ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 484*, *№ 3*, *с. 269–272*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО МОДУЛЮ ВЕКТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЁННОСТИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Член-корреспондент РАН В. Г. Романов

Поступило 10.10.2018 г.

Для немагнитной непроводящей среды рассматривается система уравнений электродинамики, соответствующая периодическим по времени колебаниям. Для этой системы изучается задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости ε по заданному модулю вектора электрической напряжённости электромагнитного поля, являющегося результатом интерференции двух полей, вызванных точечными источниками стороннего тока. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость отлична от заданной положительной постоянной ε_0 только внутри некоторой компактной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, а модуль электрической напряжённости поля задан для всех частот, начиная с некоторой фиксированной частоты ω_0, на границе S некоторой области Ω, содержащей Ω_0 внутри себя. На основе изучения асимптотики решения некоторой прямой задачи при больших частотах показывается, что задаваемая информация позволяет свести исходную задачу к хорошо известной обратной кинематической задаче об определении коэффициента рефракции внутри Ω по временам пробега электромагнитной волны между точками границы этой области. Это открывает путь её конструктивного решения.

Ключевые слова: уравнения электродинамики, обратная бесфазовая задача, диэлектрическая проницаемость, обратная кинематическая задача.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524843269-272

Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = -i\omega\varepsilon(x)E + j^0\delta(x-y),$$
$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu_0 H, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

отвечающую периодическому по времени электромагнитному полю $\tilde{H} = He^{-i\omega t}$, $\tilde{E} = Ee^{-i\omega t}$. В этой системе $\mu_0 > 0$ — постоянный коэффициент магнитной проницаемости, $\varepsilon(x)$ — коэффициент диэлектрической проницаемости, $\omega > 0$ — частота колебаний. Векторы $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ характеризуют напряжённости электрического и магнитного полей соответственно, j^0 — вектор стороннего тока, определяющий направление диполя, сосредоточенного в точке $y \in \mathbb{R}^3$. Решение уравнения (1) рассматривается при подходящих условиях излучения на бесконечности. Предполагается, что коэффициент диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$ является бесконечно дифференцируемой положительной функцией всюду в $\mathbb{R}^3$, совпадающей с заданной положительной постоянной ε_0 вне $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| < R_0,\ R_0 > 0\}$, а носитель разности $\varepsilon(x) - \varepsilon_0$ содержится внутри Ω_0. Обозначим через $n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}$ индекс рефракции в неоднородной среде и через $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — значение его в однородной среде. В дальнейшем предполагается, что $n(x)$ удовлетворяет условиям

$$0 < n_0 \le n(x) \le n_1, \tag{2}$$

в которых n_0 и n_1 — заданные постоянные.

Рассматривается задача об определении функции ε в области Ω_0 по заданному на некотором множестве модулю вектора E. Точную постановку этой задачи см. ниже.

Обратные задачи, в которых решение дифференциального уравнения является комплекснозначной функцией, а для отыскания коэффициентов этого уравнения задаётся в качестве информации только модуль решения некоторой прямой задачи, начали рассматривать сравнительно недавно. Первые результаты по исследованию обратной задачи об определении потенциала в уравнении Шрёдингера были получены в работах М.В. Клибанова и В.Г. Романова [1, 2], Р.Г. Новикова [3, 4]. Далее подобные постановки обратных задач без использования фазовой информации были изучены для обобщённого уравнения Гельмгольца [5–9]. Более общей по сравнению с уравнением Гельмгольца является обратная задача для системы уравнений электродинамики, соответ-

Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской Академии наук,
Новосибирск
E-mail: *romanov@math.nsc.ru*

ствующей периодическим по времени электромагнитным колебаниям. Эта задача заключается в определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю векторов электрической или магнитной напряжённости, измеренному на высоких частотах. В работах [10, 11] установлено, что бесфазовая (phaseless) задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряжённости рассеянного электромагнитного поля приводится к решению обратной кинематической задачи.

Характерной особенностью рассмотренных в [1, 2, 5–11] бесфазовых обратных задач является то, что искомый коэффициент предполагается известной постоянной вне некоторой заданной компактной области Ω с гладкой границей S, и на S задаётся модуль рассеянного поля, инициированного либо точечными источниками, локализованными на S, либо плоскими волнами, падающими из бесконечности. Но измерять рассеянное поле часто довольно затруднительно, проще измерить модуль полного поля. Одна из таких постановок с заданием модуля полного поля для уравнений электродинамики, использующая гармонические плоские волны, падающие из бесконечности, рассмотрена в работе [12]. В настоящей работе изучается аналогичная постановка бесфазовой обратной задачи для системы уравнений Максвелла (1), в которой инициирующие электромагнитные колебания волны вызваны точечными периодическими по времени источниками.

