

СУБФИНСЛЕРОВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ КАРТАНА

А. А. Ардентов*, Ю. Л. Сачков

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе 02.07.2018 г.

Поступило 02.07.2018 г.

Левинвариантная l_∞ -субфинслерова задача на группе Картана рассматривается как задача быстрого действия. Описаны аномальные и особые нормальные траектории, доказана их оптимальность. Построен релейный фазовый поток, получены оценки числа переключений на релейных и смешанных траекториях.

Ключевые слова: субфинслерова геометрия, оптимальное управление, группа Картана.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524842138-141>

Субфинслерова геометрия является естественным обобщением субримановой (а потому и римановой) геометрии. Пусть M — гладкое многообразие, Δ — векторное распределение на M , тогда субриманова структура задаётся скалярным произведением в Δ , а субфинслерова структура — нормой в Δ .

Заметный интерес к субфинслеровой геометрии возник в последние годы в связи с её применением в геометрической теории групп [1], изометрически однородных пространствах [2], теории управления [3]. Важными вопросами субфинслеровой (как и субримановой) геометрии являются описание кратчайших и сфер, при этом естественными простейшими случаями являются левинвариантные структуры на нильпотентных группах Ли. Левинвариантная субфинслерова задача на группе Гейзенберга была исследована в работе [4]. Нильпотентные l_∞ -субфинслеровы структуры в случаях Мартине и Грушина были изучены в работе [5]. Данная работа продолжает эту линию исследований и посвящена левинвариантной l_∞ -субфинслеровой задаче в простейшем 5-мерном свободном нильпотентном случае — на группе Картана.

1. Постановка задачи. Существование решений. Алгебра Картана — это 5-мерная нильпотентная алгебра Ли $L = \text{span}(X_1, \dots, X_5)$ с таблицей умножения $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = X_5$, $\text{ad}X_4 = \text{ad}X_5 = 0$. Связная односвязная группа Ли M с алгеброй Ли L называется группой Картана.

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна
Российской Академии наук,
с. Вельково Переславского р-на Ярославской обл.

*E-mail: aaa@pereslavl.ru

Левинвариантная l_∞ -субфинслерова задача на группе Картана ставится следующим образом:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M, \quad u \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_\infty \leq 1\},$$

$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|),$$

$$q(0) = q_0 = \text{Id}, \quad q(T) = q_1, \quad T \rightarrow \min.$$

Существование оптимальных управлений следует из теорем Рашевского—Чжоу и Филиппова [6].

2. Принцип максимума Понтрягина. Введём гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$, $i = 1, 2, \dots, 5$, и соответствующие им гамильтоновы векторные поля $h_i \in \text{Vec}(T^*M)$.

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина [6, 7]). Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $q(t)$, $t \in [0, T]$, оптимальны, то существуют кривая $\lambda_t \in T_{q(t)}^*M$ и число $v \leq 0$, для которых выполнены условия

$$\dot{\lambda}_t = u_1(t)h_1(\lambda_t) + u_2(t)h_2(\lambda_t), \quad (1)$$

$$u_1(t)h_1(\lambda_t) + u_2(t)h_2(\lambda_t) = H(\lambda_t) = (|h_1| + |h_2|)(\lambda_t),$$

$$\lambda_t \neq 0,$$

$$H(\lambda_t) + v \equiv 0.$$

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (1) имеет четыре интеграла — функции Казимира на коалгебре Ли L^* : h_4 , h_5 , $E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$ и гамильтониан H .

3. Аномальные траектории. Пусть $v = 0$.

Теорема 2. Оптимальные аномальные траектории имеют вид

$$u(t) \equiv \text{const}, \quad \|u(t)\|_\infty \equiv 1,$$

и все такие управления оптимальны.

Аномальные траектории суть однопараметрические подгруппы в M , касающиеся распределения $\text{span}(X_1, X_2)$; они задают оптимальный синтез на аномальном многообразии

$$A = \{e^{u_1 X_1 + u_2 X_2} (\text{Id}) \mid u_i \in \mathbb{R}\}.$$

4. Виды нормальных экстремальных дуг. Пусть $-v = H(\lambda_t) > 0$.

