать переменное значение порога полярности в зависимости от числа датчиков (рис. 5 и табл. 1).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Из формулы (8)

$$\begin{aligned}\beta &= P(m_0 < \eta < n - m_0 | H_1) = \\ &= \sum_{k=m_0+1}^{n-(m_0+1)} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Для удобства обозначим  $m = (m_0 + 1)$ , тогда

$$\beta = \sum_{k=m}^{n-m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Найдем максимум  $\beta$  как функции от  $p$ . Заметим, что  $\beta$  по смыслу является вероятностью, поэтому  $0 \leq \beta \leq 1$ . При этом при  $p = 0$  и  $p = 1$  получаем  $\beta = 0$ . Поскольку  $\beta$  не является тождественным нулем при  $0 < p < 1$ , из условия  $\frac{\partial \beta}{\partial p} = 0$  можем получить значение  $p$ , соответствующее максимуму  $\beta$  как функции от  $p$ .

Найдем соответствующую производную:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( \sum_{k=m}^{n-m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \right) = \sum_{k=m}^{n-m} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \\ &\times \left( k p^{k-1} (1-p)^{n-k} - (n-k) p^k (1-p)^{n-k-1} \right) = \\ &= n! \sum_{k=m}^{n-m} \left( \frac{p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} - \frac{p^k (1-p)^{n-1-k}}{k!(n-1-k)!} \right).\end{aligned}$$

Разобьем выражение на две части:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \sum_{k=m}^{n-m} \frac{p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}, \\ \varphi_2 &= \sum_{k=m}^{n-m} \frac{p^k (1-p)^{n-1-k}}{k!(n-1-k)!}.\end{aligned}$$

Тогда  $\frac{\partial \beta}{\partial p} = n!(\varphi_1 - \varphi_2)$ . В  $\varphi_1$  сделаем замену переменной суммирования  $k' = k - 1$ , чтобы вид суммы  $\varphi_1$  был максимально похожим на  $\varphi_2$ :

$$\varphi_1 = \sum_{k'=m-1}^{n-1-m} \frac{p^{k'} (1-p)^{n-1-k'}}{k'!(n-1-k')!}.$$

Видно, что суммы в  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  различаются только слагаемыми при  $k' = m - 1$  и  $k = n - m$ . Поскольку  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  входят в выражение для  $\frac{\partial \beta}{\partial p}$  с противополо-

жными знаками, следовательно, в  $\frac{\partial \beta}{\partial p}$  все одинаковые слагаемые сумм  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  уйдут. Таким образом, мы можем записать:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial p} &= n! \left( \frac{p^{m-1} (1-p)^{n-1-(m-1)}}{(m-1)!(n-1-(m-1))!} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^{n-m} (1-p)^{n-1-(n-m)}}{(n-m)!(n-1-(n-m))!} \right) = \\ &= \frac{n! p^{m-1} (1-p)^{m-1}}{(m-1)!(n-m)!} \left( (1-p)^{n+1-2m} - p^{n+1-2m} \right).\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой сокращенного умножения  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , чтобы преобразовать последний множитель в предыдущей формуле. Тогда получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial p} &= \frac{n! p^{m-1} (1-p)^{m-1}}{(m-1)!(n-m)!} \left( (1-p) - p \right) \times \\ &\times \left( (1-p)^{n-2m} + p(1-p)^{n-1-2m} + \dots + p^{n-1-2m} (1-p) + p^{n-2m} \right).\end{aligned}$$

В этом выражении при  $0 < p < 1$  нулевое значение может принимать только множитель  $((1-p) - p) = 1 - 2p$ , что справедливо при  $p = 1/2$ .

Таким образом,  $\frac{\partial \beta}{\partial p} = 0$  при  $p = 1/2$ , соответственно, вероятность как функции от  $p$  имеет максимум.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в соответствии с государственными заданиями физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН.

