ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 484*, *№ 3*, *с. 273–276*

МАТЕМАТИКА

УДК 517+519.2

К ТЕОРЕМЕ С.Р. РАО ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Г. М. Фельдман

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 09.07.2018 г.

Поступило 06.08.2018 г.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины со значениями в локально компактной абелевой группе X с не обращающимися в ноль характеристическими функциями, a_j, b_j — непрерывные эндоморфизмы X, удовлетворяющие определённым ограничениям. Пусть $L_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$. Доказано, что распределение случайного вектора (L_1, L_2) определяет распределения случайных величин ξ_j с точностью до сдвига. Этот результат является групповым аналогом известной теоремы С.Р. Рао. Мы доказываем также аналог ещё одной теоремы С.Р. Рао для независимых случайных величин, принимающих значения в $\boldsymbol{a}$-адическом соленоиде.

Ключевые слова: теорема С.Р. Рао, локально компактная абелева группа.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524843273-276

В работе [1] С.Р. Рао доказал следующую теорему.

Теорема A. *Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины с не обращающимися в ноль характеристическими функциями*, a_j, b_j — *вещественные числа, такие, что* $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$ *при* $i \neq j$. *Пусть* $L_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$. *Тогда распределение случайного вектора* (L_1, L_2) *определяет распределения случайных величин* ξ_j *с точностью до сдвига*.

Теорема С.Р. Рао является обобщением следующего результата И. Котлярски [2].

Теорема B. *Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Пусть* $L_1 = \xi_1 - \xi_3$, $L_2 = \xi_2 - \xi_3$. *Тогда распределение случайного вектора* (L_1, L_2) *определяет распределения случайных величин* ξ_j *с точностью до сдвига*.

Целью настоящего сообщения является доказательство аналога теоремы С.Р. Рао для линейных форм от независимых случайных величин, принимающих значения в локально компактной абелевой группе. Затем мы докажем аналог ещё одной теоремы С.Р. Рао для независимых случайных величин, принимающих значения в $\boldsymbol{a}$-адическом соленоиде. Коэффициентами линейных форм являются при этом непрерывные эндоморфизмы группы.

Физико-технический институт им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины, *Харьков*
E-mail: *feldman@ilt.kharkov.ua*

Пусть X — локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счётности. Мы будем рассматривать только такие группы, специально не оговаривая этого. Обозначим через Y группу характеров группы X, а через (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Пусть $f(y)$ — функция на группе Y, h — произвольный элемент Y. Обозначим через Δ_h оператор конечной разности

$$\Delta_h f(y) = f(y+h) - f(y).$$

Многочленом на группе Y называется такая функция $f(y)$, которая при некотором n удовлетворяет уравнению

$$\Delta_h^{n+1} f(y) = 0, \quad y, h \in Y.$$

Минимальное n, при котором выполнено это равенство, называется степенью многочлена $f(y)$.

Через $M^1(X)$ обозначим свёрточную полугруппу вероятностных распределений на группе X. Пусть $\mu \in M^1(X)$. Обозначим через

$$\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x), \; y \in Y,$$

характеристическую функцию распределения μ. Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$.

Распределение $\gamma \in M^1(X)$ называется гауссовским [3, гл. IV], если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \; y \in Y, \tag{1}$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(u+v)+\varphi(u-v)=2[\varphi(u)+\varphi(v)],\ u,\ v\in Y. \quad (2)$$

Следующий результат можно рассматривать как аналог теоремы A для локально компактных абелевых групп.

Теорема 1. *Пусть X — локально компактная абелева группа, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины со значениями в группе X с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Пусть b_j — непрерывные эндоморфизмы группы X. Положим $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$. Пусть либо*

(I) $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ *и b_j удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Ker}(b_i - b_j) = \{0\},\ i \neq j,\quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (3)$$

либо

(II) $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ *и b_j удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Ker}(b_1 - b_2) = \operatorname{Ker} b_3 = \{0\}. \quad (4)$$

Тогда распределение случайного вектора (L_1, L_2) определяет распределения случайных величин ξ_j с точностью до сдвига.

