*ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 4, с. 397–400*

**МАТЕМАТИКА**

*УДК 517.9*

# СПЕКТРАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНГУЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

**С. А. Степин*, В. В. Фуфаев**

Представлено академиком РАН Я.Г. Синаем 23.08.2018 г.

Поступило 20.09.2018 г.

В работе исследуется квазиклассическая асимптотика спектра несамосопряжённой задачи Штурма–Лиувилля в случае однопараметрического семейства потенциалов-полиномов третьей степени. С использованием метода фазовых интегралов для рассматриваемой задачи выведены правила квантования, характеризующие асимптотическое распределение собственных значений и их концентрацию вблизи рёбер предельного спектрального комплекса. Описаны топологически различные типы предельного комплекса и найдены критические значения параметра деформации, отвечающие смене типа.

*Ключевые слова:* ВКБ-асимптотика, правило квантования, спектральный комплекс.

**DOI:** https://doi.org/10.31857/S0869-56524844397-400

Рассматривается задача на собственные значения

$$i\varepsilon y''(z)+\left(Q_\kappa(z)-\lambda\right)y(z)=0, \tag{1}$$

$$y(-1)=y(1)=0, \tag{2}$$

с нечётным кубическим потенциалом $Q_\kappa(z)=2\kappa z^3+(1-\kappa)z,\ \kappa\in[-1,1]$, представляющим собой деформацию $Q_0(z)=z$. Здесь $\varepsilon>0$ — малый, а $\lambda=a+ib$ — спектральный параметры. Спектр задачи (1), (2) симметричен относительно мнимой оси и расположен в полуполосе

$$\Pi=\{a+ib:\ a\in Q_\kappa([-1,1]),\ b<0\}.$$

Целью настоящей работы является исследование квазиклассической (ср. [1–3]) асимптотики собственных значений задачи (1), (2). Ниже установлено, что при $\varepsilon\downarrow 0$ точки спектра (1), (2) концентрируются вблизи рёбер предельного комплекса $\Gamma=\Gamma(\kappa)$, концевые вершины которого являются значениями потенциала $Q_\kappa(z)$ в его критических точках и точках $\pm 1$. При этом имеется три качественно различных топологических типа комплексов, которые реализуются в случаях $\kappa=0$ и $\kappa=\pm 1$. Смены типов комплексов происходят при $\kappa=-\dfrac{1}{5}$ и $\kappa=\kappa_0=\dfrac{2-2t_0^2}{2+t_0^2}$, где $t_0 \oplus 0{,}86$ — вещественный нуль многочлена $23t^5-5(t^3+t^2)-4$. Зафиксируем произвольное $M<0$, для $\delta>0$ через $\Pi(\delta)$ обозначим расположенную выше прямой $\operatorname{Im}\lambda=M$ часть полуполосы $\Pi$ с удалёнными $\delta$-окрестностями вершин комплекса $\Gamma(\kappa)$ и положим $\Pi_+(\delta)=\{\lambda\in\Pi(\delta):\ \operatorname{Re}\lambda>\delta\}$ и $\Pi_0(\delta)=\{\lambda\in\Pi(\delta):\ |\operatorname{Re}\lambda|\le\delta\}$.

В ходе применения метода ВКБ (см. [4, 5]) роль фазового интеграла в рассматриваемой задаче играет функция

$$S(z_0,z;\lambda)=e^{i\pi/4}\int_{z_0}^{z}\sqrt{Q_\kappa(\zeta)-\lambda}\,d\zeta,$$

а локализация собственных значений проводится (ср. [6]) в терминах эллиптических интегралов

$$\Phi(\lambda)=S(\alpha,1;\lambda),\quad \Psi(\lambda)=S(\alpha,\beta;\lambda),$$
$$\Theta(\lambda)=S(1,-1;\lambda),$$