Лабораторные исследования, инициировавшие выполнение этой работы, проводились в Центре коллективного пользования "Петрофизика, геомеханика и палеомагнетизм" Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН..

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Abubakirov I.R., Pavlov V.M.* Determining the Double Couple Moment Tensor for Kamchatka Earthquakes from Regional Seismic Waveforms // *Izv., Phys. Solid Earth*. 2021. V. 57. P. 332–347.  
<https://doi.org/10.1134/S1069351321030010>
- Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology. Univ. Science Books. 2002. 685 p.
- Amrhein V., Korner-Nievergelt F., Roth T.* The earth is flat ( $p > 0.05$ ): significance thresholds and the crisis of unreplicable research // *Peer J*. 2017. V. 5. P. e3544.  
<https://doi.org/10.7717/peerj.3544>

- Borovkov A.A.* Mathematical Statistics. Gordon and Breach Publishers. Amsterdam. 1998. 478 p.
- Charalampidou E.M., Stanchits S., Kwiatak G., Dresen G.* Brittle failure and fracture reactivation in sandstone by fluid injection // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 2015. <https://doi.org/10.1080/19648189.2014.896752>
- Clarke J., Adam L., Sarout J., van Wijk K., Kennedy B., Dauriat J.* The relation between viscosity and acoustic emissions as a laboratory analogue for volcano seismicity // *Geology*. 2019. V. 47. P. 499–503. <https://doi.org/10.1130/G45446.1>
- D'Amico S.* Moment tensor solutions: A useful tool for seismotectonics / D'Amico S. (ed.). Springer. 2018. 752 p.
- Dreger D.S.* Berkeley Seismic Moment Tensor Method, Uncertainty Analysis, and Study of Non-double-couple Seismic Events / D'Amico S. (ed.). Moment Tensor Solutions. Springer Natural Hazards. Springer, Cham. 2018. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-77359-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77359-9_4)
- Emanov A.F., Emanov A.A., Chechel'nikskii V.V. et al.* The Khuvsgul Earthquake of January 12, 2021 ( $M_W=6.7$ ,  $M_L=6.9$ ) and Early Aftershocks // *Izv. Phys. Solid Earth*. 2022. V. 58. P. 59–73. <https://doi.org/10.1134/S1069351322010025>
- Everitt B., Skrandal A.* The Cambridge dictionary of statistics. Cambridge University Press. Cambridge. 2002. 106 p.
- Fortin J., Stanchits S., Dresen G., Gueguen Y.* Acoustic Emissions Monitoring during Inelastic Deformation of Porous Sandstone: Comparison of Three Modes of Deformation // *Pure Appl. Geophys.* 2009. V. 166. P. 823–841. <https://doi.org/10.1007/s00024-009-0479-0>
- Graham C.C., Stanchits S., Main I.G., Dresen G.* Comparison of polarity and moment tensor inversion methods for source analysis of acoustic emission data // *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Oxford*, 2010. V. 47. P. 161–169.
- Kanamori H.* Earthquake Seismology: Treatise on Geophysics / Kanamori H. (ed.). Elsevier. 2009. 653 p.
- Kolář P., Petružálek M., Lokajíček T., Šílený J., Jechumtálová Z., Adamová P., Boušková A.* Acoustic emission events interpreted in terms of source directivity // *Pure Appl. Geophys.* 2020. V. 177. P. 4271–4288. <https://doi.org/10.1007/s00024-020-02517-w>
- Kostrov B.V., Das S.* Principles of Earthquake Source Mechanics. Cambridge Univ Press. 2005. 286 p.
- Kwiatak G., Charalampidou E.M., Dresen G., Stanchits S.* An improved method for seismic moment tensor inversion of acoustic emissions through assessment of sensor coupling and sensitivity to incidence angle // *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.* 2013. V. 65. P. 153–161. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2013.11.005>
- Lei X.L., Nishizawa O., Kusunose K., Satoh T.* Fractal structure of the hypocenter distributions and focal mechanism solutions of acoustic emission in two granites of different grain sizes // *Journal of Physics of the Earth*. 1992. V. 40. P. 617–634. <https://doi.org/10.4294/jpe1952.40.617>
