ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 3, с. 260–264

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТРАНСРЯДЫ

А. Д. Брюно

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 16.08.2018 г.

Поступило 16.08.2018 г.

Рассматривается полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n в окрестности нуля или бесконечности независимой переменной. В 2004 г. был предложен метод вычисления его решений в виде степенных рядов и экспоненциальной добавки, которая включает ещё один степенной ряд. Она содержит произвольную постоянную, существует лишь в множестве E_1, состоящем из секторов комплексной плоскости, и находится из решения ОДУ порядка $n - 1$. Возможна иерархическая последовательность экспоненциальных добавок, каждая из которых определяется из ОДУ всё меньшего порядка $n - i$ и существует в своём множестве E_i. При этом надо следить за непустотой пересечения множеств существования $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_i$. Каждая экспоненциальная добавка продолжается в своё экспоненциальное разложение, содержащее счётное множество степенных рядов. В итоге получается разложение решения в трансряд, включающий счётное множество степенных рядов, которые все суммируемы. Трансряд описывает семейства решений исходного уравнения в определённых секторах комплексной плоскости.

Ключевые слова: степенные ряды, экспоненциальная добавка, экспоненциальное разложение, трансряд.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524843260-264

1. Пусть $x \in \mathbb{C}$. Положим $\omega = -1$, если $x \to 0$, и $\omega = 1$, если $x \to \infty$, т.е.

$$x^\omega \to \infty.$$

Рассмотрим степенные ряды

$$\varphi(x) = a_r x^r + \sum_{\omega s < \omega r} a_s x^s, \qquad (1)$$

где r и s — рациональные числа с общим знаменателем q, a_r и a_s — комплексные постоянные, т.е. (1) — это ряды Пюизе—Лорана. Ряды (1), в которых все коэффициенты a_s удовлетворяют неравенствам $|a_s| \le AB^{|s|}\Gamma^k(|s|)$, где A, B, k — положительные постоянные и $\Gamma(|s|)$ — гамма-функция (факториал), образуют класс Жевре. Всякий степенной ряд (1) класса Жевре суммируется в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$, если $\omega = -1$, или точки $x_0 = \infty$, если $\omega = 1$, на q-листном накрытии $\mathbb{C}_q$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с несколькими разрезами, выходящими из точки x_0 [1].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (2)$$

где $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Теорема 1 [2]. *Если в ОДУ (2) $f(x, y)$ является многочленом по зависимой переменной y и всем её производным $y', \ldots, y^{(n)}$ и принадлежит классу Жевре по независимой переменной x, то его решение $y = \varphi(x)$ в виде степенного ряда (1) относится к классу Жевре.*

Замечание 1. Степенные ряды, представляющие решения алгебраических и аналитических уравнений, всегда сходятся, т.е. аналитичны. Поэтому класс аналитических уравнений замкнут на аналитических решениях. Для ОДУ решения в виде степенных рядов зачастую расходятся, но принадлежат классу Жевре, т.е. суммируемы. Согласно теореме 1, этот класс ОДУ замкнут.

В [3] был предложен следующий алгоритм вычисления всех решений уравнения (2) класса Жевре по x и полиномиального уравнения по y и её производным. В ОДУ (2) ряд $f(x, y)$ рассматривается как сумма дифференциальных мономов $a_i(x, y)$, каждый из которых является произведением обычного монома $\mathrm{const} \cdot x^\alpha y^\beta$, где постоянные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и конечного числа производных $y^{(l)}$. Каждому дифференциальному моному $a(x, y)$ ставится в соответствие векторный показатель степени $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по таким правилам:

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва
E-mail: *abruno@keldysh.ru*

$$Q(\text{const}) = 0, \quad Q(x^\alpha y^\beta) = (\alpha, \beta),$$
$$Q(y^{(l)}) = (-l, 1), \quad Q(a \cdot b) = Q(a) + Q(b).$$