Экстремальная дуга $\lambda_t, t \in I = (\alpha, \beta) \subset [0, T]$, называется

- 1) релейной дугой, если $\text{card}\{t \in I \mid h_1 h_2(\lambda_t) = 0\} < \infty$,
- 2) особой дугой, если выполняется одно из двух условий:

$h_1(\lambda_t) \equiv 0$ (h_1 -особая дуга) или $h_2(\lambda_t) \equiv 0$ (h_2 -особая дуга),

3) смешанной дугой, если она состоит из конечного числа релейных и особых дуг.

З а м е ч а н и е 1. Если $h_i(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$, то $u_i(t)|_{(\alpha, \beta)} \equiv s_i := \text{sgn} h_i(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)}$.

5. Особые дуги.

Теорема 3. Любая h_1 -особая дуга удовлетворяет одному из следующих условий:

- а) $h_1 = h_3 = h_4 = h_5 \equiv 0, h_2 \equiv \text{const} \neq 0, \forall |u_1(t)| \leq 1,$
 $u_2 \equiv s_2 \in \{\pm 1\};$

- б) $h_1 = h_3 \equiv 0, \left| \frac{h_5}{h_4} \right| \leq 0, h_4 \neq 0, h_2 \equiv \text{const} \neq 0,$
 $u_1(t) \equiv -s_2 \frac{h_5}{h_4}, u_2(t) \equiv s_2 \in \{\pm 1\}.$

Аналогичное описание имеет место для h_2 -особых дуг.

С л е д с т в и е 1. Все особые траектории оптимальны.

Для описания множества достижимости вдоль особых траекторий применяется принцип максимума Понтрягина в геометрической постановке [6]. Исследование всех возможных фазовых портретов вертикальной подсистемы нормальной гамильтоновой системы позволяет сформулировать следующую теорему об управлении для особых траекторий, приходящих на границу множества достижимости.

Теорема 4. h_1 -Особые траектории с $u_2 \equiv 1$, концы которых формируют множество, содержащее границу множества достижимости, имеют один из двух типов:

а) управление u_1 кусочно-постоянное с двумя переключениями и соответствующими значениями $\pm 1, u_1^0, \pm 1$ либо $\pm 1, u_1^0, \mp 1$ без ограничений на временные промежутки, где $u_1^0 \in [-1, 1];$

б) управление u_1 кусочно-постоянное с соответствующими значениями $\pm 1, \mp 1, \pm 1, \mp 1, \dots$ и времен-

ными промежутками T_0, T_1, T_2, T_3 , при этом $T_3 \leq T_1$ и $T_0 \leq T_2$.

Проекция множества достижимости вдоль h_1 -особых траекторий с $u_2 \equiv 1$ на пространство (x, z, v) приведена на рис. 1.

6. Релейный поток. Если $h_1 h_2(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$, то $u(t)|_{(\alpha, \beta)} \equiv (s_1, s_2)$, поэтому релейные экстремали удовлетворяют следующей гамильтоновой системе с гамильтонианом $H = |h_1| + |h_2|$:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -s_2 h_3, \\ \dot{h}_2 &= s_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= s_1 h_4 + s_2 h_5, \\ \dot{h}_4 &= \dot{h}_5 = 0, \\ \dot{q} &= s_1 X_1 + s_2 X_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая симметрию $(\lambda, q) \mapsto (k\lambda, q), k > 0$, будем считать далее, что $H(\lambda_t) \equiv 1$.