Обозначим решение уравнений (1), удовлетворяющее условиям излучения, через $E(x, y, j^0, \omega)$, $H(x, y, j^0, \omega)$, подчёркивая его зависимость от параметров y, j^0, ω. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| < R,\ R > R_0\sqrt{2}\}$ и $S = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| = R\}$. Обозначим через $S(y) = \{x \in S |\ -y \cdot x \geq R^2 - 2R_0^2\}$ ту часть сферы S, которая является теневой, если источник света поместить в точку y, а область Ω_0 считать непрозрачной для света. При условии $R > R_0\sqrt{2}$ множество $S(y)$ принадлежит полусфере $S^+(y) = \{x \in S |\ -y \cdot x > 0\}$. Примем, что вектор j^0 имеет единичную длину и ортогонален вектору y, т.е. $|j^0| = 1$, $j^0 \cdot y = 0$.

Постановка задачи. Пусть функция

$$f(x, y, j^0, \omega) = |E(x, y, j^0, \omega) + E(x, z(y), j^0, \omega)|^2 \quad (3)$$

задана для всех $y \in S$, всех $x \in S(y)$, всех $\omega \geq \omega_0 > 0$ и $z(y) = -y\ell$, где $\ell > \ell^* = \max\left[\dfrac{R^2}{R^2 - 2R_0^2},\ 1 + \dfrac{2n_1}{n_0}\right]$. Требуется по функции $f(x, y, j^0, \omega)$ найти ε внутри Ω_0. В формулировке задачи ω_0 — некоторая фиксированная частота.

Таким образом, в постановке задачи предполагается, что задан квадрат модуля электрической напряжённости электромагнитного поля, возникающего как результат интерференции двух волн, инициированных диполями одинаковой ориентации, помещёнными в точках y и $z(y) = -y\ell$. При выполнении условия $\ell \geq \dfrac{R^2}{R^2 - 2R_0^2}$ множество $S(y)$ лежит на освещённой части сферы S источником света, помещённым в точку $z(y)$. Смысл второго из ограничений на ℓ будет объяснён позже.

Введём векторный потенциал A следующим образом:

$$\mu_0 H = \operatorname{rot} A, \quad E = i\omega\left[A + \frac{1}{\omega^2}\nabla(n^{-2}(x)\operatorname{div} A)\right]. \quad (4)$$

Здесь $n(x) = \sqrt{\mu_0\varepsilon(x)}$. Уравнения (1) выполняются, если A является решением уравнения

$$-\omega^2 n^2(x)A - \Delta A + (\operatorname{div} A)\nabla \ln(\varepsilon(x)) = \\ = \mu_0 j^0 \delta(x - y). \quad (5)$$

В качестве условий излучения на бесконечности примем условия Зоммерфельда

$$A = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial A}{\partial r} - in_0\omega A = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \to \infty. \quad (6)$$

Структура векторного потенциала $A(x, y, j^0, \omega)$ для неоднородной среды изучена в работе [11] при условии, что риманова метрика $d\tau = n(x)|dx|$, $|dx| = \left(\sum_{i=1}^{3} dx_i^2\right)^{1/2}$ порождает поле геодезических линий $\Gamma(x, y)$, соединяющих точки x и y, регулярное в R^3, т.е. каждая пара точек x и y может быть соединена ровно одной геодезической. Мы примем здесь это условие.

Обозначим через $\tau(x, y)$ риманову длину геодезической $\Gamma(x, y)$ и через $\nu = \dfrac{\nabla_x \tau(x, y)}{n(x)}$ единичный вектор, касательный к $\Gamma(x, y)$ в точке x. Согласно [11], высокочастотная асимптотика векторного потенциала $A(x, y, j^0, \omega)$ имеет вид

$$A(x, y, j^0, \omega) = \frac{\alpha(x, y, j^0)}{2\tau(x, y)} e^{i\omega\tau(x,y)}\left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right], \\ \omega \to \infty, \quad (7)$$

в котором бесконечно дифференцируемая функция $\alpha(x, y)$ определяется формулой

$$\alpha(x, y, j^0) = \frac{\mu_0 n_0}{2\pi}\Phi^{-1}(x, y) j^0. \qquad (8)$$

Здесь $\Phi^{-1}(x, y)$ — матрица, обратная к матрице $\Phi(x, y)$, определяемой равенством

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{J(x, y)}}\exp\left(\int\limits_{\Gamma(x,y)} Q(\xi)d\xi\right). \qquad (9)$$

В формуле (9) $J(x, y)$ — якобиан преобразования римановых координат $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ точки x в декартовы, ξ — переменная точка геодезической $\Gamma(x, y)$ и $Q(\xi)d\xi$ — линейная матричная форма,

$$Q(x)dx = I(\nabla \ln\sqrt{\varepsilon(x)} \cdot dx) - (\nabla \ln\sqrt{\varepsilon(x)})^* dx,$$
$$dx = (dx_1, dx_2, dx_3),$$