Множество $\mathbf{S}(f)$ всех векторных показателей $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(x, y)$, входящих в сумму $f(x, y)$, называется носителем суммы $f(x, y)$. Замыкание $\Gamma(f)$ выпуклой оболочки носителя $\mathbf{S}(f)$ называется многоугольником суммы $f(x, y)$. Граница $\partial\Gamma$ многоугольника Γ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и рёбер $\Gamma_j^{(1)}$. Каждым вершине и ребру $\Gamma_j^{(d)}$ ставятся в соответствие укороченная сумма

$$\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = \sum a_i(x, y) \quad \text{по } Q(a_i) \in \Gamma_j^{(d)} \tag{3}$$

и нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \{P = (p_1, p_2): \langle Q, P\rangle = \langle Q', P\rangle,$$
$$Q, Q' \in \Gamma_j^{(d)}, \langle Q, P\rangle > \langle Q'', P\rangle; Q'' \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(d)}\},$$

лежащий в двойственной плоскости $\mathbb{R}_*^2 = \{P = (p_1, p_2)\}$. Здесь $\langle Q, P\rangle = q_1p_1 + q_2p_2$ — скалярное произведение. У каждого решения $y = \varphi(x)$ в виде ряда (1) уравнения (2) первое слагаемое $y = a_r x^r$ является решением укороченного уравнения (3), если $\omega(1, r) \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $\omega = -1$, т.е. $x \to 0$, то вершины и рёбра $\Gamma_j^{(d)}$ берутся на левой стороне многоугольника $\Gamma(f)$, включая верхние и нижние. Если $\omega = 1$, т.е. $x \to \infty$, то вершины и рёбра $\Gamma_j^{(d)}$ берутся на правой стороне многоугольника $\Gamma(f)$, включая верхние и нижние.

2. Пусть ряд

$$y = \varphi(x) = a_r x^r + \sum_{\omega s < \omega r} a_s x^s \tag{4}$$

является формальным решением уравнения (2). При подстановке $y = \varphi(x) + z$ уравнение (2) перейдёт в уравнение

$$g(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, \varphi(x) + z) = 0. \tag{5}$$

Оно имеет решение $z = 0$. Поэтому многоугольник $\tilde{\Gamma} = \Gamma(g)$ имеет нижнее горизонтальное ребро $\tilde{\Gamma}^{(1)}$ высоты $m = q_2 \geq 1$. Этому ребру соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}(x, z) = 0. \tag{6}$$

Л е м м а 1 [3]. *Если $m = 1$, то*

$$\hat{g}(x, z) = \left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{y=\varphi(x)} z,$$

где $\left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{y=\varphi(x)}$ *— это оператор: первая вариация функции f, взятая на $y = \varphi(x)$. Он применяется к z.*

Л е м м а 2 [3]. *При логарифмическом преобразовании*

$$y_1 = \frac{d \ln z}{dx} \tag{7}$$

для каждого целого $l \geq 0$ имеем

$$z^{(l)} = z[y_1^l + P_{l-1}(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(l-1)})],$$

где P_{l-1} — определённый многочлен степени $l - 1$ от указанных переменных с постоянными коэффициентами.

С л е д с т в и е 1. *После замены* (7)

$$\hat{g}(x, z) = z^m f_1(x, y_1), \tag{8}$$

где $f_1(x, y_1)$ — дифференциальный многочлен по y_1 и её производным порядка $n - 1$, если n — порядок дифференциального многочлена $\hat{g}(x, z)$. А именно если $\hat{g}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}(x, z, z', \ldots, z^{(n)})$, то

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) =$$
$$= \hat{g}(x, 1, y_1, \ldots, y_1^n + P_{n-1}(y_1, \ldots, y_1^{(n-1)})).$$

Т е о р е м а 2. *Если*

$$\left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{y=\varphi(x)} = \sum_{k=1}^n A_k(x) \frac{d^k}{dx^k},$$

то при $y_1 = \dfrac{d \ln z}{dx}$ *и $m = 1$ в* (8) *имеем*

$$f_1(x, y_1) = \sum_{k=0}^n A_k(x)[y_1^k + P_{k-1}(y_1, \ldots, y_1^{(k-1)})].$$

