ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 2, с. 131–133

МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.256+517.982.252

ВЫПУКЛОСТЬ СОЛНЦ ПО КАСАТЕЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ

А. Р. Алимов[1,2,*], **член-корреспондент РАН Е. В. Щепин**[2,**]

Поступило 04.09.2018 г.

Направление d называется касательным направлением к единичной сфере S, если из условия, что $s \in S$, и условия, что $\mathrm{lin}(s + d)$ — опорная прямая к сфере S в точке s, вытекает, что $\mathrm{lin}(s + d)$ — полукасательная прямая к сфере S, т.е. является пределом секущих в точке s. Множество M называется выпуклым по направлению d, если из того, что $x, y \in M$, $(y-x)\| d$, вытекает, что $[x, y] \subset M$. Устанавливается, что в произвольном линейном нормированном пространстве произвольное солнце (и в частности, ограниченно компактное чебышевское множество) выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.

Ключевые слова: множество Чебышева; касательное направление.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524842131-133

Пусть X — вещественное линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство конечной размерности, $B(x, r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r, $\mathring{B}(x, r)$ — открытый шар, $S(x, r)$ — сфера, $S = S(0, 1)$.

Определение 1. Множество M называется *чебышевским множеством*, если оно есть множество существования и множество единственности, т.е. если для каждого $x \in X$ множество $P_M x$ ближайших элементов из M для x одноточечно. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности* для множества $M \subset X$, $M \neq \phi$, если существует *точка светимости* $y \in P_M x \neq \phi$ такая, что $y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$. Множество $\phi \neq M \subset X$ называется *солнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности. Множество $M \subset X$ называется *строгим солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ выполнено $P_M x \neq \phi$ и любая точка $y \in P_M x \neq \phi$ является точкой светимости.

"Солнца" являются наиболее естественным объектом, для которого выполнен критерий Колмогорова о характеризации элемента наилучшего приближения; им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса.

В работе мы следуем определениям, данным в обзоре [1]. Основные определения даются ниже.

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[2]*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва*

[*]*E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru*

[**]*E-mail: scepin@mi.ras.ru*

Исследуется задача о выпуклости солнц по касательным направлениям сферы. Данная постановка задачи является новой и была впервые решена в работе [2] для чебышевских множеств в конечномерных пространствах. Подчеркнём, что вопрос о выпуклости солнц (в отличие от проблемы выпуклости чебышевских множеств) решается очень просто: в пространстве X любое солнце выпукло, если и только если пространство X гладко (т.е. в любой точке единичной сферы пространства X опорная гиперплоскость единственна). Отметим, что известен пример несвязного солнца — единственный пример такого рода был построен В.А. Кощеевым в бесконечномерном подпространстве пространства $C[0, 1]$ со специально выбранной нормой (см. [1; п. 8.3]). Этот пример не противоречит утверждению о выпуклости солнца по любому касательному направлению к сфере: даже на плоскости легко построить несвязное множество, выпуклое по любому касательному направлению к сфере (см. также замечание 3 ниже).

Определение 2. Для точки $y \in S$ через Λ_y обозначим множество предельных точек выражения $\dfrac{y-z}{\|y-z\|}$ при $z \to y$, $z \in S$ (т.е. Λ_y — *множество полукасательных направлений* к сфере S в точке y). Направление d называется (глобально) *касательным направлением* для сферы S, если для любой точки $y \in S$ условие опорности направления d в точке y влечёт, что $d \in \Lambda_y$, т.е. направление d является касательным в точке y.

К примеру, в пространстве ℓ_n^∞, $n \geq 2$, касательными направлениями сферы являются только направления, параллельные рёбрам единичного шара (куба). В пространстве ℓ^1_n, $n \geq 3$, касательных направлений к сфере нет.

Определение 3. Множество M называется выпуклым по направлению d, если из того, что $x, y \in M$, $(y-x) \parallel d$, вытекает, что $[x, y] \subset M$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *В линейном нормированном пространстве произвольное солнце выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.*

Теорема 1 обобщает следующий результат из работы [2].

Теорема А. *Если направление является касательным для единичной сферы конечномерного банахова пространства, то всякое чебышевское множество выпукло в этом направлении.*

В теореме А и теореме 1 важно, что направление, по которому исследуется выпуклость чебышевского множества, является касательным для всей сферы. Можно легко построить пример трёхмерного пространства (к примеру, $X = \ell^2(2) \oplus_1 \mathbb{R}$) и чебышевского множества (солнца) в нём, не выпуклого по направлению, являющемуся касательным к сфере в некоторой точке (но, конечно, не во всех точках сферы, в которых оно является опорным). В двумерном банаховом пространстве любое касательное направление в точке сферы является касательным направлением сферы.

Более сильный вариант теоремы А для пространства ℓ^∞_n содержится в теореме В (см. [1]).

Пусть $X = \ell^\infty_n$. Пусть также $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leq \dim X$.

