ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 2, с. 142–146

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518+517.54

ОСНОВЫ КВАЗИКОНФОРМНОГО АНАЛИЗА ДВУХИНДЕКСНОЙ ШКАЛЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. К. Водопьянов

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 24.07.2018 г.

Поступило 06.08.2018 г.

Определяется шкала отображений, зависящая от двух вещественных параметров p, q, $n-1 \le q \le p < \infty$, и весовой функции θ. В случае $q = p = n$, $\theta \equiv 1$ получаем известные в литературе отображения с ограниченным искажением. Отображения двухиндексной шкалы наследуют многие свойства последних. Они применяются для решения ряда задач глобального анализа и прикладных задач.

Ключевые слова: квазиконформный анализ, пространство Соболева, ёмкостная оценка, дифференцируемость.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524842142-146

В 60-е годы прошлого века Ю.Г. Решетняк заложил основы теории отображений с ограниченным искажением, которую можно рассматривать как естественное обобщение теории аналитических функций на евклидовы пространства произвольной размерности $n \ge 2$ (см. [1]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область (т.е. открытое связное множество) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется отображением с ограниченным искажением, если

$$|Df(x)|^n \le KJ(x,f) \text{ для п.в. } x \in \Omega, \tag{1}$$

где $K \in [1,\infty)$ — константа, $Df(x) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ — матрица Якоби, $J(x,f) = \det Df(x)$. Ю.Г. Решетняк установил основные топологические свойства этих отображений, доказав, что всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно открыто и дискретно [1, с. 141–146]. Известно, что всякое гомеоморфное отображение с ограниченным искажением квазиконформно.

В соответствии со следствием 4 работы всякое непрерывное открытое и дискретное отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ с условием

$$|\operatorname{adj} Df(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le K'J(x,f) \text{ для п.в. } x \in \Omega \tag{2}$$

является отображение с ограниченным искажением, т.е. удовлетворяет также соотношению (1) (здесь $\operatorname{adj} A$ — присоединённая матрица к $(n\times n)$-матрице A), а $K' \in [1,\infty)$ — постоянная). Мы включаем отображения класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ с условием (2) в двухиндексную шкалу отображений (см. ниже определение 1), зависящую от вещественных параметров $n-1 < q \le p < \infty$. Цель работы — показать, что отображения двухиндексной шкалы наследуют многие свойства отображений с ограниченным искажением. Заметим, что без дополнительных условий отображения класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ не обладают многими привычными в квазиконформном анализе свойствами: дифференцируемостью, $\mathcal{N}$-свойством Лузина, $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина и др. Поэтому доказательства основных утверждений работы новые.

Работы [2–5] мотивируют определение следующего класса отображений. Пусть $\theta\colon \Omega \to (0,\infty)$ — произвольная измеримая функция, называемая далее весовой.

Определение 1. Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется отображением с внутренним ограниченным θ-весовым (q, p)-искажением (принадлежит классу $\mathcal{ID}(\Omega; q, p; \theta, 1)$), $n-1 \le q \le p < \infty$, если:

1) f непрерывно, открыто и дискретно;

2) f принадлежит классу $W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

3) якобиан $J(x,f) \ge 0$ для п. в. $x \in \Omega$;

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Новосибирский национальный исследовательский университет

E-mail: vodopis@math.nsc.ru

4) отображение f имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj} Df(x)=0$ п.в. на множестве $Z=\{x\in\Omega:\ \det Df(x)=0\}$;

5) функция локального θ-весового (q,p)-искажения

$$\Omega\ni x\mapsto \mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(x,f)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\theta^{\frac{n-1}{q}}(x)\,|Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{n-1}{p}}}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 0 & \text{иначе},\end{cases} \qquad (3)$$

принадлежит классу $L_\varrho(\Omega)$, где ϱ находится из условия $\dfrac{1}{\varrho}=\dfrac{n-1}{q}-\dfrac{n-1}{p}$ ($\varrho=\infty$ при $q=p$).

