ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 2, с. 134–137

МАТЕМАТИКА

УДК 517.955.8

ДВОЙНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. И. Аллилуева[1,2,3], член-корреспондент РАН А. И. Шафаревич[1,2,3,4,*]

Поступило 06.09.2018 г.

Получено двойное асимптотическое разложение разрешающего оператора задачи Коши для линеаризованной системы газовой динамики по гладкости и малой вязкости. Найдены оценки слагаемых и остатка в шкале Соболева. Явно описаны гидродинамические и акустические моды.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, разрешающий оператор.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524842134-137

Уравнениям газовой динамики посвящена огромная литература (как математическая, так и физическая); будучи линеаризованными на гладком течении, они описывают эволюцию малых возмущений на заданном фоне. С точки зрения уравнений в частных производных такая система обладает чертами как гиперболических, так и параболических уравнений. Точнее: если вязкость равна нулю (идеальный газ), система нестрого гиперболическая — ей отвечают как простые, так и двукратные характеристики. Учёт вязкости приводит к наличию “параболических” слагаемых, причём соответствующая квадратичная форма оказывается вырожденной. Кроме того, во многих приложениях вязкость естественно считать малой; тем самым в системе возникает малый параметр при старших производных. Эти обстоятельства приводят к специфической структуре разрешающего оператора задачи Коши для системы газовой динамики — он содержит компоненты различной гладкости и различного порядка по малому параметру. Ниже приведено полное асимптотическое разложение этого оператора, которое имеет двойной характер: остаток соответствующего ряда может быть сделан сколь угодно гладким и сколь угодно малым по параметру вязкости. Разложение состоит из двух частей: первая строится при помощи квазиклассической теории (или теории интегральных операторов Фурье (см., например, [1, 2]); вторая — при помощи теории возмущений по малой вязкости. Правильная склейка этих разложений приводит к наличию дробных степеней малого параметра в асимптотике. Отметим, что для линеаризованных уравнений Навье–Стокса аналогичное разложение было получено в [3], а для линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики — в [4]; основное отличие системы газовой динамики от указанных уравнений состоит в наличии так называемых акустических мод — характеристик, соответствующих нелинейным по импульсам гамильтонианам. Это обстоятельство приводит к наличию фокальных точек и, как следствие, к необходимости использовать канонический оператор Маслова [5] вместо стандартных ВКБ-разложений. Этот же эффект отвечает за “ухудшение” оценок норм слагаемых параметрикса по сравнению с цитированными работами (см. п. 2.3 ниже). Наконец, отметим, что для старшей части упомянутых акустических мод мы получаем явные формулы (п. 2.2) — соответствующие уравнения переноса полностью интегрируются.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Линеаризованные уравнения газовой динамики представляют собой следующую систему уравнений на зависящее от времени трёхмерное векторное поле $u(x,t)$ и скалярную функцию $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(V,\nabla)u+(u,\nabla)V+\nabla\rho P\ (\rho_0)+P''(\rho_0)\rho\nabla\rho_0 = \\ = \varepsilon^2\nu\Delta u+\varepsilon^2\mu \operatorname{grad}\operatorname{div} u, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(V,\nabla)\rho+\rho(\nabla,V)+(u,\nabla)\rho_0+\rho_0(\nabla,u)=0.$$

[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва*

[2]*Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.*

[3]*Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва*

[4]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[*]*E-mail: shafarev@yahoo.com*

Здесь $x \in \mathbb{R}^3$, $V(x)$, $\rho_0(x)$ — заданные гладкие ограниченные вместе со всеми производными-векторное поле и положительная скалярная функция, отделённая от нуля, $P(z)$ — заданная гладкая положительная функция одной переменной, μ, ν, ε — неотрицательные параметры, характеризующие вязкость. Мы будем считать, что $\varepsilon \to +0$, а μ, ν, фиксированы и не зависят от ε. Поставим для этой системы задачу Коши

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x), \tag{2}$$

где u^0, ρ^0 — распределения из некоторого пространства Соболева H^s. Нетрудно показать (в частности, это следует из приведённой ниже теоремы), что при всех ε решение такой задачи на любом конечном отрезке времени $t \in [0, T]$ будет представлять собой распределение, также принадлежащее H^s; тем самым определён оператор $R(t, \varepsilon)$: $H^s \to H^s$, переводящий начальную функцию в решение в момент времени t. Далее через $v(t)$ будем обозначать четырехмерный вектор (u, ρ), а через v^0 — вектор (u^0, ρ^0); таким образом, по определению, $v(t) = R(t, \varepsilon)\, v^0$.