где $\alpha=\alpha(\lambda;\kappa)$ и $\beta=\beta(\lambda;\kappa)$ — точки поворота уравнения (1). При $\kappa<0$ ветвь $\alpha(\lambda;\kappa)$ функции $Q_\kappa^{-1}(\lambda)$ задаётся условием $\alpha(0;\kappa)=0$ и продолжается аналитически в $\mathbb{C}_\lambda$ с разрезами $K_\pm+\mathbb{R}_\pm$, где $K_\pm=\pm\dfrac{2(1-\kappa)^{3/2}}{3\sqrt{6|\kappa|}}$; ветвь $\beta(\lambda;\kappa)$ определяется в плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ с разрезом $K_++\mathbb{R}_+$ и выделяется условием $\operatorname{Re}\beta(\lambda;\kappa)\ge 0$. В случае $\kappa>0$ однозначная ветвь $\alpha(\lambda;\kappa)=-\overline{\beta(-\bar\lambda;\kappa)}$ функции $Q_\kappa^{-1}(\lambda)$ определяется в $\mathbb{C}_\lambda$ с разрезом $iK_-+i\mathbb{R}_+$ и выделяется условиями $\alpha(+0;\kappa)=0$ и $\operatorname{Re}\alpha(\lambda;\kappa)\ge 0$. В правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ ветвь

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

* *E-mail: ststepin@mail.ru*

$\alpha(\lambda;\kappa)$ непрерывно зависит от $\kappa\in[-1,1]$, причём $\alpha(\lambda;0):=\lambda$.

Вычисление матриц Стокса, отвечающих обходам вокруг точек поворота $\alpha$ и $\beta$, позволяет (ср. [7]) построить фундаментальную систему решений уравнения (1) с ВКБ-асимптотиками в точках $z=\pm1$ и найти с надлежащей точностью соответствующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$, нули которого являются собственными значениями задачи. В случае $\kappa\in\left[-\frac{1}{5},\kappa_0\right]$ при $\lambda\in\mathbb{C}_+$ достаточно совершить один обход вокруг точки поворота $\alpha(\lambda;\kappa)$, что даёт для характеристического определителя асимптотическую формулу

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=\exp\{\varepsilon^{-1/2}\Theta(\lambda)\}(1+O(\sqrt{\varepsilon}))-\\-\exp\{-\varepsilon^{-1/2}\Theta(\lambda)\}(1+O(\sqrt{\varepsilon}))-\\-i\exp\{-\varepsilon^{-1/2}(2\Phi(\lambda)+\Theta(\lambda))\}(1+O(\sqrt{\varepsilon})).\end{aligned}\tag{3}$$

При этом предельный спектральный комплекс $\Gamma(\kappa)$ топологически эквивалентен (ср. [8]) комплексу $\Gamma(0)$ и представляет собой симметричное относительно $i\mathbb{R}$ ориентированное дерево, концевые вершины которого суть значения $Q_\kappa(\pm1)$. Спектр задачи (1), (2) в $\mathbb{C}_+$ при малых $\varepsilon>0$ сосредоточен вблизи допускающей параметризацию $b=f(a)$ кривой $\gamma:=\{\operatorname{Re}\Phi(\lambda)=0\}$.

Теорема 1. *При* $\kappa\in\left[-\frac{1}{5},\kappa_0\right]$ *для произвольного* $\delta>0$ *существуют* $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\delta)>0$ *и* $C^{(1)}(\delta)>0$ *такие, что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ *спектр задачи* (1), (2) *в области* $\Pi_+(\delta)$ *состоит из простых собственных значений, находящихся в* $C^{(1)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях точек* $\lambda_n^{(1)}\in\gamma$, *занумерованных согласно правилу квантования*

$$\Phi\left(\lambda_n^{(1)}\right)=i\sqrt{\varepsilon}\pi\left(n-\frac{1}{4}\right),\ n\in\mathbb{Z},$$

*а в области* $\Pi_0(\delta)$ — *расположен также и в* $C^{(1)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях принадлежащих* $i\mu+i\mathbb{R}_-$ *нулей функции* $\sin(i\varepsilon^{-1/2}\Theta(\lambda))$, *где* $\operatorname{Re}\Phi(i\mu)=0$.