Введём следующее обозначение:

$$\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(f;\Omega)=\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\,|\,L_\varrho(\Omega)\|.$$

Пусть $f\colon\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, область D компактно вложена в Ω (т.е. D ограничена и $\overline{D}\subset\Omega$, коротко $D\Subset\Omega$) и $y\notin f(\partial D)$. Обозначим символом $\mu(y,f,D)>0$ степень отображения f в точке y относительно D. Будем говорить, что f сохраняет ориентацию, если $\mu(y,f,D)>0$ для любой области $D\Subset\Omega$ и для любой точки $y\in f(D)\setminus f(\partial D)$. Если множество $A\subset\Omega$, то функцией кратности называется отображение $\mathbb{R}^n\ni y\mapsto N(y,f,A)=\#\{f^{-1}(y)\cap A\}$. Кроме того, введем обозначение $N(f,A)=\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n}N(y,f,A)$.

Пусть $f\colon\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое и дискретное отображение. Область $D\Subset\Omega$ называется нормальной, если $f(\partial D)=\partial f(D)$. Нормальной окрестностью точки $x\in\Omega$ называется нормальная область $U\subset\Omega$ такая, что $\overline{U}\cap f^{-1}(f(x))=\{x\}$. Величина $i(x,f)=\mu(f(x),f,U)$ не зависит от выбора нормальной окрестности U точки x (см., например, [1, с. 41–46] и [6, Часть 1]) и называется локальным индексом отображения f в точке x. Точка $x\in\Omega$ называется точкой ветвления отображения f, если f не является гомеоморфизмом ни в какой окрестности точки x. Совокупность всех точек ветвления отображения f обозначается символом B_f.

Л е м м а 1. *Предположим, что непрерывное открытое и дискретное отображение $f\colon\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathcal{ID}(\Omega;\,q,p;\,\theta,1)$. Тогда f сохраняет ориентацию.*

Для непрерывного открытого и дискретного отображения $f\colon\ \Omega\to\mathbb{R}^n$, сохраняющего ориентацию, и нормальной области $D\Subset\Omega$ определим на образе $V=f(D)$ функцию Полецкого $g_D\colon\ V\to\mathbb{R}^n$, полагая

$$V\ni y\mapsto g_D(y)=\Lambda\sum_{x\in f^{-1}(y)\cap D}i(x,f)x, \qquad (4)$$

где число $\Lambda\in(0,\infty)$ фиксируется ниже. Функция вида (4) введена Е.А. Полецким в работе [8, с. 265] для отображений с ограниченным искажением. Свойства функции Полецкого для отображений класса $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$ сформулированы в следующем утверждении. По аналогии с [7, теорема 3.1.8] выделим борелевское множество $\Sigma\subset D$ нулевой $\mathcal{H}^n$-меры, вне которого f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина. Пусть $Z=\{x\in D\setminus\Sigma:\ J(x,f)=0\}$. Множество Z можно считать борелевским. Положим далее $Z'=f(\Sigma)$, $\Sigma'=f(Z)$.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что отображение $f\colon\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$. Тогда*:

1) *функция g_D, определённая равенством* (4), *непрерывна и абсолютно непрерывна на п.в. линиях, параллельных координатным осям* (*принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(V)$);

2) $Dg_D(y)=0$ *п.в. на множестве* $Z'\cup\Sigma'$;

