ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 3, с. 348–351

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.34.013:532.685:551.345

К ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДЕ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Член-корреспондент РАН Л. И. Лобковский[1,*], М. М. Рамазанов[1,2,**]

Поступило 03.08.2018 г.

Сформулирована обобщённая математическая модель фильтрации в среде с двойной пористостью с учётом современных представлений о течении жидкости и газа в породах с аномально низкой проницаемостью (в том числе нанопористых). В результате получено уравнение, учитывающее эффекты непосредственной фильтрации энерго- (или тепло)-носителя в малопроницаемых включениях. Проведено сравнение законов изменения расхода газа на границе разгрузки с классической моделью с двойной пористостью и с моделью Буссинеска—Лейбензона.

Ключевые слова: фильтрация, двойная пористость, математическая модель, газогидраты, сланцы.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524843348-351

ВВЕДЕНИЕ

В связи с актуальной задачей создания и оптимизации технологий разработки нетрадиционных месторождений углеводородов (газогидраты, сланцевые газ и нефть и т.д.) возникает необходимость усовершенствования классических моделей механики подземных флюидов. В [1, 2] предложена новая математическая модель, которая предполагает, что порода состоит из двух компонентов: матрицы, которая является более или менее обычной пористой или деформированной пористой средой и специфических включений. Эти включения состоят, например, из агломерата лёд—свободный газ—газогидрат [1] или керогена в случае месторождения сланцевого газа [2]. Они могут иметь существенную пористость, но из-за наноразмеров пор, трубок и каналов имеют чрезвычайно низкую проницаемость порядка нанодарси (~10^{-21} м^2) или меньше. Существенной особенностью модели [1, 2] является то, что в ней эффективная проницаемость пропорциональна градиенту давления в некоторой степени $m \geq 0$.

Однако в цитированных работах рассматривается процесс фильтрации газа лишь во включениях, фильтрация же в матрице остаётся без внимания. В качестве естественного развития указанной модели представляется, что в этих и аналогичных случаях необходимо учитывать течение газа (жидкости) в матрице, т.е. для описания течения газа и жидкости в таких средах более адекватной является модель среды с двойной пористостью. С другой стороны, известная классическая модель фильтрации с двойной пористостью, напротив, совсем не учитывает фильтрацию в малопроницаемых включениях, и изменение давления во включениях происходит исключительно за счёт их массообмена с матрицей [2]. В данной работе рассмотрена простейшая модель, которая обобщает и модель [1, 2], поскольку учитывает фильтрацию в матрице, и модель с двойной пористостью [3], поскольку непосредственно учитывает эффекты фильтрации во включениях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что пласт состоит из двух компонентов: матрицы, которая является более или менее обычной пористой средой и специфических включений (рис. 1). Эти включения имеют существенную пористость, но чрезвычайно низкую проницаемость. Предполагается, что в матрице применим обычный закон Дарси, а эффективная проницаемость во включениях пропорциональна градиенту давления в некоторой степени $m \geq 0$ [1, 2]. Для

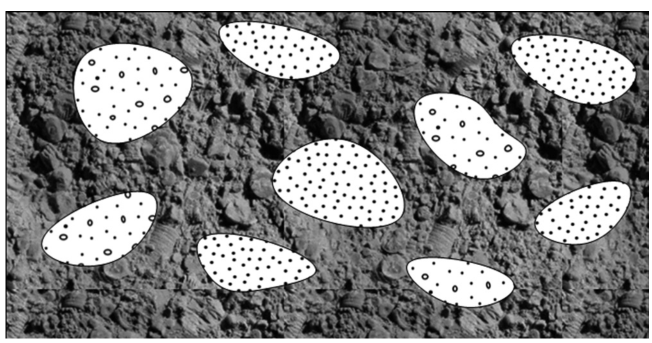

Рис. 1. Среда с двойной пористостью: основа — матрица с нормальной проницаемостью; овалы — включения с аномально низкой проницаемостью.

[1] *Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской Академии наук, Москва*
[2] *Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра Российской Академии наук, Махачкала*
**E-mail: llobkovsky@ocean.ru*
***E-mail: mukamay-ipg@mail.ru*

простоты с самого начала предполагаем процесс изотермическим.