Введём на квадрате $\{(h_1, h_2) \mid H(\lambda) = 1\}$ угловую координату $\theta \in \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$:

$$h_1 = \text{sgn}(\cos \theta) \cos^2 \theta, \quad h_2 = \text{sgn}(\sin \theta) \sin^2 \theta.$$

Тогда вертикальная часть системы (2) принимает форму

$$\dot{\theta} = \frac{h_3}{|\sin 2\theta|}, \quad \theta \neq \frac{\pi n}{2}, \tag{3}$$

$$\dot{h}_3 = s_1 h_4 + s_2 h_5, \quad s_1 = \text{sgn} \cos \theta, \quad s_2 = \text{sgn} \sin \theta.$$

Система (3) сохраняется группой симметрий квадрата $\{(h_1, h_2) \mid H = 1\}$. Факторизуя по действию этой группы, можно свести рассмотрение системы (3) к фундаментальной области этой группы $\{(h_4, h_5) \in \mathbb{R}^2 \mid h_4 \geq h_5 \geq 0\}$.

На основе исследования фазового портрета системы (3) строится релейный поток.

Предложение 1. Пусть $\lambda \in L^* \cap \{H = 1\}$ и $h_4 \geq h_5 \geq 0$.

Если $E \neq h_4 > h_5$ или $h_4 = h_5 = 0$, то для любого $t > 0$ существует единственное решение λ_t системы (3), удовлетворяющее начальному условию $\lambda_0 = \lambda$, и, соответственно, единственная релейная траектория $q(t) = \pi(\lambda_t) =: \text{Exp}(\lambda, t)$.

Если $E = h_4 > h_5$, то для любого $T > 0$ существует конечное число решений $\{\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N\}, t \in [0, T]$, системы (3) с начальным условием $\lambda_0^1 = \dots = \lambda_0^N = \lambda$, и, соответственно, конечное число релейных траекторий $\{q^1(t), \dots, q^N(t)\} = \{\pi(\lambda_t^1), \dots, \pi(\lambda_t^N)\} =: \text{Exp}(\lambda, t)$.

Определим время разреза вдоль релейных траекторий:

$t_{\text{cut}}(\lambda) := \sup\{T > 0 \mid \text{ хотя бы одна из траекторий } \text{Exp}(\lambda, t) \text{ оптимальна при } t \in [0, T]\}$.

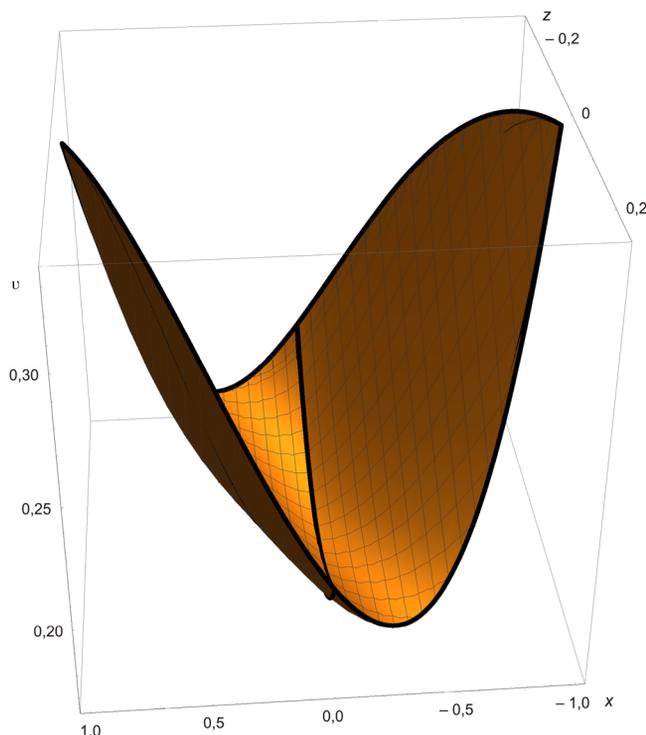


Рис. 1. Проекция множества достижимости вдоль особых траекторий на гиперплоскость (x, z, v) .

7. Оптимальность релейных траекторий.

7.1. Релейные траектории с малой энергией E .

Теорема 5. Если релейная экстремаль $\lambda_t, t \in [0, +\infty)$, удовлетворяет неравенству

$$\min(-|h_4|, -|h_5|) < E \leq \max(-|h_4|, -|h_5|),$$

то она оптимальна, т.е. $t_{\text{cut}}(\lambda_0) = +\infty$.