3) *если весовая функция* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема, то функция g_D, определённая равенством* (4), *принадлежит классу Соболева $W^1_s(V)$, где $s=\dfrac{p}{p-(n-1)}$; при этом*

$$\|Dg_D\,|\,L_s(V)\|\leq\Lambda N(f,D)^{\frac{s-1}{s}}\,\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\,|\,L_\varrho(D)\|\left(\int\limits_D\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Метод доказательства теоремы 1 можно применить для того, чтобы установить свойства перенесённых функций (5) и (8), определяемых ниже.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое и дискретное отображение, сохраняющее ориентацию. Для произвольной гладкой финитной функции $u\in C^1_0(\Omega)$, носитель $\operatorname{supp}u$ которой расположен в компактно вложенной области $D\Subset\Omega$, определим *п е р е н е с ё н н у ю ф у н к ц и ю* $w:f(\Omega)\to\mathbb{R}$ по правилу

$$f(\Omega)\ni y\mapsto w(y)=\begin{cases}\max\limits_{x\in f^{-1}(y)}u(x), & y\in f(\operatorname{supp}u),\\ 0, & y\notin f(\operatorname{supp}u).\end{cases} \qquad (5)$$

Свойство функции (5) сформулировано в следующем утверждении.

Т е о р е м а 2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ — отображение класса $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$,*

$n-1 \le q \le p < \infty$, *а весовая функция* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема. Тогда*:

1) *перенесённая функция* w *непрерывна, обладает свойством* ACL *на области* $f(\Omega)$; *более того,* $\nabla w = 0$ *п.в. на множестве* $Z' \cup \Sigma'$ (*здесь множества* Z' *и* Σ' *такие же, как и в формулировке теоремы* 1);

2) *в случае* $n-1<q\le p<\infty$ *для компактно вложенной области* $D \Subset \Omega$ *такой, что* $\operatorname{supp} u \subset D$, *и перенесенной функции* $w: f(\Omega)\to\mathbb{R}$ (*заданной формулой* (5)), *верна оценка*

$$\left(\int\limits_{f(D)} |\nabla w|^s(y)dy\right)^{\frac{1}{s}} \le$$

$$\le \|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\mid L_\varrho(D)\|\left(\int\limits_D |\nabla u|^r(x)\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}, \quad (6)$$

где $s=\dfrac{p}{p-(n-1)}$, $r=\dfrac{q}{q-(n-1)}$, $\dfrac{1}{\varrho}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{r}$, $\omega(x)=$ $=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)\in L_{1,\,\mathrm{loc}}$;

в случае $n-1=q\le p<\infty$ *верна оценка*

$$\left(\int\limits_{f(D)} |\nabla w|^s(y)dy\right)^{\frac{1}{s}} \le$$

$$\le \|\mathcal{K}^{\theta,1}_{n-1,p}(\cdot,f)\mid L_s(D)\|\|\nabla u\mid L_\infty(D)\|. \quad (7)$$

Определение 3. Пусть $f\colon \Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое и дискретное отображение, сохраняющее ориентацию, Λ — произвольное положительное число. Для произвольной гладкой финитной функции $u\in C^1_0(\Omega)$ определим перенесённую функцию $v=f_*u: f(\Omega)\to\mathbb{R}$ по правилу

$$f(\Omega)\ni y\mapsto v(y)=$$

$$=\begin{cases}\Lambda \sum\limits_{x\in f^{-1}(y)} i(x,f)u(x), & y\in f(\operatorname{supp} u),\\ 0, & y\notin f(\operatorname{supp} u).\end{cases} \quad (8)$$

Здесь Λ — положительная постоянная, которая фиксируется позже.

Теорема 3. *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^n$ *и* $f\colon \Omega\to\mathbb{R}^n$ — *отображение класса* $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$, $n-1<q\le p<\infty$, *а весовая функция* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема. Тогда перенесённая функция* $v=f_*u: f(\Omega)\to\mathbb{R}$, $u\in C^1_0(\Omega)$, *непрерывна, обладает свойством* ACL *на области* $f(\Omega)$; *более того,* $\nabla v = 0$ *п.в. на множестве* $Z'\cup\Sigma'$ (*здесь множества* Z' *и* Σ' *такие же, как и в формулировке теоремы* 1). *Для любой области* $D\Subset\Omega$ *такой, что* $\operatorname{supp} u\subset D$, *верна оценка*

$$\|v\mid L^1_s(f(D))\|\le$$

$$\le \Lambda N(f,D)^{\frac{s-1}{s}}\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\mid L_\varrho(D)\|\cdot\|u\mid L^1_r(D,\omega)\|,$$

где $r=\dfrac{q}{q-(n-1)}$, $s=\dfrac{p}{p-(n-1)}$, $\dfrac{1}{\varrho}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{r}$.