Посредством преобразования (7) решение уравнения (6) порядка n сводится к решению уравнения

$$f_1(x, y_1) = 0 \tag{9}$$

порядка $n - 1$. Указанным выше способом находятся все решения уравнения (9) в виде степенных рядов

$$y_1 = \varphi_1(x) = b_\rho x^\rho + \sum_{\omega\sigma < \omega\rho} b_\sigma x^\sigma. \tag{10}$$

Тогда решения укороченного уравнения (6) суть

$$z = z_0(x) = c_1 \exp \int \varphi_1(x) dx, \tag{11}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Т е о р е м а 3 [4]. *Решения полного уравнения* (5) *имеют вид*

$$z = z_0(x) + \sum_{k=2}^\infty B_k(x) z_0^k, \tag{12}$$

где $B_k(x)$ — степенные ряды вида (1).

Для каждого $B_k(x)$ можно составить своё ОДУ по исходному уравнению (2) аналогично тому, как это было сделано для функциональных коэффициентов сложных и экзотических разложений решений ОДУ [5, 6].

Отметим, что при $x^\omega \to \infty$ экспоненциальные добавки (11) и разложения (12) должны стремиться к нулю. Но $\exp \alpha x^\beta \to 0$ только при $\mathrm{Re}(\alpha x^\beta) < 0$, т.е. согласно (10) $\exp\int\varphi_1(x)dx \to 0$ при $\mathrm{Re}\left(\dfrac{b_\rho x^{\rho+1}}{\rho+1}\right) < 0$. Это неравенство выделяет на $\mathbb{C}_q$ несколько секторов, их совокупность обозначим E_1. Это множество назовём множеством существования экспоненциальной добавки (11) и разложения (12).

3. Пусть степенное разложение (10) является решением уравнения (9). Сделаем в уравнении (9) подстановку $y_1 = \varphi_1(x) + z_1$ и получим уравнение

$$g_1(x, z_1) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x, \varphi_1 + z_1) = 0.$$

Многоугольник $\Gamma(g_1)$ дифференциальной суммы $g_1(x, z_1)$ имеет нижнее горизонтальное ребро высоты $m_1 \geq 1$, которому соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1(x, z_1) = 0. \qquad (13)$$

После логарифмического преобразования

$$\frac{d\ln z_1}{dx} = y_2$$

получаем

$$\hat{g}_1(x, z_1) = z_1^{m_1} f_2(x, y_2),$$

где $f_2(x, y_2)$ — дифференциальная сумма. При этом укороченное уравнение (13) порядка $n-1$ переходит в уравнение $f_2(x, y_2) = 0$ порядка $n - 2$. Пусть $y_2 = \varphi_2(x)$ — его решение в виде степенного ряда. Тогда укороченное уравнение (13) имеет решения

$$z_1 = c_2 \exp\int\varphi_2(x)dx.$$

При $x^\omega \to \infty$ они стремятся к нулю в определённом секториальном множестве E_2 q-листного накрытия $\mathbb{C}_q$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом решения полного уравнения (5) имеют вид

$$z = c_1 \exp\int\left[\varphi_1(x) + c_2 \exp\int\varphi_2(x)dx + \ldots\right]dx + \ldots \qquad (14)$$

Это разложение имеет смысл только в пересечении $E_1 \cap E_2 \stackrel{\text{def}}{=} D_2$. В нём имеется двупараметрическое семейство разложений (14). Вне D_2, но в множестве E_1 существует только однопараметрическое семейство асимптотик решений (11). Вне множества E_1 существует только одно решение (4).

Итак, получаем следующую последовательность уравнений и их решений.

Шаг 0. Исходное уравнение $f(x, y) = 0$ порядка n и его решение $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — степенной ряд.

Шаг 1. Из $f(x, y)$ и $\varphi(x)$ по следствию 1 и теореме 2 получаем уравнение $f_1(x, y_1) = 0$ порядка $n-1$, его решение $y_1 = \varphi_1(x)$ в виде степенного ряда, экспоненциальную добавку $z = c_1\exp\int\varphi_1(x)dx$ и множество её существования

$$E_1 = \left\{x\colon \mathrm{Re}\int\varphi_1(x)dx < 0\right\}.$$

При этом $z = y - \varphi(x)$, $y_1 = \dfrac{d\ln z}{dx}$.