При $\kappa=\kappa_0$ изменяется (ср. [9]) топологический тип предельной спектральной конфигурации так, что для $\kappa>\kappa_0$ у дерева $\Gamma(\kappa)$ появляется дополнительное вертикальное ребро $[i\mu,iK_-]$. Критическое значение параметра деформации определяется условием $\mu(\kappa)=K_-$, т.е. при $\kappa=\kappa_0$ точка $iK_-$ бифуркации корней $\alpha(\lambda,\kappa)$ и $\beta(\lambda,\kappa)$ уравнения $Q_\kappa(z)=\lambda$ является узлом $\Gamma(\kappa)$.

Теорема 2. *Если* $\kappa\in(\kappa_0,1]$, *то для произвольного* $\delta>0$ *найдутся* $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\delta)>0$ *и* $C^{(2)}(\delta)>0$ *такие, что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ *спектр задачи* (1), (2) *в области* $\Pi_+(\delta)$ *исчерпывается однократными собственными значениями, находящимися в* $C^{(2)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях корней* $\lambda_n^{(1)}\in\gamma$ *уравнения* $\cos(i\varepsilon^{-1/2}\Phi(\lambda)+\frac{\pi}{4})=0$. *В области* $\Pi_0(\delta)$ *точки спектра задачи* (1), (2) *для* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ *локализованы также и в* $C^{(2)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях нулей* $\lambda_n^{(2)}\in[i\mu,iK_-]$ *функции* $\cos(i\varepsilon^{-1/2}\Psi(\lambda))$, *занумерованных в соответствии с правилом квантования*

$$\Psi\left(\lambda_n^{(2)}\right)=i\sqrt{\varepsilon}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right),\ n\in\mathbb{Z},$$

*и, кроме того, корней уравнения* $\sin(i\varepsilon^{-1/2}\Theta(\lambda))=0$, *расположенных на* $i\mathbb{R}_-$ *ниже точки* $i\infty$.

При $\kappa>\kappa_0$ и $\kappa<-\frac{1}{5}$ для продолжения ВКБ-асимптотик решений уравнения (1) из точки $z=-1$ в точку $z=1$ необходимо совершить два обхода точек поворота $\alpha(\lambda;\kappa)$ и $\beta(\lambda;\kappa)$, причём в первом случае оба они делаются по часовой стрелке, а во втором один — по, а другой — против. В результате в асимптотических представлениях характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ появляются дополнительные по сравнению с (3) слагаемые, а именно, в первом случае

$$-i\exp(\varepsilon^{-1/2}(2\Phi(\lambda)-2\Psi(\lambda)+\Theta(\lambda)))(1+O(\sqrt{\varepsilon}))$$

и, соответственно, во втором

$$\begin{aligned}-i\exp(\varepsilon^{-1/2}(2\Psi(\lambda)-2\Phi(\lambda)-\Theta(\lambda)))(1+O(\sqrt{\varepsilon}))+\\+\exp(\varepsilon^{-1/2}(2\Psi(\lambda)+\Theta(\lambda)))(1+O(\sqrt{\varepsilon})).\end{aligned}$$

Получающиеся при этом формулы согласуются с (3) в том смысле, что общая область их применимости непрерывно деформируется по параметру $\kappa$.