7.2. Релейные траектории с большой энергией E .

С помощью необходимых условий оптимальности [5, 8] доказана следующая оценка.

Теорема 6. Если $E > \max(-|h_4|, -|h_5|)$, то оптимальные релейные траектории имеют не более 11 переключений. В частности, в этом случае $t_{\text{cut}}(\lambda) < +\infty$.

8. Общий вид нормальных экстремалей.

Предложение 2. Для любой нормальной экстремали $\lambda_t, t \in [0, T]$, существуют моменты времени $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, для которых выполняются условия

$$1) h_1 h_2(\lambda_{t_i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$2) \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \quad h_1 h_2(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0 \quad \text{или}$$

$$h_1(\lambda_t)|_{[t_i, t_{i+1})} \equiv 0, \quad h_2(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0 \quad \text{или}$$

$$h_2(\lambda_t)|_{[t_i, t_{i+1})} \equiv 0, \quad h_1(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0.$$

9. Смешанные экстремальные дуги.

Предложение 3. Пусть $h_4 \geq h_5 \geq 0$. Особые экстремальные дуги могут примыкать к релейным дугам только в точках, удовлетворяющих следующим условиям:

$$1) \theta = \frac{3\pi}{2}, \quad h_3 = 0, \quad 0 < h_5 \leq h_4,$$

$$2) \theta = 0, \quad h_3 = 0, \quad 0 < h_5 = h_4.$$

С помощью необходимого условия оптимальности [5, 8] доказана следующая оценка.

Теорема 7. Оптимальные смешанные управления имеют не более 13 переключений.

Заключение. В данной работе описана структура экстремальных траекторий в левоинвариантной l_∞ -субфинслеровой задаче на группе Картана и получены оценки числа переключений на оптимальных траекториях. Ряд важных вопросов по этой задаче остаётся открытым:

1) точное описание времени разреза и множества разреза,

2) структура и регулярность субфинслеровой сферы.

Этим вопросам будут посвящены дальнейшие работы.

Авторы выражают благодарность Энрико Ле Донне (Enrico Le Donne) за обсуждения задачи.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 17–11–01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской Академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pansu P.* Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // *Ann. Math. (2)* 1989. V. 128. № 1. P. 1–60.
2. *Берестовский В.Н.* Однородные пространства с внутренней метрикой. II // *Сиб. мат. журн.* 1989. Т. 30. № 2. С. 14–28; 225.
3. *Boscain U., Chambrion Th., Charlot G.* Nonisotropic 3-Level Quantum Systems: Complete Solutions for Minimum Time and Minimum Energy // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* 2005. V. 5. № 4. P. 957–990.
4. *Busemann H.* The isoperimetric Problem in the Minkowski Plane // *AJM.* 1947. V. 69. P. 863–871.
5. *Barilari D., Boscain U., Le Donne E., Sigalotti M.* Sub-Finsler Structures from the Time-Optimal Control Viewpoint for Some Nilpotent Distributions // *J. Dyn. Control Syst.* 2017. V. 23. P. 547.
6. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкrelidze Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
8. *Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V.* Symplectic Geometry for Optimal Control. Nonlinear Control-lability and Optimal Control. Monogr. Text-books Pure Appl. Math. N.Y.: Dekker, 1990. V. 133. P. 263–277.

SUB-FINSLER PROBLEM ON CARTAN GROUP

A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov

Received by Academician of the RAS R. V. Gamkrelidze July 2, 2018

Received July 2, 2018

Left invariant 1-infinity sub-Finsler problem on Cartan group is considered as time-optimal control problem. We describe abnormal and singular normal trajectories, then prove that all such trajectories are optimal. We construct the bang-bang flow and obtain upper bounds on the number of switchings on bang-bang and mixed minimizers.

Keywords: Sub-Finsler geometry, optimal control, Cartan group.