ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 484*, *№ 3*, *с. 265–268*

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ В ЛОКАЛЬНОМ ПОЛУКРУГЛОМ ЗАКОНЕ ПРИ ЧЕТЫРЁХ МОМЕНТАХ

Ф. Гётце (F. Götze)[1], А. А. Наумов[2,3,*], А. Н. Тихомиров[2,4]

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 09.07.2018 г.

Поступило 13.08.2018 г.

Рассматриваются симметричные случайные матрицы $\mathbf{X}_n = [X_{jk}]_{j,k=1}^n$, $n \geq 1$, элементы которых в верхней треугольной части являются независимыми случайными величинами, имеющими нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Показано, что в предположении $\mathbb{E}|X_{jk}|^4 < C$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, флуктуации преобразования Стилтьеса $m_n(z)$, $z = u + iv$, $v > 0$, эмпирической спектральной функции распределения матрицы $\mathbf{X}_n/\sqrt{n}$ вокруг преобразования Стилтьеса $m_{\mathrm{sc}}(z)$ полукругового закона Вигнера имеют порядок $(nv)^{-1}\ln n$. Также обсуждается приложение полученного результата к скорости сходимости по вероятности эмпирической спектральной функции распределения матрицы $\mathbf{X}_n/\sqrt{n}$ к полукруговому закону Вигнера в равномерной метрике.

Ключевые слова: локальный полукруговой закон Вагнера, преобразование Стилтьеса, расстояние Колмогорова.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524843265-268

Рассмотрим симметричную случайную матрицу $\mathbf{X}_n := [X_{jk}]_{j,k=1}^n$, $n \geq 1$, и предположим, что X_{jk}, $1 \leq j \leq k \leq n$, являются независимыми случайными величинами. При этом будем допускать, что распределение элементов матрицы может зависеть от n, т.е. $X_{jk} := X_{jk}^{(n)}$. Обозначим собственные значения (с.з.) нормированной матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}_n$ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и определим считающую меру с.з. $\mu_n := n^{-1}\sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k}$. Если $\mathbb{E}X_{jk} = 0$, $\mathbb{E}X_{jk}^2 = 1$, $1 \leq j \leq k \leq n$, и для любого $\tau > 0$ выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2}\sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}X_{jk}^2 \mathbb{1}[|X_{jk}| \geq \tau\sqrt{n}] = 0,$$

то по вероятности меры μ_n слабо сходятся к неслучайной вероятностной мере μ_{sc}, у которой существует плотность $g_{\mathrm{sc}}(\lambda) := (2\pi)^{-1}\sqrt{(4-\lambda^2)_+}$, где $(x)_+ := \max(x, 0)$ (см. [1, теорема 1] и [2, теорема 2.6]). Данный результат, а также предельное распределение называются полукруговым законом, или полукруговым законом Вигнера. Впервые полукруговой закон был получен в [3] при дополнительном предположении, что элементы матрицы имеют симметричное распределение Бернулли. Отметим, что сходимость по вероятности может быть заменена на сходимость с вероятностью 1 (см., например, [2, теорема 2.6]).

В настоящей работе нас будет интересовать локальный полукруговой закон при минимальных моментных ограничениях, который может быть сформулирован в терминах преобразования Стилтьеса. Для этого определим преобразование Стилтьеса меры μ_n

$$m_n(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_n(d\lambda)}{\lambda - z}, \quad z = u + iv,\ v > 0.$$

Из сходимости μ_n к μ_{sc} следует, что для любого фиксированного $v > 0$ с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} m_n(z) = m_{\mathrm{sc}}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\mathrm{sc}}(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} = -\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - 1}. \quad (1)$$

Однако чтобы получить оценки скорости сходимости к полукруговому закону, оценки локализации с.з. вокруг квантилей полукругового закона, а также доказать универсальность локальных спектральных статистик, необходимо установить сходимость (1) в локальном режиме, т.е. области

[1] *Билефельдский университет*, *Германия*

[2] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*, *Москва*

[3] *Институт проблем передачи информации Российской Академии наук*, *Москва*

[4] *Коми научный центр Уральского отделения Российской Академии наук*, *Сыктывкар*

**E-mail*: *anaumov@hse.ru*

$1 \ge v \ge \dfrac{f(n)}{n}$, где $f(n) > 1$ — некоторая функция от n. Детали см., например, в монографии [4, § 11]. Значительный прогресс в этом направлении был достигнут в цикле работ Эрдёша (L. Erdös), Шлейна (B. Schlein), Яау (H.-T. Yau) и др. [5–7], которые установили, что с большой вероятностью равномерно по $u \in \mathbb{R}$

$$|m_n(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \le (nv)^{-1} \ln^{\alpha(n)} n, \qquad (2)$$

