

УДК 532.64

О СИНГУЛЯРНОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ КОНТАКТНОЙ ЛИНИИ

Р. Кречетников

Представлено академиком РАН В.А. Левиным 25.06.2018 г.

Поступило 20.06.2018 г.

Учитывая, что контактная линия между жидкой и твёрдой фазами может двигаться независимо от того, насколько пренебрежимо малы шероховатость поверхности, проскальзывание Навье, летучесть жидкости, присутствие примесей, отклонение реологии жидкости от ньютоновской и другие зависящие от физической системы параметры, мы рассматриваем здесь задачу с чисто гидродинамической точки зрения. На основании простых логических соображений автор предлагает новую идею о том, как можно устранить сингулярность движущейся контактной линии. В поддержку идеи также предоставляются оценки задействованных физических величин и аналитическое локальное решение.

Ключевые слова: сингулярность, контактная линия.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524843285-288>

Начиная с работ [1, 2] хорошо известно, что течение жидкости в достаточной близости к движущейся контактной линии происходит в режиме Стокса. В клиновидной конфигурации (рис. 1) соображения симметрии диктуют единственное решение в виде функции тока для соответствующей краевой задачи $\psi = Urf(\theta)$, которая приводит к r^{-1} сингулярности в сдвиговом напряжении и давлении, тем самым делая как полную силу, действующую на твёрдую поверхность (подложку), так и скорость вязкой диссипации логарифмически расходящимися. Ранее были предложены различные способы для устранения сингулярности, в частности основанные либо на фактическом, либо на эффективном (для шероховатых подложек) проскальзывании или существовании прекурсорной плёнки. Известно, что шероховатость подложки может быть уменьшена до субнанометровых масштабов, и существует много ситуаций, когда нет ни прекурсионной плёнки, ни измеримого проскальзывания при разумных скоростях сдвига. Также расстояние, на котором может происходить проскальзывание, определяется балансом межмолекулярных взаимодействий $O(A/l)$ с вязкими силами $O(\mu l^2 \dot{\gamma})$, где μ — динамическая вязкость, $A \approx 10^{-19}$ Дж — константа Гамакера и $l \approx 0,3$ нм — типичный размер молекулы воды. В результате скорость сдвига $\dot{\gamma} \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$, откуда для скорости контактной линии $U = 1$ мм/с находим критическое расстояние от вершины клина $r^* \approx 10^{-15}$ м, которое значительно меньше l и фактически порядка диаметра водородного ядра. Следовательно, в ти-

пичной ситуации нельзя полагаться на проскальзывание, чтобы разрешить сингулярность. Аналогично предполагаем, что жидкость ведёт себя как неньютоновская при повышенных значениях сдвиговых напряжений, что происходит, когда характерное время течения становится сравнимым с релаксацией $T \sim \mu/K$, при которой жидкости начинают вести себя как твёрдые тела (и, следовательно, появляются неньютоновские эффекты); здесь K — модуль объёмной упругости, как правило, того же порядка, что и модуль сдвига $G \approx \rho c^2$, где c — скорость звука и ρ — плотность. Следовательно, для воды мы находим $T \approx 10^{-12}$ с. Сравнивая с $\dot{\gamma}^{-1} \approx r^*/U$ для того же значения U , снова получаем $r^* \approx 10^{-15}$ м.

Таким образом, мы имеем дело с ситуацией, когда, несмотря на прилипание к подложке, контактная линия воды способна двигаться. Единственный разумный логический вывод состоит в том, что сингулярность является следствием предположенной заострённой геометрии клина на рис. 1.

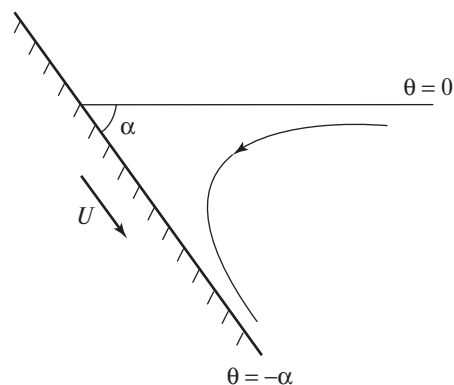


Рис. 1. Клиновидная конфигурация.