Шаг $i-1$. Получаем уравнение $f_{i-1}(x, y_{i-1}) = 0$ порядка $n - i + 1$ и его решение $y_{i-1} = \varphi_{i-1}(x)$ в виде степенного ряда.

Шаг i. Из $f_{i-1}(x, y_{i-1})$ и $\varphi_{i-1}(x)$ по следствию 1 и теореме 2 получаем уравнение $f_i(x, y_i) = 0$ порядка $n-i$, его решение $y_i = \varphi_i(x)$ в виде степенного ряда, экспоненциальную добавку $z_{i-1} = c_i\exp\int\varphi_i(x)dx$, множество её существования

$$E_i = \left\{x\colon \mathrm{Re}\int\varphi_i(x)dx < 0\right\}.$$

При этом $z_{i-1} = y_{i-1} - \varphi_{i-1}$, $y_i = \dfrac{d\ln z_{i-1}}{dx}$ и $D_i = E_1 \cap \ldots \cap E_i$.

Шаг n. Получаем уравнение $f_n(x, y_n) = 0$ порядка нуль, т.е. без производных, и его решение $y_n = \varphi_n(x)$ в виде степенного ряда, экспоненциальную добавку $z_{n-1} = c_n\exp\int\varphi_n(x)dx$ и множество её существования E_n.

Пусть μ — это такое значение $i < n$, что $D_\mu \neq \phi$, но $D_{\mu+1} = \phi$, и $\mu = n$, если $D_n \neq \phi$. Тогда для уравнения $f_\mu(x, y_\mu) = 0$ находим его решение $y_\mu = \varphi_\mu(x)$ в виде степенного ряда. Затем по теореме 3 для уравнения $f_{\mu-1}(x, y_{\mu-1}) = 0$ находим его решение в виде экспоненциального разложения

$$y_{\mu-1}(x) = \varphi_{\mu-1}(x) + c_\mu\exp\left(\int\varphi_\mu dx\right) + \sum_{k=2}^{\infty} B_{\mu k}(x)\left[c_\mu\exp\left(\int\varphi_\mu dx\right)\right]^k,$$

где $B_{\mu k}(x)$ — степенные ряды и c_μ — произвольная постоянная. Затем находим решения уравнения $f_{\mu-2}(x, y_{\mu-2}) = 0$ в виде

$$y_{\mu-2}(x) = \varphi_{\mu-2}(x) + c_{\mu-1}\exp\left(\int y_{\mu-1}(x)dx\right) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} B_{\mu-1,k}(x)\left[c_{\mu-1}\exp\left(\int y_{\mu-1}dx\right)\right]^k,$$

где $B_{\mu-1,k}(x)$ — степенные ряды и $c_{\mu-1}$ — произвольная постоянная и т.д. Наконец для исходного уравнения $f(x, y) = 0$ получаем его решения

$$y = \varphi(x) + c_1 \exp\int y_1(x)dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_{1k}(x)\left[c_1 \exp\int y_1 dx\right]^k,$$

где $B_{1k}(x)$ — степенные ряды и c_1 — произвольная постоянная. Это и есть трансряд [7]. Он описывает i-параметрические семейства решений исходного уравнения (2) в областях D_i. Ниже в теореме 4 этот трансряд описан в обратном порядке.

Теорема 4. *При $x \to x_0$, где $x_0 = 0$ или $x_0 = \infty$, решение $y(x)$ полиномиального ОДУ $f(x, y) = 0$ порядка n разлагается в трансряд*

$$y(x) = \varphi(x) + c_1 \exp\int y_1(x)dx + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} B_{1,k}(x)\left[c_1 \exp\int y_1(x)dx\right]^k,$$

где

$$y_1(x) = \varphi_1(x) + c_2 \exp\int y_2(x)dx + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} B_{2,k}(x)\left[c_2 \exp\int y_2(x)dx\right]^k,$$

$$\ldots$$

где

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + c_{i+1} \exp\int y_{i+1}(x)dx + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} B_{i,k}(x)\left[c_{i+1} \exp\int y_{i+1}(x)dx\right]^k,$$

$$\ldots$$

где

$$y_{\mu-1}(x) = \varphi_{\mu-1}(x) + c_{\mu} \exp\int y_{\mu}(x)dx + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} B_{\mu,k}(x)\left[c_{\mu} \exp\int y_{\mu}(x)dx\right]^k,$$