где $\alpha(n)$ — некоторая функция от n такая, что $0 < \alpha(n) \le c \ln\ln n$, $c > 0$. Этот результат был назван ими локальным полукруговым законом. Из (2) следует, что флуктуации $m_n(z)$ вокруг $m_{\mathrm{sc}}(z)$ имеют порядок $(nv)^{-1}$ с точностью до логарифмического множителя. Для доказательства (2) в [5, 6] предполагалось, что распределения X_{jk}, $1 \le j \le k \le n$, имеют субэкспоненциальные хвосты. В [7] это условие было ослаблено до требования существования моментов всех порядков. Обозначим $\beta_l := \max_{jk} \mathbb{E}|X_{jk}|^l$, $l \ge 1$. В [8–13] условие существования моментов всех порядков было ослаблено до требования $\beta_{4+\delta} < C$ для некоторых $C > 0$, $\delta > 0$. В частности, в [13, теорема 1.1] установлено, что (2) справедливо при $\alpha(n) \equiv 1$. Настоящая работа мотивирована недавней работой [14], в которой доказана универсальность локальных спектральных статистик внутри носителя полукругового закона в предположении $\beta_{2+\varepsilon} < C, \varepsilon > 0$. Однако в этой работе вместо оценки $(nv)^{-1}$ в (2) устанавливается оценка $(nv)^{-1/2} + n^{-c\varepsilon}$, где $c > 0$ — некоторая константа, зависящая от ε и $\beta_{2+\varepsilon}$. Данная оценка достаточна для доказательства универсальности локальных спектральных статистик внутри носителя полукругового закона, но не достаточна для доказательства оптимальных оценок скорости сходимости к полукруговому закону или локализиации с.з. Основная цель настоящей работы — доказать, что порядок $(nv)^{-1}$ в (2) остаётся верным в предположении $\beta_4 < C$. Принимая во внимание [3, теорема 5.1], мы допускаем, что данное моментное ограничение является оптимальным.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся условия (C0) и (C1).

Условия (C0). Будем говорить, что выполнены условия (C0), если $\mathbb{E}X_{jk} = 0$, $\mathbb{E}X_{jk}^2 = 1$, $1 \le j \le k \le n$, и $\beta_4 < C$ для любого $n \ge 1$ и некоторой константы $C > 0$.

Условия (C1). Будем говорить, что выполнены условия (C1), если имеют место условия (C0) и $|X_{jk}| \le \sqrt{n} R^{-1}$, $1 \le j,\ k \le n$, где $R \ge \ln^3 n$.

Следующая теорема представляет главный результат настоящей работы.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* (C1). *Тогда*:

(i) *для любого $V > 0$ существуют положительные константы A_0, A_1 и C_0, зависящие от V, β_4 и R, такие, что*

$$\mathbb{E}|m_n(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|^p \le \left(\frac{C_0 p}{nv}\right)^p, \qquad (3)$$

для всех $1 \le p \le A_1 \ln n$, $V \ge v \ge A_0 n^{-1} \ln^2 n$ *и* $|u| \le 2 + v$;

(ii) *для любых $V > 0$ и $u_0 > 0$ существуют положительные константы A_0, A_1 и C_0, зависящие от u_0, V, β_4 и R, такие, что*

$$\mathbb{E}|\operatorname{Im}(m_n(z) - m_{\mathrm{sc}}(z))|^p \le \left(\frac{C_0 p}{nv}\right)^p, \qquad (4)$$

для всех $1 \le p \le A_1 \ln n$, $V \ge v \ge A_0 n^{-1} \ln^2 n$ и $|u| \le u_0$.

Отметим, что в отличие от (2) результат (3) справедлив в области $|u| \le 2 + v$. Оценка (3) достаточна для доказательства оценок скорости сходимости к полукруговому закону и локализации с.з. вокруг квантилей полукругового закона внутри носителя полукругового закона. Однако для оценки локализации наибольшего (наименьшего) с.з. вокруг 2 (соответственно –2) необходимы также оценки в области $|u| > 2 + v$. К счастью, в данном случае достаточно использовать оценку (4), которая контролирует поведение мнимой части. Детали см. в [12, 13, 15].

Из неравенства Чебышева и (3) следует, что для любых $V \ge v \ge A_0 n^{-1} \ln^2 n$ и $|u| \le 2 + v$

$$\mathbb{P}(|m_n(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \le C_1 (nv)^{-1} \ln n) \ge 1 - n^{-2},$$

где $C_1 := C_0 A_1 e^{2/A_1}$.