Как матрицу, так и совокупность включений будем считать двумя разными сплошными средами, которые гидродинамически взаимодействуют. В каждой точке пространства имеем два давления p_1, p_2, соответствующие матрице и включениям соответственно. Предполагаем, что матрица вместе с включениями имеет начальное давление газа p_0 и занимает некоторую область V. В некоторый момент времени давление на границе разгрузки пласта падает до значения $p^0 < p_0$. Требуется описать процесс деградации включений, сопровождаемый дегазацией пласта. Для описания указанных процессов используем обобщённую модель с двойной пористостью.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Следуя классической модели с двойной пористостью, запишем уравнения фильтрации в обеих средах в виде [3]

$$\frac{\partial \phi_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_1 \mathbf{u}_1 = q_p, \quad \mathbf{u}_1 = -\frac{k_1}{\mu}\nabla p_1, \quad j = 1,\ 2,$$
$$\frac{\partial \phi_2 \rho_2}{\partial t} = -q_p, \quad \rho = f(p). \tag{1}$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к матрице и малопроницаемым включениям соответственно; ϕ_1, ϕ_2 — пористости матрицы и включений (в расчёте на полный объём среды); ρ_1, ρ_2 — плотность газа в матрице и эффективная плотность газа во включении; k — проницаемость; μ — вязкость газа.

Для замыкания системы (1) необходимо задать выражение q_p. В классической модели [3] из соображений размерности это выражение задаётся пропорциональным разности давлений во включении и матрице $(p_2 - p_1)$. При этом коэффициент считается эмпирическим, а главное, постоянным. В рассматриваемой здесь модели выражение q_p не задаётся, а вычисляется на основе результатов работ [1, 2], и тем самым обобщаются обе отмеченные модели, т.е., с одной стороны, рассматривается фильтрация в матрице, а с другой — учитывается эффект фильтрации во включениях.

Будем считать газ совершенным, тогда система уравнений (1) примет вид

$$\frac{\phi_1}{RT}\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{k_1}{RT\mu}\operatorname{div}(p_1 \operatorname{grad} p_1) + q_p,$$
$$\frac{\phi_2}{RT}\frac{\partial p_2}{\partial t} = -q_p. \tag{2}$$

Для вычисления $q_p(p, t)$ рассмотрим “микроуравнение” внутри отдельных включений, следуя [1, 2]:

$$\frac{\phi_{20}}{RT}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kp}{\mu RT}\frac{\partial p}{\partial x}\right), \; k = A\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^m, \; A = \text{const}, \tag{3}$$
$$p(t,\ 0) = p_1, \quad p(t,\ \infty) = p_2, \quad p(0,\ x) = p_2.$$

Здесь ϕ_{20} — собственная пористость включений, в то время как ϕ_2 — пористость в расчёте на общий объём. Существенным является то, что в (3) проницаемость пропорциональна градиенту давления в некоторой степени.

Подробное рассмотрение уравнения (3) можно найти в [1, 2]. Здесь отметим, что оно имеет автомодельное решение, но не имеет точного аналитического решения. Однако, используя метод Лейбензона, как это сделано в [4, 5], можно найти его приближённое аналитическое решение. Опуская простой, но несколько громоздкий вывод, выпишем конечный результат для $q_p(p, t)$. При этом ограничимся простым, но характерным случаем $(p_2 - p_1)/p_2 = 1 - \sigma \ll 1$. Имеем

$$q_p = \alpha \frac{S\phi_2}{VRT}\frac{\phi_{20}\chi_2 p_2^{m+2}}{(p_2^{m+1}\chi_2 t)^{\frac{m+1}{m+2}}} F(\sigma,\ m),$$
$$\sigma = \frac{p_1}{p_2}, \quad \chi_2 = \frac{A}{\phi_{20}\mu},$$
$$F(\sigma,\ m) = \left(\frac{1-\sigma}{[2(m+2)]^{1/2}}\right)^{\frac{2(m+1)}{m+2}} = \left(\frac{p_2 - p_1}{2p_2(1 + m/2)^{1/2}}\right)^{\frac{2(m+1)}{m+2}}.$$

Здесь $S\phi_2/V$ — удельная (на единицу объёма среды) поверхность включений.

Прежде всего отметим, что это выражение отличается от классической модели тем, что оно зависит от времени и тем самым учитывает процесс фильтрации во включениях, хотя и интегрально.