в которой $I = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$ и $(\nabla \ln\sqrt{\varepsilon(x)})^*$ — вектор-столбец. Римановы координаты ζ могут быть вычислены через функцию $\tau^2(x, y)$ по формуле

$$\zeta = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}}\nabla_y \tau^2(x, y).$$

В однородной среде (при $n(x) = n_0$) решение задачи (5), (6) имеет вид

$$A^0(x, y, j^0, \omega) = \frac{\alpha^0(j^0)}{2\tau_0(x, y)} e^{i\omega\tau_0(x,y)}, \qquad (10)$$

в котором $\alpha^0(j^0) = \frac{\mu_0 j^0 n_0}{2\pi}$, $\tau_0(x, y) = n_0|x - y|$.

Использование формул (4), (7), (10) позволяет получить высокочастотную асимптотику функций $E(x, y, j^0, \omega)$ и $E^0(x, y, j^0, \omega)$ в виде

$$E(x, y, j^0, \omega) = \frac{i\omega}{2\tau(x, y)} e^{i\omega\tau(x,y)} \times$$
$$\times \left[\alpha_\perp(x, y, j^0) + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right], \quad \omega \to \infty, \qquad (11)$$

$$E^0(x, y, j^0, \omega) = \frac{i\omega}{2\tau_0(x, y)} e^{i\omega\tau_0(x,y)} \times$$
$$\times \left[\alpha_\perp^0(x, y, j^0) + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right], \quad \omega \to \infty, \qquad (12)$$

в котором $\alpha_\perp(x, y, j^0) = \alpha(x, y, j^0) - (\alpha(x, y, j^0) \times \times \nu(x, y))\nu(x, y)$ — проекция вектора $\alpha(x, y)$ на плоскость, ортогональную вектору $\nu = \frac{\nabla_x \tau(x, y)}{n(x)}$, а $\alpha_\perp^0(x, y, j^0) = \alpha^0(j^0) - (\alpha^0(j^0) \cdot \nu^0(x, y))\nu^0(x, y)$ — проекция вектора $\alpha^0(j^0)$ на плоскость, ортогональную вектору $\nu^0 = \frac{\nabla_x \tau_0(x, y)}{n_0}$. Заметим, что ν и ν^0 — единичные векторы, касательные к геодезическим $\Gamma(x, y)$ и $\Gamma_0(x, y)$, соответствующим неоднородной и однородной среде.

Заметим, что $E(x, z(y), j^0, \omega) = E^0(x, z(y), j^0, \omega)$ для $x \in S(y)$, если $z(y) = -y\ell$ и $\ell \geq \ell^*$. Поэтому

$$\frac{1}{\omega^2} f(x, y, j^0, \omega) = \frac{1}{\omega^2}|E(x, y, j^0, \omega) +$$
$$+ E^0(x, z(y), j^0, \omega)|^2 = \frac{|\alpha_\perp(x, y, j^0)|^2}{4\tau^2(x, y)} +$$
$$+ \frac{|\alpha_\perp^0(x, z(y), j^0)|^2}{4\tau_0^2(x, z(y))} + \frac{\alpha_\perp(x, y, j^0) \cdot \alpha_\perp^0(x, z(y), j^0)}{2\tau(x, y)\tau_0(x, z(y))} \times$$
$$\times \cos[\omega(\tau_0(x, z(y)) - \tau(x, y))] + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \omega \to \infty. \qquad (13)$$

Поскольку из условий (2) следует, что

$$\min_{x \in S(y)} \tau_0(x, z(y)) = n_0 R(\ell - 1), \quad \max_{x \in S(y)} \tau(x, y) \leq 2Rn_1,$$

то

$$\eta(x, y) = \tau_0(x, z(y)) - \tau(x, y) \geq n_0 R(\ell - 1) - 2Rn_1 > 0,$$

если $\ell > 1 + \frac{2n_1}{n_0}$. Таким образом, при выполнении условия $\ell > \ell^*$ в формуле (13) $\eta(x, y) > 0$. Зафиксируем в формуле (13) $y \in S$ и $x \in S(y)$. Тогда функция $\frac{f(x, y, j^0, \omega)}{\omega^2}$ является функцией только одной переменной ω, почти периодической функцией этой переменной. Поскольку $j^0 \cdot y = 0$, то и $j^0 \cdot z(y) = 0$, отсюда следует, что $|\alpha_\perp^0(x, y, j^0)| \neq 0$ для $x \in S(y)$. Из формул (8), (9) следует, что аналогичным свойством обладает и вектор $\alpha_\perp(x, y, j^0)$, если градиент функции $\varepsilon(x)$ мал. При этом выполняется и условие $\alpha_\perp^0(x, y, j^0) \cdot \alpha_\perp(x, y, j^0)| \neq 0$. Заметим, что выполнение этого условия легко проверяется по данным задачи: если оно не выполнено, то в правой части равенства (13) отсутствует член с косинусом и $\frac{f(x, y, j^0, \omega)}{\omega^2}$ стремится к некоторой постоянной при $\omega \to \infty$. В последнем случае достаточно сместить точку $z(y)$, чтобы добиться выполнения нужного условия.