Результаты теоремы 1 также можно переформулировать в предположении, что выполнены условия (C0). Для этого необходимо сначала усечь элементы матрицы $\mathbf{X}_n$ на уровне $\sqrt{n} R^{-1}$ и выбрать подходящее значение $R \ge \ln^3 n$. Детали см. в [11, леммы 4.1–4.3]. Для краткости сформулируем только аналог утверждения (i) теоремы 1.

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия* (C0). *Для любого $V > 0$ существуют положительные константы A_0, A_1 и C_0, зависящие от V и β_4, такие, что*

$$\mathbb{E}|m_n(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|^p \le \frac{C_0^p \ln^{12p} n}{(nv)^p},$$

для всех $1 \le p \le A_1 \ln n$, $V \ge v \ge A_0 n^{-1} \ln^2 n$ *и* $|u| \le 2 + v$.

Как уже было отмечено выше, теорема 1 и её следствие играют ключевую роль при доказательстве оценок скорости сходимости к полукруговому закону, оценок локализации с.з. вокруг квантилей полукругового закона, а также делокализации собственных векторов. С точностью до логарифмических множителей эти результаты повторяют соответствующие результаты из [13, теоремы 1.4—1.7]. Для их доказательства достаточно заменить оценки $\mathbb{E}|m_n(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|^p$ в [13] на оценки, полученные в теореме 1 и следствии 1. Для удобства читателя мы сформулируем результат, который даёт оценку скорости сходимости к полукруговому закону.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (C0). *Существует положительная константа C, зависящая от* β_4, *такая, что*

$$\mathbb{P}(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\mu_n((-\infty, x]) - \mu_{\mathrm{sc}}((-\infty, x])| \le \\ \le Cn^{-1}\ln^{12} n) \ge 1 - n^{-2}.$$

Идея доказательства теоремы 1. Доказательство основного результата представляет собой комбинацию [13] и одной плодотворной идеи из [14]. Остановимся на части (i) теоремы 1.

Для простоты мы будем часто опускать индекс n и предположим, что $X_{jk}, 1 \le j \le k \le n$, имеют одинаковое распределение. Определим множество $\mathbb{D} := \{z = u + iv: |u| \le 2 + v,\ V \ge v \ge A_0 n^{-1}\ln^2 n\}$, где $A_0 > 1$ — некоторая достаточно большая константа, точное значение которой будет выбрано позже в лемме 3. Для простоты мы будем часто опускать аргумент z. Легко проверить, что m_{sc} удовлетворяет уравнению $1 + zm_{\mathrm{sc}} + m_{\mathrm{sc}}^2 = 0$, а для m_n справедливо равенство $1 + zm_n + m_n^2 = T_n$, где

$$T_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2} + \varepsilon_{j3} + \varepsilon_{j4})\mathbf{R}_{jj},$$

$$\mathbf{R}(z) := (n^{-1/2}\mathbf{X} - z\mathbf{I}_n)^{-1} \text{ и}$$

$$\varepsilon_{j1} := n^{-1/2}X_{jj},\quad \varepsilon_{j2} := -n^{-1}\sum_{l\ne k\in\mathbb{T}_j} X_{jk}X_{jl}\mathbf{R}_{kl}^{(j)},$$

$$\varepsilon_{j3} := -n^{-1}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}(X_{jk}^2 - 1)\mathbf{R}_{kk}^{(j)},$$

$$\varepsilon_{j4} := n^{-1}(\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(j)}).$$

В предыдущем представлении мы использовали обозначения $\mathbb{T}_j := \{1, 2, \ldots, n\}\setminus\{j\}$ и $\mathbf{R}^{(j)}(z) := (n^{-1/2}\mathbf{X}^{(j)} - z\mathbf{I}_{n-1})^{-1}$, где $\mathbf{X}^{(j)} := [X_{lk}]_{l,k\in\mathbb{T}_j}$. Определим следующие величины $\Lambda_n(z) := m_n(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)$, $b(z) := z + 2m_{\mathrm{sc}}(z)$, $b_n(z) = b(z) + \Lambda_n(z)$. Можно показать, что $\Lambda_n = T_n/b_n$. В [15, утверждение 2.2] показано, что для всех $v > 0$ и $|u| \le 2 + v$