Здесь и далее символ $\|u\mid L^1_r(D,\omega)\|$ обозначает норму $\left(\int\limits_D |\nabla u|^r(x)\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}$ обобщённого градиента ∇u в пространстве Лебега с весом ω.

В пространстве $L^1_p(D,\omega)$ можно определить ёмкость конденсатора.

Определение 4. Упорядоченная тройка $E=(F_0,F_1;D)$ непустых множеств, где D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а F_1 и F_0 — замкнутые подмножества $\overline{D}$, называется конденсатором в $D\subset\mathbb{R}^n$. Величина

$$^{\omega}_{p}(E)=\operatorname{cap}^\omega_p(F_0,F_1;D)=\inf\int\limits_D |\nabla g|^p(z)\omega(z)dz,$$

где инфимум берётся по всем непрерывным функциям g $\left(g\in L^1_p(D)\cap C(D)\right)$, таким, что $g\ge 1$ $(g\le 0)$ в некоторой окрестности множества F_1 (F_0), называется ω-весовой p-ёмкостью конденсатора $E=(F_0,F_1;D)$. Если U — открытое множество, C — компакт в U, то конденсатор $E=(\partial U, C;\, U)$ будем обозначать символом $E=(U,C)$.

С помощью оценки (6) можно получить ёмкостное неравенство типа Полецкого.

Следствие 1. *Пусть* $f\in\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$, $n-1<q\le p<\infty$, *а весовая функция* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема. Если* $E=(A,C)$ — *конденсатор в* Ω, *причём* $A\Subset\Omega$ — *область, а* $C\subset A$ — *компакт,*

$$(\operatorname{cap}_s f(E))^{1/s}\le\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\mid L_\varrho(A\setminus C)\|\cdot(\operatorname{cap}^\omega_r E)^{1/r}, \quad (9)$$

где $s=\dfrac{p}{p-(n-1)}$ *и* $r=\dfrac{q}{q-(n-1)}$, $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.

Из теоремы 3 выводим ёмкостное неравенство типа Вяйсяля.

Следствие 2. *Пусть* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ — *отображение класса* $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$, $n-1<q\le p<\infty$, *а весовая* *функция* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема. Если*

1) $E=(A,C)$ *— конденсатор в* Ω *такой, что* $A\Subset\Omega$, C *— компакт в* A, *то*

$$(\mathrm{cap}_s f(E))^{1/s}\le$$
$$\le\frac{\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\mid L_\varrho(A\setminus C)\|\cdot(N(f,A))^{(s-1)/s}}{M(f,C)}(\mathrm{cap}^\omega_r E))^{1/r},$$

где $s=\dfrac{p}{p-(n-1)}$, $r=\dfrac{q}{q-(n-1)}$, $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *и* $M(f,C)=\inf\limits_{x\in f(C)}\sum\limits_{z\in f^{-1}(x)\cap C} i(z,f)$.

2) $E=(A,C)$ *— конденсатор в* Ω *такой, что* $A\Subset\Omega$ *— нормальная область, а* C *— компакт в* A, *то*

$$(\mathrm{cap}_s f(E))^{1/s}\le\frac{\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\mid L_\varrho(A\setminus C)\|}{(N(f,A))^{1/s}}(\mathrm{cap}^\omega_r E))^{1/r},$$

где $s=\dfrac{p}{p-(n-1)}$, $r=\dfrac{q}{q-(n-1)}$ *и* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.

При помощи оценок (7) и (9) можно доказать дифференцируемость отображений класса $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$.