Поскольку частота ω не ограничена сверху, то из равенства (13) можно однозначно найти число $\eta(x, y)$. Поэтому однозначно находится и $\tau(x, y) = \tau_0(x, y) - \eta(x, y)$ для всех $y \in S$ и $x \in S(y)$. Заметим, что $\tau(x, y) = n_0|x - y|$ для $x \in S \setminus S(y)$. Поэтому функция $\tau(x, y)$ оказывается известной для всех $y \in S$ и $x \in S$. В итоге мы приходим к следующей хорошо известной геометрической задаче: найти $n(x)$ внутри Ω по заданным римановым расстояниям

$\tau(x, y)$ между любыми точками $y \in S$ и $x \in S$. Физическая трактовка этой задачи такова: требуется найти коэффициент рефракции $n(x)$ в области Ω по заданным временам пробега электромагнитной волны между любой парой точек x и y границы этой области. Эта задача носит название обратной кинематической задачи.

В предположении о регулярности поля геодезических $\Gamma(x, y)$, сделанном выше, теорема единственности и оценка условной устойчивости решения обратной кинематической задачи получены в работах [13–15]. Отсюда вытекает единственность решения поставленной выше задачи об определении коэффициента $\varepsilon(x)$ внутри Ω_0 по заданной функции $f(x, y, j^0, \omega)$. Полученная выше редукция исходной задачи к обратной кинематической задаче открывает путь её конструктивного решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17–01–00120).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klibanov M.V.*, *Romanov V.G.* // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. V. 23. № 4. P. 415–428.
2. *Klibanov M.V.*, *Romanov V.G.* // Eurasian J. Math. and Comput. Appl. 2015. V. 3. № 1. P. 48–63.
3. *Novikov R.G.* // J. Geom. Anal. 2015. DOI: 10.1007/5.12220-014-9553-7.
4. *Novikov R.G.* // Bull. Sci. Math. 2015. DOI: 10.1016/j.bulsci.2015.04.005.
5. *Klibanov M.V.*, *Romanov V.G.* // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. V. 23. № 2. P. 187–193.
6. *Romanov V.G.* // Eurasian J. Math. and Computer Appl. 2015. V. 3. № 4. P. 68–84.
7. *Klibanov M.V.*, *Romanov V.G.* // SIAM J. Appl. Math. 2016. V. 76. № 1. P. 178–196.
8. *Klibanov M.V.*, *Romanov V.G.* // Inverse Problems. 2016. V. 32. № 2. 015005 (16 pp). DOI: 10.1088/0266-5611/32/1/015005.
9. *Klibanov M.V.*, *Romanov V.G.* // Inverse Problems. 2017. V. 33. № 9. 095007 (10 pp).
10. *Романов В.Г.* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 916–924.
11. *Романов В.Г.* // ДАН. 2017. Т. 474. № 4. С. 413–417.
12. *Романов В.Г.* // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 626–638.
13. *Мухометов Р.Г.* // ДАН. 1977. Т. 232. № 1. С. 32–35.
14. *Мухометов Р.Г.*, *Романов В.Г.* // ДАН. 1978. Т. 243. № 1. С. 41–44.
15. *Бернштейн И.Н.*, *Гервер М.Л.* // ДАН. 1978. Т. 243. № 2. С. 302–305.

ON DETERMINATION OF THE PERMITTIVITY THROUGH THE MODULE OF THE VECTOR OF THE ELECTRIC STRENGTH OF THE HIGH-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC FIELD

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov

Received October 10, 2018

For nonmagnetic and nonconductive medium the system of electrodynamic equations that corresponds to periodic in time oscillations is considered. An inverse problem of determining permittivity in this system by the given module of the electric strength is studied. It is supposed that the electric fields is a result of the interference of two fields created by point sources. The permittivity $\varepsilon(x)$ is assumed to be differ from a given positive constant ε_0 inside of a compact domain $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ only. An information on module of the electric strength is given on the boundary of the domain Ω contained Ω_0 inside itself and for all frequencies beginning with some fixed frequency ω_0. The asymptotic behavior of solution of a direct problem related to the electrodynamic equations is studied and the original inverse problem is reduced to the well known inverse kinematic problem. This reduction open a way for constructive solution of the inverse phaseless problem.

Keywords: electrodynamic equations, phaseless inverse problem, permittivity, inverse kinematic problem.