$$|\Lambda_n| \le C\min\{|T_n||b(z)|^{-1},\ \sqrt{|T_n|}\}.$$

Таким образом, задача оценивания $\mathbb{E}|\Lambda_n|^p$ сводится к оцениванию $\mathbb{E}|T_n|^p$. В работах [11, теорема 1.3; 12, теорема 2.1; 13, теорема 2.1] предложен подход, который позволяет оценить $\mathbb{E}|T_n|^p$ в предположении, что для всех $z \in \mathbb{D}$ и $1 \le p \le A_1\ln^2 n$

$$\mathbb{E}|\mathbf{R}_{11}(z)|^p \le H_1^p, \tag{5}$$

где H_1 — некоторая положительная константа, зависящая от V, β_4, R, а константа A_1, $0 < A_1 < 1$, будет выбрана позже в лемме 3. При этом несложно проверить, что данный метод переносится на случай, когда выполнены (C1). Остаётся проверить условие (5). Определим следующие события:

$$A_{jk} := \{|X_{jk}| < n^{1/4}\ln n\},$$
$$B_{jk} := A_{jk}^c = \{n^{1/4}\ln n \le |X_{jk}| \le n^{1/2}R^{-1}\},$$

Обозначим $p_n := \mathbb{P}(B_{11})$. Из неравенства Чебышева следует, что $p_n \le \beta_4 n^{-1}\ln^{-4} n$. Следуя [14], определим матрицу конфигураций $\mathbf{L} := \mathbf{L}(\mathbf{X}) := [L_{jk}]_{j,k=1}^n$, где $L_{jk} := \mathbb{1}[A_{jk}]$. Пусть ξ_{jk} и η_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, взаимно независимые с.в., такие что $\mathbb{P}(\xi_{jk} \in \cdot) = \mathbb{P}(X_{jk} \in \cdot \mid A_{jk})$ и $\mathbb{P}(\eta_{jk} \in \cdot) = \mathbb{P}(X_{jk} \in \cdot \mid B_{jk})$ соответственно. Обозначим $\mathbf{X}(\mathbf{L}) := [X_{jk}(L_{jk})]_{j,k=1}^n$, где

$$X_{jk}(L_{jk}) := \begin{cases}\xi_{jk}, & \text{если } L_{jk} = 1,\\ \eta_{jk}, & \text{если } L_{jk} = 0.\end{cases}$$

Пусть $r := r_n := \ln^3 n$. Будем говорить, что матрица $\mathbf{L}$ является r-допустимой, если $\mathbf{L}$ имеет вид (с точностью до перестановки строк и столбцов)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & 1\ldots & 1\ldots & 1\ldots\\ 1\ldots & \mathbf{A}_2 & \ldots & 1\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1\ldots & 1\ldots & \mathbf{A}_L & 1\ldots\\ 1\ldots & 1\ldots & \ldots & 1\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1\ldots & 1\ldots & \ldots & 1\ldots\end{bmatrix},$$

где $\mathbf{A}_\nu$ — случайные симметричные матрицы размера $r_\nu \le r$, $\nu = 1, 2, \ldots, L$, такие что $r_1 + \ldots + r_L \le \ln^3 n \times \max(1, n^2 p_n)$. Более того, нулевые элементы $\mathbf{L}$ могут быть только внутри блока $\mathbf{A}_\nu$, и каждая строка (столбец) содержит не более r нулевых элементов. В данном случае будем писать $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_r$, где $\mathcal{L}_r$ — множество всех r-допустимых матриц конфигураций. По аналогии с [14, лемма 9] можно показать, что

$$\mathbb{P}(\mathbf{L} \notin \mathcal{L}_r) \le n^{-c\ln^2 n}, \qquad (6)$$

где $c > 0$ — некоторая константа, причём всегда можно добиться того, что $c > 2A_1$.

Обозначим $\mathbf{H} := \mathbf{X}(\mathbf{L})$ и $\mathbf{G} := (n^{-1/2}\mathbf{H} - z\mathbf{I})^{-1}$. Повторяя рассуждения из [13, лемма 3.1], можно доказать, что имеет место следующая

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_r$ *и выполнены условия* (C1). *Существуют положительная константа* H_0, *зависящая от* V, μ_4, R, *и положительные константы* A_0, A_1, *зависящие от* H_0, *такие что для всех* $z \in \mathbb{D}$ *и* $1 \le p \le A_1 \ln^2 n$ *выполнено* $\mathbb{E}|\mathbf{G}_{11}|^p \le H_0^p$.