Далее из (3) нетрудно показать, что параметр A можно записать в виде

$$A = k_{20}\left(\frac{L_v}{\Delta p}\right)^m = k_{20}\left(\frac{L_v}{p_2}\right)^m (1-\sigma)^{-m},$$
$$k_{20} = \left[\frac{1}{L_v}\int_0^{L_v} k_2^{1/m} dx\right]^m = \text{const}.$$

Наконец введём характерные масштабы

$$t = \frac{L_0^2}{\chi_1 p_0} t', \quad x = L_0 x',$$

$$L_0 = \left(\frac{\alpha S \phi_{20}}{2V}\right)^{-\frac{m+2}{2}} \left(\frac{\phi_2 k_{20}}{\phi_{20} k_1}\right)^{-1/2} L_v^{-m/2}.$$

В результате из (2) получим следующую систему:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}[p_1 \operatorname{grad} p_1] + 2[2(m+2)]^{-\frac{m+1}{m+2}} B(t)(p_2 - p_1) = 0,\\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = -2[2(m+2)]^{-\frac{m+1}{m+2}} B(t)(p_2 - p_1), \qquad (4)\\ B(t) = t^{-\frac{m+1}{m+2}}.\end{gathered}$$

Эту систему можно переписать в виде одного уравнения для давления в матрице

$$\begin{gathered}\frac{\partial p_1}{\partial t} = [2(m+2)]^{\frac{m+1}{m+2}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2B} D p_1\right) + D p_1,\\ D p_1 = \operatorname{div}[p_1 \operatorname{grad} p_1], \quad B(t) = t^{-\frac{m+1}{m+2}}.\end{gathered} \qquad (5)$$

В большинстве случаев уравнение (5) можно рассматривать как исходное. Если вместо уравнения совершенного газа использовать линейную зависимость плотности от давления, которая характерна для сжимаемой жидкости, то в (5) получим $D = \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$. Если, кроме того, положить $B = \mathrm{const}$ и $m = 0$, получим хорошо известное уравнение для модели фильтрации жидкости с двойной пористостью [3].

Систему (4) можно записать и относительно давления во включениях p_2:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = [2(m+2)]^{\frac{m+1}{m+2}} \frac{1}{2B} \frac{\partial}{\partial t} D p_2 + D p_2.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Полученная система уравнений (4) (или уравнения (5), или (6)) обобщает аналогичную систему уравнений в классической модели с двойной пористостью (КМ) [3]. Классическая модель из данной получится, если положить $m = 0$ и $B = \mathrm{const}$. Таким образом, в данном случае величина B зависит от времени, что является следствием того, что в настоящей модели интегрально учитывается эффект, связанный с фильтрацией газа во включениях, которым в КМ пренебрегается.

Тем же способом, как это сделано в [3], можно показать, что и в данном случае, чтобы решение было непрерывным по времени, произвольно можно задавать лишь начальное распределение в блоках (включениях) p_2.

Начальное же распределение p_1 в окружающей матрице тогда необходимо найти из уравнения

$$\begin{gathered}\operatorname{div}[p_1 \operatorname{grad} p_1] + 2[2(m+2)]^{-\frac{m+1}{m+2}} \times\\ \times B(t)[p_2(x, 0) - p_1] = 0. \qquad (6)\end{gathered}$$

Это означает, что если p_1 задать иным, то оно скачком перейдёт в распределение (6), что, в свою очередь, является следствием пренебрежения пористостью матрицы (трещин) по сравнению с пористостью включений. Если указанной малой величиной не пренебречь, то решение не скачком, но достаточно быстро (тем быстрее, чем меньше пористость матрицы) перейдёт от начального распределения к распределению (6).

Другим свойством решения системы (4), как и в КМ, является то, что p_2 может терпеть разрывы в пространстве, и эти скачки не исчезают мгновенно, как при упругом режиме (уравнение пьезопроводности), а затухают по некоторому закону. В классической модели с двойной пористостью они затухают по экспоненциальному закону e^{-At}. В данном случае этот закон несколько изменяется, а именно он имеет вид $e^{-At^{\frac{m+1}{m+2}}}$, т.е. процесс затухания разрывов замедляется по сравнению с КМ.