Поскольку природа не допускает неразрешённых особенностей, следующим шагом является отказ от этой геометрической конфигурации, т.е. мы должны предположить, что вершина клина не является идеально острой и жидкость должна встречать границу раздела с твёрдым телом под углом $\theta = \pi$, — в этом случае расходящиеся напряжения и давление, ранее вычисленные [1, 2], обнуляются и, таким образом, сингулярность контактной линии удаляется. Учитывая, что кажущийся макроскопический угол смачивания α , как правило, отличается от π , единственный способ согласовать его с микроскопическим углом смачивания π заключается во введении сильно изогнутой области, как на рис. 2, которая должна быть очень малой, учитывая, что она не наблюдается на макроскопическом уровне. Естественным кандидатом для сглаживания заострения клина является поверхностное натяжение σ , вносящее небольшой радиус кривизны R , который можно найти, уравнивая вязкие напряжения и капиллярное давление, что приводит к $R \approx r\sigma/(\mu U)$, т.е. в рамках этой модели R не определяется однозначно и, следовательно, может быть множество решений типа, показанного на рис. 2. Следовательно, требуется дополнительный физический эффект для однозначного определения R .

С учётом приведённых логических рассуждений единственный эффект, который всегда присутствует, но не был учтён в предыдущих работах, является теплотой, вызванной вязкой диссипацией в области высокой кривизны R^{-1} и, следовательно, значительных напряжений, что, естественно, приводит к изменениям поверхностного натяжения и, следовательно, напряжениям Марангони, тем самым предоставляя потенциальный механизм для определения масштаба длины R .

Чтобы обосновать идею о том, что сингулярность контактной линии можно разрешить с помощью

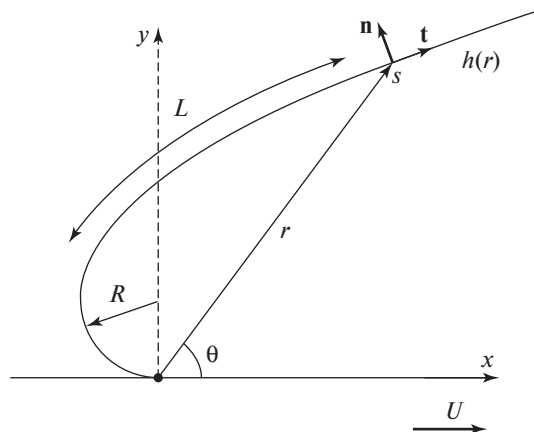


Рис. 2. К характерным масштабам.

градиентов поверхностного натяжения, проведём простые оценки для ситуации, рассмотренной в работах [1, 2], т.е. когда движение контактной линии установившееся и, следовательно, стационарно. В полярной системе координат (рис. 2) общие динамические условия на свободной границе раздела $\theta = h(r)$ принимают вид

$$p - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \sigma_s, \quad (1b)$$

где \mathbf{t} и \mathbf{n} — касательный и нормальный векторы, $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений с u и v , представляющими компоненты r и θ скорости \mathbf{v} , $\nabla \cdot \mathbf{n}$ — кривизна свободной поверхности, которая положительна для конфигурации, показанной на рис. 2, и s — длина дуги. Из баланса тангенциального напряжения и градиентов Марангони

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \approx \frac{d\sigma}{dT} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (2)$$

на свободной поверхности в предположении линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры $\sigma = \sigma_0 - \gamma \Delta T$ (где $\gamma > 0$ для нормальных веществ) мы находим

$$\mu \frac{U}{L} \sim \gamma \frac{\Delta T}{L} \Rightarrow \Delta T \sim \frac{\mu U}{\gamma}, \quad (3)$$

что подразумевает уравнивание вязких напряжений в “квадратной” области $L \times L$ напряжениями Марангони. Уравнение баланса энергии для несжимаемого потока имеет вид

$$\rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{\mu}{2} \epsilon_{ik} \epsilon^{ik}, \quad (4)$$

где ϵ_{ik} — тензор скорости деформации. Поскольку сама теплопроводность не приводит к конечному распределению температуры при наличии точечного источника тепла (последнего слагаемого в уравнении энергии), единственный способ получить конечный характерный масштаб длины L для изменения температуры ΔT — это путём баланса адвекции и теплопроводности:

$$\rho c_p U \frac{\Delta T}{L} \sim \kappa \frac{\Delta T}{L^2} \Rightarrow L = \frac{\kappa}{U \rho c_p}. \quad (5)$$

Именно на этом пространственном масштабе эффекты адвекции в (4) уравниваются диффузией. На более коротких масштабах диффузия доминирует и в этой двумерной задаче приводит к логарифмическому распределению температуры (т.е. фундаментальному решению уравнения Лапласа с точечным источником), которое не устанавливает какой-либо характерной длины. На более длинных мас-