Определение. Оператор $R(t, \varepsilon)$ называется разрешающим оператором задачи Коши (1), (2).

Наша цель — представить оператор R в виде формального ряда, который будет асимптотическим одновременно по гладкости и по параметру ε; другими словами, для каждых M, N найдётся частичная сумма этого ряда, которая будет отличаться от R на оператор, ограниченный из H^s в H^{s+M} и имеющий норму порядка ε^N (ниже приведены более детальные оценки).

2. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Опишем геометрические и функционально-аналитические объекты, участвующие в определении указанного асимптотического ряда.

2.1. Характеристики и волновые фронты. Системе уравнений газовой динамики соответствуют характеристики двух типов — так называемые гидродинамическая и акустические моды. Гидродинамическая мода двукратно вырождена и соответствующие характеристики лежат в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^3$; акустические моды простые, а характеристики лежат в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6$. Начнём с гидродинамической моды; пусть $X(y, t)$ — траектория векторного поля $V(x)$, выпущенная из точки y, т.е. решение задачи Коши

$$\dot{X} = V(X), \quad X(0) = y; \tag{3}$$

через $x_0(x, t)$ будем обозначать начальную точку траектории, пришедшую в точку x за время t, т.е. решение уравнения $X(x_0, t) = x$. Через $P(k, y, t)$ обозначим переносимый вдоль траектории касательный вектор, т.е. решение задачи

$$\dot{P} + \frac{\partial V^*}{\partial x}\big(X(y,t)\big)P = 0, \quad P(0) = k \tag{4}$$

$$\left(\text{отметим, что } P = \left(\frac{\partial X^*}{\partial y}\right)^{-1} k\right).$$

Опишем теперь акустические моды; им соответствуют гамильтонианы $H^{\pm}(x, p) = (V, p) \pm c(x)|p|$, где $(x, p) \in \mathbb{R}^6$, $c(x) = \sqrt{\rho_0 P'(\rho_0)}$. Пусть $g_t^{\pm}$ — фазовые потоки этих систем и ω — единичный трёхмерный вектор; обозначим через $\Lambda_t^{\pm}(\omega)$ лагранжевы многообразия, полученные из начального многообразия Λ_0: $(x, p) \in \mathbb{R}^6, p = \omega$ сдвигом вдоль потоков $g_t^{\pm}$. На начальном многообразии Λ_0 зафискируем форму объема $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ и отметим произвольную точку; перенесём их потоком g_t на поверхность Λ_t.

2.2. Амплитуды мод. Эволюция амплитуды гидродинамической моды описывается трёхмерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} + \left(E - 2\frac{P \otimes P}{P^2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}(X)\varphi = 0, \tag{5}$$

где E — единичная матрица. Пусть $A^0(y, t, k)$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — оператор Коши этой системы; отметим, что он переводит ортогональное дополнение к вектору k в ортогональное дополнение к вектору P. Продолжим этот оператор до оператора $A_0(y, t, k)$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ следующим образом:

$$A_0 w = A^0 \pi w e^{-\nu\int_0^t |P|^2(y,\tau,k)d\tau},$$

где π — ортопроектор $\mathbb{R}^4$ на двумерную плоскость в $\mathbb{R}^3$, ортогональную вектору k (зануляются четвёртая компонента вектора w и компонента, параллельная k; в результате получается вектор с нулевой четвертой компонентой, ортогональный вектору P). Через A_j, $j \geqslant 1$, обозначим операторы, определённые аналогичными конструкциями; разница состоит в том, что в уравнениие (5) добавляется правая часть и, кроме того, добавляются четвёртая компонента вектора и компонента, параллельная k; все эти функции выражаются явными формулами через A_m при $m < j$ и их производные (мы не приводим этих формул ввиду громоздкости).