В работе [5] Б.Л.С. Пракаса Рао заметил, что доказательство И. Котлярски теоремы B без изменений переносится на локально компактные абелевы группы. Наше доказательство теоремы 1 является новым и для группы вещественных чисел $\mathbb{R}$. Оно отличается от доказательства С.Р. Рао теоремы A, приведённого в [1], которое в отличие от доказательства теоремы И. Котлярски не может быть перенесено с вещественной прямой на локально компактные абелевы группы. Поясним это. Пусть η_1, η_2, η_3 — независимые случайные величины со значениями в группе X с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Обозначим через μ_j распределение случайной величины ξ_j и через ν_j распределение случайной величины η_j. Положим $M_2 = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3$, $f_j(y) = \dfrac{\hat{\nu}_j(y)}{\hat{\mu}_j(y)}$, $j = 1, 2, 3$. Предположим, что выполнено (I). Положим $M_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$. Несложно проверить, что функции $f_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$f_1(u+\tilde{b}_1v)f_2(u+\tilde{b}_2v)f_3(u+\tilde{b}_3v)=1,\ u,\ v\in Y. \quad (5)$$

Теорема 1 будет доказана, если мы установим, что существуют такие элементы $x_j \in X$, что $f_j(y) = (x_j, y)$, $y \in Y$, $j = 1, 2, 3$. В [1] для решения уравнения (5) его логарифмируют, рассматривая главную ветвь логарифма. Затем доказывают, что функции $g_k(y) = \log f_k(y)$ линейны, а следовательно, $f_k(y) = e^{ix_ky}$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$. Отсюда вытекает теорема A. На локально компактных абелевых группах, вообще говоря, логарифмировать уравнение (5) нельзя. Более того, поскольку X — произвольная локально компактная абелева группа, то хорошо известно, что, вообще говоря, не всякий характер (x, y) группы Y имеет вид $(x, y) = e^{ih(y)}$, где $h(y)$ — непрерывная вещественнозначная функция, удовлетворяющая уравнению $h(u+v) = h(u) + h(v)$, $u, v \in Y$.

Пусть в теореме 1 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_2 + \xi_3$. Тогда, очевидно, непрерывные эндоморфизмы b_j удовлетворяют условиям (4), и из теоремы 1 следует, в частности, групповой аналог теоремы И. Котлярски (см. [5]).

Легко также видеть, что из теоремы 1 вытекает следующая теорема, доказанная С.Р. Рао в [1].

Теорема C. *Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные векторы со значениями в пространстве $\mathbb{R}^p$ с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Пусть a_j, b_j — $(p \times p)$-матрицы, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) *a_j — либо нулевая матрица, либо невырожденная матрица, и только одна из матриц a_j может быть нулевой матрицей;*

(ii) *b_j — либо нулевая матрица, либо невырожденная матрица, и только одна из матриц b_j может быть нулевой матрицей;*

(iii) *матрицы a_j и b_j не могут быть одновременно нулевыми матрицами;*

(iv) *если матрица $b_ia_i^{-1} - b_ja_j^{-1}$, $i \neq j$, определена, то она невырождена.*

Пусть $L_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$. Тогда распределение пары (L_1, L_2) определяет распределения случайных векторов ξ_j с точностью до сдвига.

Дополним теорему 1 следующим утверждением.

Предложение 1. *Пусть X — локально компактная абелева группа, ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Пусть b_1 и b_2 — непрерывные эндоморфизмы группы X, такие, что*

$$\operatorname{Ker}(b_1 - b_2) = \{0\}. \quad (6)$$

Пусть $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2$. Тогда распределение случайного вектора (L_1, L_2) однозначно определяет распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Теорема 1 и предложение 1 неверны, если мы опустим условия (3), (4), (6) соответственно. Построим соответствующие примеры. Напомним определение распределения Пуассона на группе X. Пусть $x_0 \in X, \lambda > 0$. Положим

$$e(\lambda E_{x_0}) = e^{-\lambda}\left(E_0 + \lambda E_{x_0} + \lambda^2 \frac{E_{2x_0}}{2!} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \lambda^n \frac{E_{nx_0}}{n!} + \ldots\right).$$