штабах распределение температуры экспоненциально выравнивается из-за адвекции, как следует из уравнения (4). Тогда радиус кривизны R особой области определяется из баланса производства тепловой энергии в этой области и последующего переноса на большую область размера L (см. рис. 2):

$$\mu \left(\frac{U}{R} \right)^2 \sim \kappa \frac{\Delta T}{L^2}, \quad (6)$$

т.е. последний член в уравнении (4) действует как точечный источник, $R \ll L$. Из (3), (5), (6) мы приходим к

$$L \sim \frac{\kappa}{U \rho c_p}, \Delta T \sim \frac{\mu U}{\gamma}, R \sim \frac{1}{\rho c_p} \sqrt{\frac{\gamma \kappa}{U}}. \quad (7)$$

Используя значения параметров для воды ($\gamma = 1,4 \cdot 10^{-4}$ Н/(м·К)), $\kappa = 0,56$ Вт/(м·К), $c_p = 4185,5$ Дж/(кг·К), $\rho = 10^3$ кг/м³, $\mu = 1,002$ мПа·с, $U = 10^{-3}$ м/с), можем оценить:

$$L \approx 0,1 \text{ мм}, R \approx 0,1 \text{ мкм}, \Delta T \approx 10^{-2} \text{ К}. \quad (8)$$

Хотя вариация температуры невелика, её градиент равен $O(10^2)$ К/м, что на порядок выше, чем тот, что требуется для появления конвекции Рэлея—Бенара в слое воды толщиной 1 см. Изменение температуры ΔT также сравнимо с оценкой молекулярной динамики, а именно когда молекула воды со средней скоростью $\langle v \rangle \approx 500$ м/с отражается от вершины клина, движущегося со скоростью U , она приобретает кинетическую энергию $\sim 2\langle v \rangle U$ (на массу молекулы), которая по сравнению со средней кинетической энергией при комнатной температуре даёт $\Delta T \approx 2 \cdot 10^{-3}$ К.

Мы можем получить ещё несколько важных сведений о задаче, обобщая решение Моффата [1] на случай с напряжениями Марангони. Из конфигурации на рис. 1 ясно, что решение соответствующей задачи Стокса по-прежнему имеет вид $\psi = Urf(\theta)$, так что компоненты скорости даются выражениями $u = r^{-1}\psi_\theta = Uf'(\theta)$, $v = -\psi_r = -Uf(\theta)$. Соответствующие граничные условия в виде функции потока даются в виде

$$\theta = -\alpha: f(-\alpha) = 0, \quad f'(-\alpha) = 1, \quad (9a)$$

$$\theta = 0: f(0) = 0, \quad f''(0) = \tau, \quad (9b)$$

где $\tau \equiv Ca^{-1}r\sigma_r$, и выражение в тангенциальном балансе для удобства обезразмерено, $r \rightarrow Lr$, с помощью L , введённого ранее, здесь $Ca = \mu U / \sigma_0$ — капиллярное число. Поскольку $\sigma_r = \sigma_T T_r$, единственное условие, при котором может выполняться граничное условие (9б), — это $\Delta T \sim \ln r$ (для пред-

полагаемой линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры), которая эффективно делает поле скорости независимым от уравнения энергии (4); такое естественное появление логарифмического решения согласуется с предыдущими выводами. Заметим, что поскольку (из физических соображений) $\frac{\partial \sigma}{\partial r} > 0$ ($\tau > 0$) и $\frac{d\sigma}{dT} < 0$, то $\frac{\partial T}{\partial r} < 0$ и, следовательно, изменение температуры $\Delta T \sim \ln r$ должно иметь отрицательный знак (соответствующий уменьшению температуры), так как аргумент $r < 1$ после обезразмеривания на L .

Полученное решение для поля скоростей имеет вид

$$f(\theta) = \frac{\theta \cos \theta \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \sin \theta}{\sin \alpha \cos \alpha - \alpha} + \frac{\tau}{2} \frac{\theta \sin \alpha \sin(\alpha + \theta) - \alpha(\alpha + \theta) \sin \theta}{\sin \alpha \cos \alpha - \alpha}, \quad (10)$$

где первый член тот же, что и в решении Моффата [1], а последний член связан с вкладом эффекта Марангони. Тогда скорость на свободной поверхности $u_s = Uf'(0)$ не зависит от r . Так как $\tau > 0$, то напряжение Марангони частично подавляет изначально существующий скачок скорости от $-U/2$ на свободной границе раздела до U на твёрдой подложке.