- Naoi M., Chen Y., Yamamoto K., Morishige Y. et al.* Tensile-dominant fractures observed in hydraulic fracturing laboratory experiment using eagle ford shale // *Geophysical J. International*. 2020. V. 222(2). P. 769–780. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa183>
- Ohtsu M.* Simplified moment tensor analysis and unified decomposition of acoustic emission source: application to in situ hydrofracturing test // *J Geophys Res.* 1991. V. 96 (B4)7. P. 6211–6221. <https://doi.org/10.1029/90JB02689>
- Ohtsu M.* Source Mechanisms of AE. Acoustic Emission Testing / Grosse C., Ohtsu M. (eds.). Berlin, Heidelberg, Springer. 2008a. P. 149–174. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-69972-9\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-69972-9_7)
- Ohtsu M.* Moment Tensor Analysis. Acoustic Emission Testing / Grosse C., Ohtsu M. (eds.). Berlin, Heidelberg, Springer. 2008b. P. 175–200. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-69972-9\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-69972-9_8)
- Ohtsu M., Isoda T., Tomoda Y.* Acoustic emission techniques standardized for concrete structures // *J Acoustic Emission*. 2007. V. 25. P. 21–32.
- Patonin A.V., Ponomarev A.V., Smirnov V.B.* A laboratory instrumental complex for studying the physics of the destruction of rocks // *Seismic instruments*. 2014. V. 50. P. 9–19. <https://doi.org/10.3103/S0747923914010046>
- Patonin A.V., Shikhova N.M.* Variations of types of acoustic emission signals during the destruction of rocks in a laboratory experiment. The nineteenth international conference “Physical-Chemical and petrophysical researches in the Earth’s sciences”. Proceedings of the conference. Moscow. 2018. P. 254–256.
- Petružálek M., Jechumtálová Z., Kolář P., Adamová P., Svitek T., Šílený J., Lokajíček T.* Acoustic emission in a laboratory: mechanism of microearthquakes using alternative source models // *J Geophys Res. Solid Earth*. 2018. V. 123(6). P. 4965–4982. <https://doi.org/10.1029/2017JB015393>
- Petružálek M., Jechumtálová Z., Šílený J., Kolář P., Svitek T., Lokajíček T., Turková I., Kotrlý M., Onysko R.* Application of the shear-tensile source model to acoustic emissions in West-erly granite // *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.* 2020. V. 128. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2020.104246>
- Petružálek M., Lokajíček T., Svitek T., Jechumtálová Z., Kolář P., Šílený J.* Fracturing of migmatite monitored by acoustic emission and ultrasonic sounding // *Rock. Mech. Rock. Eng.* 2019. V. 52. P. 47–59. <https://doi.org/10.1007/s00603-018-1590-2>
- Sondergeld C.H., Estey L.H.* Source mechanisms and microfracturing during uniaxial cycling of rock // *Pure and Applied Geophysics*. 1982. V. 120(1). P. 151–166. <https://doi.org/10.1007/BF00879434>
- Stanchits S., Dresen G.* Advanced acoustic emission analysis of brittle and porous rock fracturing. EPJ Web of Conferences. EDP Sciences. 2010. V. 6. <https://doi.org/10.1051/epjconf/20100622010>
- Stanchits S., Mayr S., Shapiro S., Dresen G.* Fracturing of porous rock induced by fluid injection // *Tectonophysics*. 2011. V. 503. P. 129–145. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2010.09.022>
- Stanchits S., Vinciguerra S., Dresen G.* Ultrasonic velocities, acoustic emission characteristics and crack damage of basalt and granite // *Pure Appl Geophys*. 2006. V. 163. P. 975–994. <https://doi.org/10.1007/s00024-006-0059-5>
- Stein S., Wysession M.* An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure. Blackwell Publishing. 2003. 498 p.
- Stern H.S.* A test by any other name: P values, Bayes factors, and statistical inference // *Multivariate behavioral research*.