Обозначим $\mathrm{cAff}_k(X)$ — класс всех аффинных координатных подпространств из X конечной размерности k, т.е. подпространств вида $\{x \in \ell^\infty_n \mid x_{i_1} = c_1, \ldots, x_{i_k} = c_k\}$ для некоторого фиксированного набора индексов $i_1, \ldots, i_k$ и набора констант $c_1, \ldots, c_k$. В следующей теореме $\mathrm{ri}\, A$ — относительная внутренность множества A, замкнутый промежуток Π — это пересечение экстремальных (координатных) гиперполос вида $\{x \in \ell^\infty_n \mid a \leq f(x) \leq b\}$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, $f \in \mathrm{ext}\, S^*$, порождаемых в исходном пространстве ℓ^∞_n экстремальными функционалами из сопряжённого пространства.

Теорема В. *Чебышевское множество в ℓ^∞_n является экстремально чебышевским. Иными словами, если Π — замкнутый промежуток в ℓ^∞_n $M \cap \Pi \neq \phi$, $M \cap \mathrm{ri}\, \Pi = \phi$, то пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.*

Как следствие, если P — координатное подпространство и $M \cap P \neq \phi$, то $M \cap P$ — чебышевское множество в P.

Отметим ещё один результат [3], частично обобщающий теорему А.

Определение 4. Направление d будем называть гиперкасательным направлением для единичной сферы S, если направление d параллельно некоторой гиперграни единичного шара.

Теорема С. *Чебышевская кривая в ℓ^∞_n выпукла по любому гиперкасательному направлению к единичной сфере.*

Замечание 1. Произвольное чебышевское множество в ℓ^∞_n не обязано быть выпуклым по гиперкасательному направлению. Соответствующий пример легко построить в пространстве любой размерности $n \geq 3$.

Замечание 2. Строгое солнце (и в частности, солнце) не обязано быть выпуклым по (локально) касательному направлению в точке сферы. Рассмотрим соответствующий пример в пространстве ℓ^∞_3. На плоскости $\mathbb{R}^2$ для каждого $t \in \mathbb{R}$ зададим ломаную M_t следующим уравнением в полярной системе координат (r, φ):

$$M_t = \left\{ r \geq 0, \varphi = -\frac{1}{4}\mathrm{arcctg}\, t \right\} \cup \left\{ r \geq 0, \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{arcctg}\, t \right\}.$$

Множество $M = \bigcup \{(M_t + (0, 0, t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ является строгим солнцем в ℓ^∞_3, но его пересечение с касательной прямой в некоторых точках сферы не выпукло по направлению такой касательной.

Замечание 3. В трёхмерном пространстве ℓ^∞_3 можно построить пример множества замкнутого, связного и выпуклого по любому касательному направлению сферы S, не являющегося солнцем (и, как следствие, не являющегося чебышевским множеством).

Замечание 4. В пространстве ℓ^∞_n утверждение о выпуклости солнц по любому касательному направлению было известно ранее (в другой формулировке). Данный результат вытекает из монотонной линейной связности солнц в ℓ^∞_n.

Заключение. Показано, что в произвольном линейном нормированном пространстве произвольное солнце выпукло по любому касательному направлению единичной сферы. Теорема А, в которой тот же результат установлен для чебышевских множеств в конечномерных пространствах, нашла своё применение в работах [3, 5] по исследованию локально чебышевских множеств. Авторы надеются, что теорема 1 также окажется полезной при исследовании более общих множеств с заданными локально аппроксимативными свойствами (по поводу таких задач см. [6–8]).

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты 18–01–00333-а, 19–01–00332-а) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т 71. №1 (427). С.3–84.
2. *Алимов А.Р.*, *Щепин Е.В.* // Выпуклость чебышёвских множеств по касательным направлениям // УМН. 2018. Т. 73. № 2 (440). С. 185–186.
3. *Алимов А.Р.* Локально чебышёвские множества в пространстве ℓ_n^∞ // Вестн. филиала МГУ. Душанбе. Сер. Естеств. наук, 2018. № 4(1). С. 5–8.
4. *Алимов А.Р.* Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 4(2). С. 489–497.
5. *Alimov A.R.* On Approximative Properties of Locally Chebyshev Sets // Proc. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb. 2018. V. 44. № 1. P. 36–42.
6. *Флеров А.А.* Локально чебышевские множества на плоскости // Мат. заметки. 2015. Т.97. № 1. С. 142–149.
7. *Флеров А.А.* О множествах с не более чем двузначной метрической проекцией на нормированной плоскости // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 2. С. 286–301.
8. *Alimov A.R.* Continuity of the Metric Projection and Local Solar Properties of Sets // Set-Valued Var. Anal. 2017.

SUNS ARE CONVEX IN TANGENT DIRECTIONS

A. R. Alimov, Corresponding Member of the RAS E. V. Shchepin

Received September 4, 2018

A direction d is called a tangent direction to the unit sphere S of a normed linear space $s \in S$ and lin$(s + d)$ is a tangent line to the sphere S at s imply that lin$(s + d)$ is a one-sided tangent to the sphere S, i.e., it is the limit of secant lines at s. A set M is called convex with respect to a direction d if $[x, y] \subset M$ whenever x, y in M, $(y - x) \parallel d$. We show that in a normed linear space an arbitrary sun (in particular, a boundedly compact Chebyshev set) is convex with respect to any tangent direction of the unit sphere.

Keywords: Chebyshev set; tangent direction; directional convexity.