В пределе, когда $\alpha = \pi$, так что свободная поверхность раздела подходит к подложке тангенциально, как показано на рис. 2, решение (10) сводится к

$$f(\theta) = -\sin \theta + \frac{\tau}{2}(\pi + \theta) \sin \theta. \quad (11)$$

Примечательно, что в отличие от [1] одно из вязких напряжений и градиенты давления не обнуляются в точке контакта:

$$e_{r\theta} = \tau \frac{\cos \theta}{r}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\tau \frac{\sin \theta}{r^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = \tau \frac{\cos \theta}{r}. \quad (12)$$

Это означает, опять же из принципа, согласно которому природа не позволяет неразрешённые особенности, что температура должна иметь экстремум, т.е. $T_r = 0$. Согласно определению τ оно обращается в ноль быстрее, чем r при $r \rightarrow 0$, и, следовательно, на контактной линии нет особенности. Другой способ посмотреть на проблему — это начать с ситуации сингулярного напряжения (12), что неизбежно подразумевает экстремум вязкой диссипации и, следовательно, $T_r = 0$ при $r = 0$, в свою очередь, это противоречит тому факту, что могут существовать особые напряжения. Этот саморегулируемый эффект допускает существование решения на рис. 2.

Другим эффектом, который способствует решению на рис. 2, является изгиб свободной поверхности — механизм, который также можно прояснить с помощью (10). В отсутствие градиентов поверхностного натяжения тангенциальное напряжение на свободной границе исчезает, как и в решении Моффата для клина. Это также можно видеть из (16) после линеаризации для малых h_r , приводящей к $u_\theta = 0$. Если изначально нет кривизны свободной границы, $\nabla \cdot \mathbf{n} = 0$, как в геометрии клина на рис. 1, наличие градиентов поверхностного натяжения приводит к тому, что вязкое напряжение отклоняется от нуля $u_\theta \sim \sigma_s > 0$ и, следовательно, $f''(0) > 0$. Тогда, согласно линеаризации (1a), давление должно увеличиваться от атмосферного $p_a = 0$:

$$p \sim -\frac{h_r}{r^3}[f + f'']_{\theta=0} > 0, \quad (13)$$

так как $f''(0) > 0$, $f(0) = 0$ и $h_r < 0$ (см. рис. 2), что приводит к выпучиванию свободной поверхности из-за неуравновешенности с атмосферным давлением. Выпучивание продолжается до тех пор, пока капиллярное давление $\sigma \nabla \cdot \mathbf{n}$ не уравнивается с вязкими напряжениями в (1a).

Таким образом, оба эффекта — максимальная диссипация на контактной линии и изгиб свободной поверхности — обеспечивают механизм формирования стационарного решения на рис. 2. Принятие такой точки зрения, основанной на нестационарном процессе, позволяет осуществить правильный переход от статической контактной линии ($U = 0$) к её движению с рассматриваемой здесь макроскопической скоростью U , а также объясняет особый характер предела $U \rightarrow 0$ в (7): если в статическом случае мы начинаем с острой геометрии клина ($R = 0$), R динамически увеличивается до значения, оценённого в (7), не расходящегося до бесконечности, если бы мы подставили $U = 0$ в формулу (7) для R .

Автор признателен А. Зельникову, В. Ажаеву и Дж. Хомси за интерес к представленной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moffatt H.K.* Viscous and Resistive Eddies near a Sharp Corner // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 18. P. 1–18.
2. *Huh C., Scriven L.E.* Hydrodynamic Model of Steady Movement of a Solid/Liquid/Fluid Contact Line // *J. Colloid Interface Sci.* 1971. V. 35. P. 85–101.

ON THE MOVING CONTACT LINE SINGULARITY

R. Krechetnikov

Presented by Academician of the RAS V.A. Levin June 25, 2018

Received June 20, 2018

Given that contact line between liquid and solid phases can move regardless how negligibly small are the surface roughness, Navier slip, liquid volatility, impurities, deviations from the Newtonian behavior, and other system-dependent parameters, the problem is treated here from the pure hydrodynamical point of view only. In this note, based on straightforward logical considerations, we would like to offer a new idea of how the moving contact line singularity can be resolved and provide support with estimates of the involved physical parameters as well as with an analytical local solution.

Keywords: singularity, contact line.