Теорема 4. *Отображение класса* $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$, *где* $n-1\le q\le p<n+\dfrac{1}{n-2}$, *дифференцируемо п.в. в области* Ω *при условии, что весовая функция* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема в* Ω.

Из доказательства теоремы выводим несколько новых свойств.

Предложение 1. *Пусть* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ *— отображение класса* $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$, $n-1\le q\le p<n+\dfrac{1}{n-2}$, *а весовая функция* $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема при* $n-1<q$. *Тогда* $B_f\subset Z=\{x\in\Omega: J(x,f)=0\}$ $J(x,f)=0\}$ *с точностью до множества нулевой меры, т.е.* $|B_f\setminus Z|=0$, *и отображение* $f\in\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$ *имеет конечное искажение.*

Теорема 5. *Пусть* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ *— отображение класса* $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$, $n-1\le q\le p<n+\dfrac{1}{n-2}$, $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{n-1}{q}-\dfrac{n-1}{p}$. *Пусть ещё* $p'=\dfrac{s}{s-(n-1)}$, *число* q' *находится из условия* $\dfrac{n-1}{\rho}=\dfrac{1}{q'}-\dfrac{1}{p'}$, *а весовая функция* $\bar\theta(x)=\theta^{\frac{(n-1)^2q'}{q}}(x)$. *Тогда* $1\le q'\le p'<\infty$ *и отображение* $f\colon D\to f(D)$, *где* $D\Subset\Omega$ *— нормальная область, индуцирует ограниченный оператор* $f\colon L^1_{p'}(f(D))\cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(f(D))\to L^1_{q',\sigma}(D)$ *однородных пространств Соболева по правилу* $f^*(g)=g\circ f$, $g\in L^1_{p'}(f(D))\cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(f(D))$. *Для нормы оператора* f^* *справедлива оценка* $\|f^*\|\le N(f,D)^{\frac{1}{p'}}\left\|K^{\theta,1}_{q',p'}(\cdot,f)\mid L_{\frac{\rho}{n-1}}(D)\right\|$.

Следствие 3. *Пусть* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ *— отображение класса* $\mathcal{ID}(\mid;q,p;1,1)$, $n-1\le q\le p\le n$. *Тогда*

1) f *обладает* $\mathcal{N}^{-1}$*-свойством Лузина:* $|f^{-1}(E)|=0$, *если* $|E|=0$, $E\subset\Omega'$;

2) $J(x,f)>0$ *п.в. в* Ω;

3) *множество* B_f *точек ветвления имеет меру нуль.*

Следствие 4. *Всякое отображение* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ *класса* $\mathcal{ID}(\Omega;n-1,n;1,1)$ *является отображением с ограниченным искажением.*

Для отображений класса $\mathcal{ID}(\Omega;n-1,n;1,1)$ дифференцируемость, конечность искажения, а также свойства, сформулированные в следствии 3, доказаны в работе [9].

По аналогии с определением 1 можно ввести класс отображений $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ с внешним ограниченным θ-весовым (q,p)-искажением (принадлежит классу $\mathcal{OD}(\Omega;q,p;\theta,1)$), $n-1\le q\le p<\infty$, если выполняются условия 1), 2), 3) определения 1, вместо 4) — условие

4′) отображение f имеет конечное искажение: $Df(x)=0$ п.в. на множестве $Z=\{x\in\Omega:\det Df(x)=0\}$;

а вместо (5) — условие

5′) функция локального θ-весового (q,p)-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K^{\theta,1}_{q,p}(x,f) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)\,|\,Df(x)\,|}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases}$$

принадлежит классу $L_\kappa(\Omega)$, где κ находится из условия $\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ ($\kappa=\infty$ при $q=p$).