Уравнение (5) в одномерном случае было решено конечно-разностным методом. После этого распределение p_2 найдено из второго уравнения системы (4). Рисунок 2 показывает зависимость безразмерного расхода газа на границе разгрузки $x = 0$ от безразмерного времени для различных случаев. Кривые *1* и *2* построены на основе текущей модели

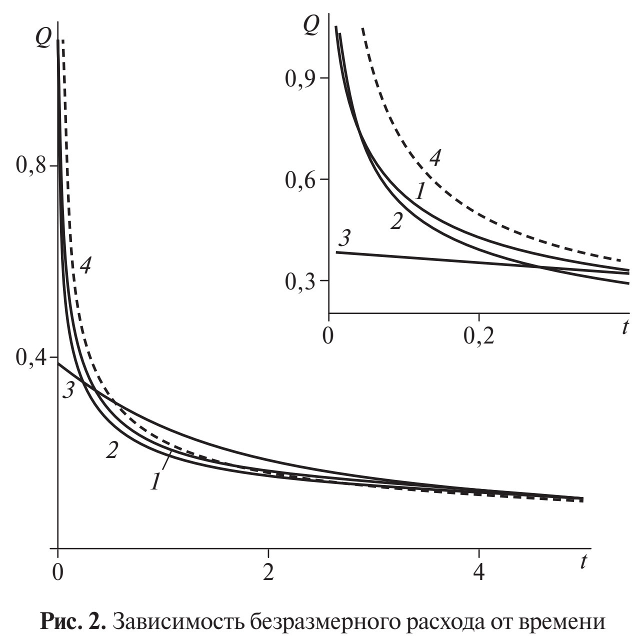

Рис. 2. Зависимость безразмерного расхода от времени на границе разгрузки $x = 0$: *1* — $m = 0$; *2* — $m = 1{,}1$; *3* — $m = 0$, $B \equiv 1$, т.е. классическая модель с двойной пористостью; *4* — модель Буссинеска—Лейбензона.

при $m = 0$; 1,1. Видно, что бóльшим m соответствуют на начальной стадии бóльшие расходы газа, а через некоторое время меньшие расходы. Кривая *3* соответствует классической модели двойной пористостью. Расход в этой модели значительно меньше, чем в текущей модели на начальном интервале времени. Наконец кривая *4* соответствует классической модели Буссинеска—Лейбензона. Как видно из рисунка, в этой модели расход выше других на всём рассмотренном отрезке времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приводится обобщённая модель фильтрации с двойной пористостью. В отличие от классической модели учитывается эффект фильтрации в малопроницаемых блоках, хотя и в интегральном виде. Для этого используется современное представление о законе фильтрации в малопористой, в частности нанопористой, среде. Этот закон отличается от закона Дарси тем, что проницаемость пропорциональна градиенту давления в некоторой степени $m \geq 0$. Показано, что свойства решения полученного обобщённого уравнения сходны со свойствами классической модели с двойной пористостью. Однако имеются некоторые отличия. Сравниваются законы изменения расхода газа на границе разгрузки для различных параметров — для классической модели с двойной пористостью и для модели Буссинеска—Лейбензона.

Общая постановка задачи и аналитические построения реализованы при поддержке РНФ, проект № 14—50—00095. Численный анализ выполнен в рамках госзадания № 0149—2019—005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И.*, *Лобковский Л.И.*, *Нигматулин Р.И.* // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 458—461.
2. *Monteiro P.M.*, *Rycroft C.H.*, *Barenblatt G.I.* A Mathematical Model of Fluid and Gas Flow in Nanoporous Media // Proc. Nat. Acad. Sci. 2012. V. 109. № 50. P. 20309—20313.
3. *Баренблатт Г.И.*, *Ентов В.М.*, *Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. С. 288.
4. *Лобковский Л.И.*, *Рамазанов М.М.* Математическая модель осесимметричного квазистационарного тепломассопереноса в газогидратном пласте // МЖГ. 2017. № 4. С. 85—96.
5. *Лобковский Л.И.*, *Рамазанов М.М.* Фронтовой режим тепломассопереноса в газогидратном пласте в условиях отрицательных температур // МЖГ. 2018. № 4.

THEORY OF FILTRATION IN A DOUBLE POROSITY MEDIUM

Corresponding Member of the RAS L. I. Lobkovskiy, M. M. Ramazanov

Received August 3, 2018

This paper defines a generalized mathematical model of filtration in a double porosity medium, taking into account recent ideas on liquid and gas flow in rocks with an anomalously low permeability (including nanoporous rocks). The obtained generalized equation takes into consideration, in contrast to the classical model, the integral effects of direct filtration of an energy (or heat) carrier in low-permeable inclusions. The laws of gas flow variations at the discharge point are compared with the classical double porosity model and with the Boussinesq—Leibenzon model.

Keywords: filtration, double porosity, mathematical model, gas hydrate, shale.