2016. V. 51(1). P. 23–29.

<https://doi.org/10.1080/00273171.2015.1099032>

Stierle E., Vavryčuk V., Kwiatak G., Charalampidou E.M., Bohnhoff M. Seismic moment tensors of acoustic emissions recorded during laboratory rock deformation experiments: sensitivity to attenuation and anisotropy // *Geophysical Supplements to the Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. V. 205. P. 38–50.

<https://doi.org/10.1093/gji/ggw009>

Timoshkina E.P., Mikhailov V.O., Smirnov V.B. et al. Model of the Rupture Surface of the Khuvsgul Earthquake of January 12, 2021 From InSAR Data // *Izv. Phys. Solid Earth*. 2022. V. 58. P. 74–79.

<https://doi.org/10.1134/S1069351322010098>

Udias A., Buforn E. Principles of seismology. Cambridge Univ Press. 2018. 544 p.

Udias A., Madariaga R., Buforn E. Source Mechanism of Earthquakes. Cambridge Univ Press. 2014. 302 p.

Watts A.B. Crust and lithosphere dynamics. Treatise in Geophysics / Watts A.B. (ed.). Elsevier. 2015. 630 p.

Zang A., Wagner F.C., Stanchits S., Dresen G., Andresen R., Haidekker M.A. Source analysis of acoustic emissions in Aue granite cores under symmetric and asymmetric compressive loads // *Geophys J Int*. 1998. V. 135. P. 1113–1130. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1998.00706.x>

Zang A., Wagner F.C., Stanchits S., Janssen C., Dresen G. Fracture process zone in granite // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 105. P. 651–661.

Zang A., Wagner F.C., Dresen G. Acoustic emission, microstructure, and damage model of dry and wet sandstone stressed to failure // *J Geophys Res Solid Earth*. 1996. V. 101. P. 17507–17521.

Zhang B., Xiaopeng T., Binxiang J., Jinzhou Z., Zheming Z., Shunde Y. Study on microseismic mechanism of hydrofracture propagation in shale // *J. Petroleum Science and Engineering*. 2019. V. 178. P. 711–722.

<https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.03.085>

Zhuang L., Zang A. Laboratory hydraulic fracturing experiments on crystalline rock for geothermal purposes // *Earth-Science Reviews*. 2021. 103580.

<https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2021.103580>

## On the Statistical Significance Test for the Procedure of Polarity Classification by Types of Acoustic Emission Sources

V. B. Smirnov<sup>a, b, \*</sup>, A. V. Isaeva<sup>a</sup>, T. I. Kartseva<sup>b</sup>, A. V. Patonin<sup>c</sup>, N. M. Shikhova<sup>c</sup>, and A. V. Ponomarev<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

<sup>b</sup>*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Science, Moscow, 123242 Russia*

<sup>c</sup>*Geophysical Observatory “Borok,” Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Borok, 152742 Russia*

\*e-mail: vs60@mail.ru

Using a mathematical statistics approach, we review the procedure for type classification of acoustic emission (AE) events into shear, tension, and collapse, proposed by Zang et al. (1998). The procedure is based on counting the signs of first pulses of waves arriving at acoustic sensors and is widely used in rock physics experiments. Under the assumption that the determination errors of first-pulse signs at sensors have uniform and independent distribution, the statistical significance and power of the type separation test are evaluated for a given number of sensors used. We consider and compare three methods of the construction of a statistical test based on the *P*-value approach and symmetric and asymmetric statistical hypothesis tests. Considering the results of the statistical study, we propose some practical recommendations for selecting a threshold to classify AE event types in experimental studies.

*Keywords:* acoustic emission, focal mechanism, statistical testing, laboratory experiments, rock physics