где $y_\mu(x) = \varphi_\mu(x)$. Здесь $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_\mu(x)$ и все $B_{ik}(x)$ суть определённые степенные ряды от x;

$$\varphi_i(x) = \beta_i x^{\alpha_i} + \ldots, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, \ldots, \mu.$$

Тогда $E_i = \left\{x\colon \operatorname{Re}\left(\dfrac{\beta_i x^{\alpha_i+1}}{\alpha_i+1}\right) < 0\right\}$ *для x вблизи x_0,* $D_i = E_1 \cap \ldots \cap E_i$.

Произвольные постоянные c_i отличны от нуля только в множествах D_i. Число $\mu < n$ определяется тем, что множество D_μ не пусто, а множество $D_{\mu+1}$ — пусто, и $\mu = n$, если множество D_n не пусто.

Замечание 2. Реально мы не можем вычислять бесконечные степенные ряды $\varphi_i(x)$. Достаточно вычислить такие их отрезки, которые обеспечивают присутствие в уравнениях $f_i(x, y_i) = 0$ ближайших по q_1 дифференциальных мономов наибольшего порядка $n - i$.

В [8, 9] для уравнения (2) порядка $n = 4$ вычислена последовательность отрезков рядов $\varphi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ и показано, что $D_2 \neq \phi$ и $D_3 = \phi$, т.е. $\mu = 2$.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН № 01 "Фундаментальная математика и её приложения" (грант PRAS-18-01) и РФФИ (грант 18–01–00422а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рамис Ж.П.* Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002. 80 с.
2. *Maillet A.* // Ann. Sci. Ecole Norm. Supér. 1903. V. 3. P. 487–518.
3. *Брюно А.Д.* // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.
4. *Брюно А.Д.* // ДАН. 2012. Т. 443. № 5. С. 539–544.
5. *Брюно А.Д.* Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2017. № 55. 27 с. DOI: 10.20948/prepr-2017-55. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-55.
6. *Bruno A.D.* Complicated and Exotic Expansions of Solutions to the Painlevé Equations. Keldysh Institute Prepr. M., 2018. № 118. 44 p. DOI: 10.20948/prepr-2018-118-e. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-118&lg=e.
7. *Edgar G.A.* Transseries for Beginners // arXiv (2009) 0801.4877v5. (http://arxiv.org/abs/0801.4877v5).
8. *Брюно А.Д., Кудряшов Н.А.* Степенные разложения решений аналога первого уравнения Пенлеве. Препр. № 17 ИПМ им. М.В. Келдыша. М.: ИПМ, 2005. 25 с.
9. *Bruno A.D., Kudryashov N.A.* // Ukrainian Math. Bull. 2009. V. 6. № 3. P. 311–337.

EXPANSION OF SOLUTIONS TO AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION INTO TRANSSERIES

A. D. Bruno

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin August 16, 2018

Received August 16, 2018

We consider a polynomial ODE of the order n in a neighbourhood of zero or of infinity of the independent variable. A method of calculation of its solutions in the form of power series and an exponential addition, which contains one more power series, was described. The exponential addition has an arbitrary constant, exists in some set E_1 of sectors of the complex plane and can be found from a solution to an ODE of the order $n - 1$. An hierarchic sequence of such exponential additions is possible, that each of these exponential additions is defined from an ODE of a lower order $n - i$ and exists in its own set E_i. Here we must check the non-emptiness of intersection of the sets $E_1 \cap \ldots \cap E_i$. Each exponential addition continues into its own exponential expansion, containing countable set of power series. As a result we obtain an expansion of a solution into a transseries, containing countable set of power series, all of which are summable. The transseries describes families of solutions to the initial ODE in some set of sectors of the complex plane.

Keywords: power series, exponential addition, exponential expansion, transseries.