Покажем, что, используя предыдущую лемму, можно получить (5). Действительно, принимая во внимание (6), легко установить, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\mathbf{R}_{11}|^p &= \mathbb{E}[\mathbb{1}[\mathbf{L} \in \mathcal{L}_r]\mathbb{E}(|\mathbf{R}_{11}|^p \mid \mathbf{L})] + \\ &+ \mathbb{E}[\mathbb{1}[\mathbf{L} \notin \mathcal{L}_r]\mathbb{E}(|\mathbf{R}_{11}|^p \mid \mathbf{L})] \le \\ &\le H_0^p + \mathbb{P}^{1/2}(\mathbf{L} \notin \mathcal{L}_r)\mathbb{E}^{1/2}|\mathbf{R}_{11}|^{2p} \le \\ &\le H_0^p + v^{-p}\mathbb{P}^{1/2}(\mathbf{L} \notin \mathcal{L}_r) \le \\ &\le H_0^p + n^{(A_1 - c/2)\ln^2 n - A_1 \ln n (\ln A_0 + 2\ln\ln n)} \le H_1^p.\end{aligned}$$

Работа поддержана грантом РНФ 18–11–00132.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пастур Л.А.* О спектре случайных матриц // ТМФ. 1972. Т. 10. № 1. С. 102–112.
2. *Bai Z., Silverstein J.* Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices. B.: Springer, 2010.
3. *Wigner E.* On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices // Ann. Math. 1958. V. 67. P. 325–327.
4. *Erdös L., Yau H.-T.* A Dynamical Approach to Random Matrix Theory // Courant Lect. Notes. 2017. V. 28.
5. *Erdös L., Schlein B., Yau H.-T.* Semicircle Law on Short Scales and Delocalization of Eigenvectors for Wigner Random Matrices // Ann. Probab. 2009. V. 37. № 3. P. 815–852.
6. *Erdös L., Schlein B., Yau H.-T.* Local Semicircle Law and Vomplete Delocalization for Wigner Random Matrices // Communs. Math. Phys. 2009. V. 287. № 2. P. 641–655.
7. *Erdös L., Knowles A., Yau H.-T., Yin J.* The Local Semicircle Law for a General Class of Random Matrices // Electron. J. Probab. 2013. V. 18. № 59. P. 1–58.
8. *Erdös L., Knowles A., Yau H.-T., Yin J.* Spectral Statistics of Erdös-Rényi Graphs I: Local Semicircle Law // Ann. Probab. 2013. V. 41. № 3B. P. 2279–2375.
9. *Erdös L., Knowles A., Yau H.-T., Yin J.* Spectral Statistics of Erdös-Rényi Graphs II: Eigenvalue Spacing and the Extreme Eigenvalues // Communs. Math. Phys. 2012. V. 314. № 3. P. 587–640.
10. *Lee J., Yin J.* A Necessary and Sufficient Condition for Edge Universality of Wigner Matrices // Duke Math. J. 2014. V. 163. № 1. P. 117–173.
11. *Götze F., Tikhomirov A.* Optimal Bounds for Convergence of Expected Spectral Distributions to the Semicircular Law // Probability Theory and Related Fields. 2016. V. 165. № 1/2. P. 163–233.
12. *Götze F., Naumov A., Tikhomirov A.* Local Semicircle Law under Moment Conditions: The Stieltjes Transform, Rigidity, and Delocalization // Theory Probab. Appl. 2018. V. 62. № 1. P. 58–83.
13. *Götze F., Naumov A., Tikhomirov A., Timushev A.* On the Local Semicircle Law for Wigner Ensembles // Bernoulli. 2018. V. 24. № 3. P. 2358–2400.
14. *Aggarwal A.* Bulk Universality for Generalized Wigner Matrices with Few Moments // Probab. Theory and Related Fields. 2018. P. 1–58.
15. *Cacciapuoti C., Maltsev A., Schlein B.* Bounds for the Stieltjes Transform and the Density of States of Wigner Matrices // Probab. Theory and Related Fields. 2015. V. 163. № 1. P. 1–59.

ON OPTIMAL BOUNDS IN THE LOCAL SEMICIRCLE LAW UNDER FOUR MOMENT CONDITION

F. Götze, A. A. Naumov, A. N. Tikhomirov

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov July 9, 2018

Received August 13, 2018

We consider symmetric random matrices with independent mean zero and unit variance entries in the upper triangular part. Assuming that the distributions of matrix entries have finite moment of order four, we prove optimal bounds for the distance between the Stieltjes transforms of the empirical spectral distribution function and the semicircle law. Application concerning the convergence rate in probability of the empirical spectral distribution to the semicircle law is discussed as well.

Keywords: Wigner's local semicircle law, Stieltjes transform, Kolmogorov distance.