Пусть b_j, $j = 1, 2, 3$, — непрерывные эндоморфизмы группы X. Пусть условия (3) не выполнены. Предположим для определённости, что $\mathrm{Ker}(b_1 - b_2) \neq \{0\}$. Возьмём $x_0 \in \mathrm{Ker}(b_1 - b_2)$, $x_0 \neq 0$, число $a > 0$ и рассмотрим распределения $\mu_1 = \mu_2 = e(2aE_{x_0})$, $\nu_1 = e(aE_{x_0})$, $\nu_2 = e(3aE_{x_0})$, $\mu_3 = \nu_3 = \mu$, где μ — произвольное распределение на X. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, а η_1, η_2, η_3 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями ν_j. Очевидно, что ν_1 и ν_2 не являются сдвигами μ_1 и μ_2. Положим $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$, $M_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$, $M_2 = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3$. Можно проверить, что распределения случайных векторов (L_1, L_2) и (M_1, M_2) совпадают. Таким образом, если $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и условия (3) не выполнены, то теорема 1 неверна. Аналогично можно убедиться, что теорема 1 неверна в случае, когда $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, если мы опустим условие $\mathrm{Ker}(b_1 - b_2) = \{0\}$. Для предложения 1 рассуждение аналогично.

Предположим теперь, что $G = \mathrm{Ker}\, b_3 \neq \{0\}$. Пусть μ_3 и ν_3 — произвольные распределения на группе X с носителем в G. Пусть $\mu_1 = \nu_1$ и $\mu_2 = \nu_2$ — произвольные распределения на группе X. Предположим, что ν_3 не является сдвигом μ_3. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, а η_1, η_2, η_3 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями ν_j. Положим $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$, $M_1 = \eta_1 + \eta_2$, $M_2 = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3$. Можно проверить, что распределения случайных векторов (L_1, L_2) и (M_1, M_2) совпадают. Значит, теорема 1 также неверна, если мы опустим условие $\mathrm{Ker}\, b_3 = \{0\}$.

В работе [1] С.Р. Рао доказал также следующую теорему.

Теорема D. *Пусть ξ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, — независимые случайные величины с не обращающимися в ноль характеристическими функциями, a_j, b_j — вещественные числа, такие что $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$ при $i \neq j$. Пусть $L_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 + b_4\xi_4$.*

Тогда распределение случайного вектора (L_1, L_2) определяет распределения случайных величин ξ_j с точностью до свёртки с гауссовским распределением.

Мы докажем, что теорема D верна для $\boldsymbol{a}$-адических соленоидов. Напомним определение $\boldsymbol{a}$-адического соленоида. Положим $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots)$, где все $a_j \in \mathbb{Z}$, $a_j > 1$. Обозначим через $\Delta_{\boldsymbol{a}}$ группу целых $\boldsymbol{a}$-адических чисел. Рассмотрим группу $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$. Обозначим через B подгруппу группы $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$ вида $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\mathbf{u} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Факторгруппа $\Sigma_{\boldsymbol{a}} = (\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}})/B$ называется $\boldsymbol{a}$-адическим соленоидом. Группа $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ компактна, связна и имеет размерность 1 ([4, (10.12), (10.13), (24.28)]). Группа характеров группы $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ топологически изоморфна дискретной группе вида

$$H_{\boldsymbol{a}} = \left\{\frac{m}{a_0 a_1 \ldots a_n} : n = 0, 1, \ldots; m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Из (1) и (2) следует, что характеристическая функция гауссовского распределения γ на $\boldsymbol{a}$-адическом соленоиде $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ имеет вид

$$\hat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\sigma y^2\},\ y \in H_{\boldsymbol{a}},$$

где $x \in \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, $\sigma \geq 0$.

Следующий результат можно рассматривать как аналог теоремы D для $\boldsymbol{a}$-адических соленоидов.

Теорема 2. *Пусть $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}}$ — $\boldsymbol{a}$-адический соленоид. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, — независимые случайные величины со значениями в группе X с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Пусть b_j — непрерывные эндоморфизмы группы X. Положим $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 + b_4\xi_4$. Пусть либо*

(I) *$L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ и b_j удовлетворяют условиям*

$$\mathrm{Ker}(b_i - b_j) = \{0\},\ i \neq j,\quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, \qquad (7)$$

либо

(II) *$L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и b_j удовлетворяют условиям*

$$\mathrm{Ker}(b_i - b_j) = \{0\},\ i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, 3\},\ \mathrm{Ker}\, b_4 = \{0\}. \quad (8)$$

Тогда распределение случайного вектора (L_1, L_2) определяет распределения случайных величин ξ_j с точностью до свёртки с гауссовским распределением.