Класс $\mathcal{OD}(\Omega;q,p;\theta,1)$ изучался в [5] при условии $f\in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Справедлива

Теорема 6. *Если $f\colon \Omega\to\Omega'$ принадлежит классу $\mathcal{OD}(\Omega;q,p;\theta,1)$, $n-1<q\le p<\infty$, то f принадлежит также и классу $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$. Более того,*

$$\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\,|\,L_\varrho(\Omega)\|\le\|K^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\,|\,L_\kappa(\Omega)\|^{n-1}.$$

Вывод теоремы 6 состоит в том, что всякое утверждение, доказанное для отображений класса $\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$, справедливо также и для отображений класса $\mathcal{OD}(\Omega;q,p;\theta,1)$.

Совокупность гомеоморфизмов $f\colon\Omega\to\Omega'$ класса $\mathcal{ID}(\Omega;q,n;1,1)\cap W^1_n(\Omega)$, где области Ω и Ω' имеют липшицевы границы, можно рассматривать в качестве класса допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости. Заметим, что класс допустимых деформаций работы [10] содержится в пересечении $\mathcal{ID}(\Omega;q,n;1,1)\cap W^1_n(\Omega)$ при некотором $q>n-1$, а класс деформаций работы [11] совпадает с классом $\mathcal{ID}(\Omega;n-1,n;1,1)\cap W^1_n(\Omega)$. Новый класс допустимых деформаций представляет собой шкалы семейств, зависящих от непрерывного параметра $q\in[n-1,n)$. Эти семейства естественно упорядочены по вложению: класс с большим q содержится в классе с меньшим q. Такая иерархия позволяет подобрать под данный материал допустимый для него класс деформаций. Доказательство существования экстремальной деформации в классе $\mathcal{ID}(\Omega;q,n;1,1)\cap W^1_n(\Omega)$ для вариационной задачи с некоторыми естественными условиями на рост интегранта приведено в работе [12].

Замечание. В работе [13] следствие 1 настоящего сообщения сформулировано и доказано при более сильном предположении: $A\Subset\Omega$. Однако доказательство утверждения, приведённое в [13], можно модифицировать так, чтобы получить и доказательство следствия 1 (т.е. в предположении $A\Subset\Omega$).

Работа подготовлена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 1.3087.2017/4.6) и частичной поддержке гранта РФФИ (код проекта № 17–01–00801).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Водопьянов С.К.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74. № 4. С. 5–32.
3. *Водопьянов С.К.* // Мат. сб. 2012. Т. 203. № 10. С. 3–32.
4. *Водопьянов С.К.* // ДАН. 2014. Т. 455. № 2. С. 130–134.
5. *Байкин А.Н., Водопьянов С.К.* // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 2. С. 290–321.
6. *Rickman S.* Quasiregular Mappings. B.: Springer-Verlag, 1993.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
8. *Полецкий Е.А.* // Мат. сб. 1970. Т. 83(125). № 2(10). С. 261–272.
9. *Tengvall V.* // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2014. V. 51. № 12. P. 381–399.
10. *Ball J.* // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1981. V. 88A. P. 315–328.
11. *Iwaniec T., Onninen J.* // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. V. 194. № 3. P. 927–986.
12. *Molchanova A.O., Vodopyanov S.K.* Injectivity Almost Everywhere and Mappings with Finite Distortion in Nonlinear Elasticity // arxiv.org/pdf/1704.08022. P. 1–36.
13. *Водопьянов С.К.* // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 5. С. 1020–1056.

FOUNDATIONS OF QUASICONFORMAL ANALYSIS OF A TWO-INDEX SCALE OF SPATIAL MAPPINGS

S. K. Vodopyanov

Received by Academician of the RAS Yu.G. Reshethyak July 24, 2018

Received August 6, 2018

We define a scale of mappings that depends on two real parameters p and q, $n-1\le q\le p<\infty$, and a weight function θ. In the case of $q=p=n$, $\theta\equiv 1$, we obtain the well known mappingswith bounded distortion. Mappings of a two-index scale inherit many properties of mappings with bounded distortion. They are used for solving a few problems of global analysis and applied problems.

Keywords: quasiconformal analysis, Sobolev space, capacity estimate, theorem on removable.