Перейдём теперь к описанию амплитуд акустических мод; для краткости будем опускать индексы $\pm$, различающие две такие моды. Пусть $B_0\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — оператор, зависящий от точки на лагранжевом многообразии Λ_t и дополнительного положительного параметра z и действующий на вектор w следующим образом:

$$\begin{gathered}(B_0 w)_4 = \frac{1}{2}\left(w_4 - \frac{\rho_0(w,p)}{c(x)|p|}\right)_0 \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{c|p|}}\right)_0 \left(\sqrt{\frac{c|p|}{\rho_0}}\right) e^{-(\mu+\nu)z^2 G(t)}, \\ \widehat{B_0 w} = p\frac{1}{2}\left(\frac{c(x)}{|p|\rho_0} w_4 + \frac{(w,p)}{|p|^2}\right)_0 \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{c\rho_0}{P'(\rho_0)}}\right)_0 \left(\sqrt{\frac{P'(\rho_0)}{c\rho_0}}\right) e^{-(\mu+\nu)z^2 G(t)}.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь крышка обозначает проекцию на трёхмерное пространство (четвёртая компонента вектора забывается), индекс “0” после скобки означает, что соответствующая функция вычисляется на многообразии Λ_0 и затем переносится на Λ_t потоком g_t. Функция $G(t)$ в точке $\alpha \in \Lambda_t$ вычисляется по формуле

$$G(t) = \int_0^t |p|^2\,(g_{-\tau}\alpha)\,d\tau.$$

Через B_j, $j \ge 1$, обозначим операторы, определяемые аналогичными формулами и выражающиеся явно через B_m, $m < j$ (мы не приводим этих формул ввиду громоздкости).

2.3. Разложение параметрикса. Опишем слагаемые, отвечающие “негладкой” части разрешающего оператора; обозначим через T_j и $T_j^{\pm}$ операторы, действующие на распределение $v \in H^s$ по следующим формулам:

$$T_j v = \frac{\varepsilon^j}{(2\pi)^{3/2}} \int_{R^3} e^{i(k, x_0(x,t))} A_j(x,t,\varepsilon k)\chi(\sqrt{\varepsilon}k)\tilde{v}(k)\,dk,$$

$$T_j^{\pm} v = \frac{\varepsilon^j}{(2\pi)^{3/2}} \int_{R^3} e^{imt} K_{\Lambda_t}^{\pm,z}(B_j^{\pm}(\varepsilon z))|_{k=z\omega}\,\chi(\sqrt{\varepsilon}k)\tilde{v}(k)\,dk.$$

Здесь $K_{\Lambda_t}^{\pm,z}$ — канонический оператор Маслова на лагранжевом многообразии $\Lambda_t^{\pm}$, соответствующий большому параметру z, m — индекс Морса траектории соответствующего гамильтонова поля, соединяющей отмеченные точки на Λ_0 и Λ_t, $\tilde{v}$ — преобразование Фурье функции v. Через $\chi(y)$ обозначена гладкая функция в $\mathbb{R}^3$, равная нулю при $|y| \le 1$ и единице при $|y| \ge 2$.

Лемма 1. *Операторы T_j и $T_j^{\pm}$ ограничены из H^s в H^{s+m} при $m \le j$ и $m < j - 3/2$ соответственно; при $m \le j$ и $m \le (j-3)/2$ справедливы оценки*

$$\|T_j\|_{H^s \to H^{s+m}} \le \mathrm{const} \cdot \varepsilon^{j/2 - m},$$
$$\|T_j\|_{H^s \to H^{s+m}} \le \mathrm{const} \cdot \varepsilon^{j/2 - m - 3/2}.$$

2.4. Сглаживающие слагаемые. Опишем теперь “гладкие” слагаемые, участвующие в разложении разрешающего оператора; эти слагаемые строятся при помощи регулярной теории возмущений по параметру ε. Рассмотрим операторы

$$W_0 = R_0\left(1 - \chi\left(-i\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right),$$
$$W_j = -(\varepsilon^2 R^0 D)^j \left(1 - \chi\left(-i\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right),$$
$$D\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\nabla(\nabla, u) + \nu\Delta u \\ 0 \end{pmatrix},$$