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие леммы.

Лемма 1 (ср. с [6, лемма 3]). *Пусть Y — локально компактная абелева группа, β_j — непрерывные эндоморфизмы группы Y, удовлетворяющие условиям: множества $(\beta_i - \beta_j)(Y)$ плотны в Y при $i \neq j$. Рассмотрим на группе Y уравнение*

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j(u+\beta_j v) = B(v),\ u,\ v \in Y, \qquad (9)$$

где $\psi_j(y)$ *и* $B(y)$ *— непрерывные функции на* Y.

Тогда $\psi_j(y)$ *— многочлены на* Y *степени, не превосходящей* $n-1$. *Если* $B(y)=0$ *при* $y \in Y$, *то степени многочленов* $\psi_j(y)$ *не превосходят* $n-2$.

Лемма 2 [7, лемма 9.13]). *Пусть* X *— локально компактная абелева группа, содержащая не более одного элемента порядка 2. Пусть* Y *— группа характеров группы* X. *Пусть* $g(y)$ *— непрерывная функция на группе* Y, *удовлетворяющая уравнению*

$$g(u+v)g(u-v) = g^2(u), \quad u,\ v \in Y, \qquad (10)$$

и условиям

$$g(-y) = \overline{g(y)},\ |g(y)| = 1,\ y \in Y,\ g(0) = 1. \qquad (11)$$

Тогда $g(y)$ *— характер группы* Y.

Отметим также, что, используя схему доказательства теоремы 2, можно доказать следующее утверждение. Пусть X — локально компактная абелева группа, Y — её группа характеров. Пусть ξ_j, $j=1,2,3,4$, и η_j, $j=1,2,3,4$, — два множества независимых случайных величин со значениями в группе X с не обращающимися в ноль характеристическими функциями и распределениями μ_j, ν_j соответственно. Пусть b_j — непрерывные эндоморфизмы группы X. Положим $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 + b_4\xi_4$, $M_2 = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3 + b_4\eta_4$. Пусть либо $L_1 = \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$, $M_1 = \eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4$ и b_j удовлетворяют условиям (7), либо $L_1 = \xi_1+\xi_2+\xi_3$, $M_1 = \eta_1+\eta_2+\eta_3$ и b_j удовлетворяют условиям (8). Если случайные векторы (L_1, L_2) и (M_1, M_2) одинаково распределены, то

$$\hat{\nu}_j(y) = \hat{\mu}_j(y)g_j(y)e^{\varphi_j(y)}, \quad y \in Y, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где $g_j(y)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (10) и условиям (11), а $\varphi_j(y)$ — непрерывная вещественнозначная функция, удовлетворяющая уравнению (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rao C.R.* // Sankhya. 1971. V. 33. Ser. A. P. 265–270.
2. *Kotlarski I.* // Pacific J. Math. 1967. V. 20. P. 69–76.
3. *Parthasarathy K.R.* Probability Measures on Metric Spaces. N.Y.; L.: Acad. Press, 1967. 276 p.
4. *Хьюитт Э.*, *Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975. 656 с.
5. *Prakasa Rao B.L.S.* // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1968. V. 9. P. 98–100.
6. *Feldman G.M.* // Aequat. Math. 2017. V. 91. P. 949–967.
7. *Feldman G.M.* Functional Equations and Characterization Problems on Locally Compact Abelian Groups. EMS Tracts in Mathematics. V. 5. Zurich: Eur. Math. Soc., 2008. 268 p.

ON C.R. RAO'S THEOREM FOR LOCALLY COMPACT ABELIAN GROUPS

G. M. Feldman

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov July 9, 2018

Received August 6, 2018

Let ξ_1, ξ_2, ξ_3 be independent random variables with values in a locally compact Abelian group X with nonvanishing characteristic functions, and a_j, b_j be continuous endomorphisms of X satisfying some restrictions. Let $L_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3$, $L_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$. It was proved that the distribution of the random vector $(L_1; L_2)$ determines the distributions of the random variables ξ_j up a shift. This result is a group analogue of the well-known C.R. Rao theorem. We also prove an analogue of another C.R. Rao's theorem for independent random variables with values in an $\boldsymbol{a}$-adic solenoid.

Keywords: C.R. Rao's theorem, locally compact Abelian group.