где R_0 — разрешающий оператор задачи Коши для уравнений идеальной газовой динамики, т.е. уравнений (1) при $\mu = \nu = 0$,

$$R^0(t) = \int_0^t R_0(\tau)\,d\tau.$$

Лемма 2. *Операторы W_j ограничены из H^s в H^{s+m} для любого m; справедливы оценки*

$$\|W_j\|_{H^s \to H^{s+m}} \le \mathrm{const} \cdot \varepsilon^{j - m/2}.$$

Замечание. Операторы W_j, хотя и оцениваются в H^s как $O(\varepsilon^j)$, вообще говоря, нерегулярно зависят от параметра ε. Это обстоятельство связано с наличием в соответствующих формулах оператора $(1-\chi)\left(-i\varepsilon^{1/2}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$. Действительно, под действием этого оператора распределение $v(x)$ переходит в функцию

$$\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{3/2}} v(y)\left[\widetilde{\chi_1}\left(\frac{x-y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right], \quad \chi_1(y) = 1 - \chi(y),$$

которая, вообще говоря, нерегулярно зависит от ε; например,

$$(1-\chi)\left(-i\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{3/2}}\widetilde{\chi_1}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Эту нерегулярность можно описать более явными формулами, если заменить в формулах для W_j разрешающий оператор R_0 уравнений идеального газа на его асимптотику по гладкости, которая строится аналогично п. 2.3 (в соответствующих формулах надо положить $\mu = \nu = 0$). Остаток при этом будет “более регулярным”: если асимптотический ряд по гладкости оборвать на N-м слагаемом, оставшийся оператор при действии на распределение v будет определять функцию, $(N + s)$-я производная которой будет оцениваться (в L_2) через норму v в H^s (в частности, если $v = \delta(x)$, указанная функция имеет $N - 2$ ограниченные при $\varepsilon \to +0$ производные).

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Т е о р е м а . *Разрешающий оператор R задачи Коши* (1), (2) *разлагается в асимптотический ряд*

$$R \sim \sum_{j=0}^{\infty} (T_j + T_j^+ + T_j^- + W_j)$$

в следующем смысле. Пусть

$$R^N = \sum_{j=0}^{N} (T_j + T_j^+ + T_j^- + W_j);$$

тогда оператор $R - R^N$ действует из H^s в H^{s+m} при $m \le N - 1/2$, причём

$$\| R - R^N \|_{H^s \to H^{s+m}} \le \mathrm{const} \cdot \varepsilon^{N/2 - m - 3/2}$$

при $m \le (N-3)/2$.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 16–11–10282).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маслов. В.П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.
2. *Хермандер Л.* Интегральные операторы Фурье // Математика. Сб. переводов. 1972. Т. 16. № 1. С. 17–61; № 2. С. 67–136.
3. *Доброхотов С.Ю, Шафаревич А.И.* Парамтрикс и асимптотика локализованных решений уравнений Навье–Стокса в R^3, линеаризованных на гладком течении // Мат. заметки. 1992. Т. 51. № 1. С. 72–82.
4. *Аллилуева А.И., Шафаревич А.И.* Нестандартные характеристики и локализованные асимптотические решения линеаризованной системы магнитной гидродинамики с малыми вязкостью и сопротивлением // ТМФ. 2017. Т. 190. № 1. С. 191–204.
5. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
6. *Доброхотов С.Ю., Жевандров П.Н., Маслов В.П., Шафаревич А.И.* Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами // Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 4. С. 31–46.
7. *Федорюк М.В.* Особенности ядер интегральных операторов Фурье и асимптотика решения смешанной задачи // УМН. 1977. Т. 32. № 6 (198). С. 67–115.

DOUBLE ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE RESOLVING OPERATOR OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE LINEARIZED SYSTEM OF GAS DYNAMICS

A. I. Allilueva, Corresponding Member of the RAS A. I. Shafarevich

Received September 6, 2018

We obtain double asymptotic expansion (with respect to smoothness and small viscosity) of the resolving operator of the Cauchy problem for the linearized system of gas dynamics. We derive estimates for the summands and for the residual in the Sobolev scale.We describe explicitly hydrodynamic and acoustic modes.

Keywords: equations of gas dynamics, resolving operator.