При $\kappa<-\frac{1}{5}$ у потенциала $Q_\kappa(z)$ имеются две критические точки на $[-1,1]$, что приводит к возникновению у предельной спектральной конфигурации $\Gamma(\kappa)$ двух дополнительных звеньев, ответвляющихся от основных боковых рёбер. При малых $\varepsilon>0$ спектр задачи (1), (2) в $\mathbb{C}_+$ состоит из трёх серий собственных значений, которые концентрируются вблизи кривых

$$\gamma_1:=\{\operatorname{Re}\Phi(\lambda)=0,\ \operatorname{Re}\Psi(\lambda)<0\},$$

$$\gamma_2:=\{\operatorname{Re}\Psi(\lambda)=0,\ \operatorname{Re}\Phi(\lambda)<0\},$$

$$\gamma_3:=\{\operatorname{Re}\Phi(\lambda)=\operatorname{Re}\Psi(\lambda)>0\}.$$

Теорема 3. *В случае* $\kappa\in\left[-1,-\frac{1}{5}\right)$ *для произвольного* $\delta>0$ *существуют* $\varepsilon_3=\varepsilon_3(\delta)>0$ *и* $C^{(3)}(\delta)>0$ *такие, что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3)$ *все собственные значения задачи* (1), (2), *расположенные в* $\Pi_+(\delta)$, — *простые и находятся в* $C^{(3)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях нулей*

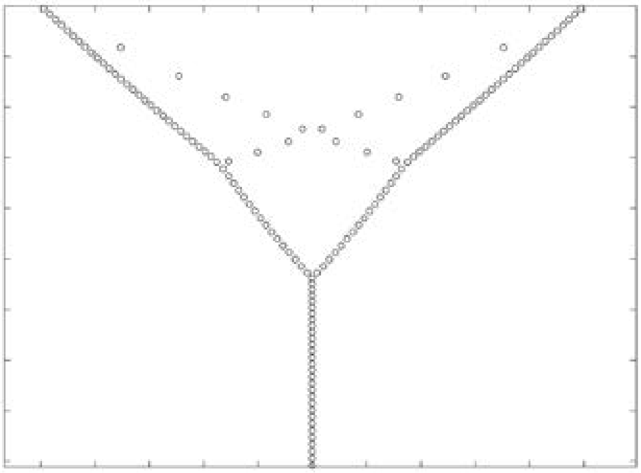

**Рис. 1.**

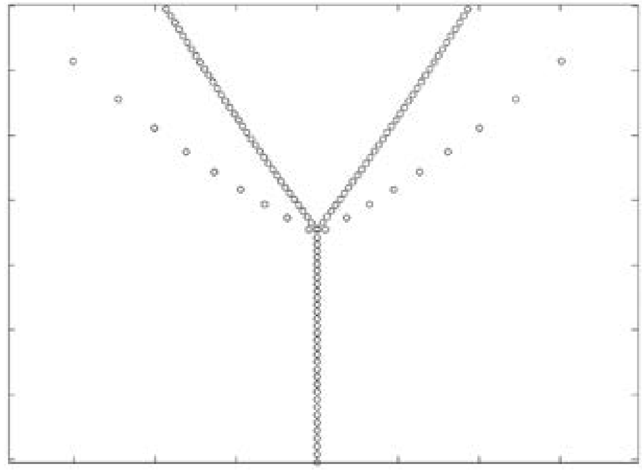

**Рис. 2.**

$\lambda_n^{(1)} \in \gamma_1$ *и* $\lambda_n^{(2)} \in \gamma_2$ *функций* $\cos\left(i\varepsilon^{-1/2}\left(\Phi(\lambda)+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *и а также корней* $\lambda_n^{(3)} \in \gamma_3$ *уравнения*

$$\mathrm{tg}(i\varepsilon^{-1/2}(\Psi(\lambda) - \Phi(\lambda))) = 1.$$

Рёбра $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ представляют собой графики монотонных функций $b = f(a)$ и соединяют узел их сочленения $\Lambda(\kappa)$ с вершинами $\Gamma(\kappa) \cap \mathbb{C}_+$. При этом численные эксперименты обнаруживают следующий эффект типа приближённого закона сохранения: узел $\Lambda(\kappa)$ расположен так, что $\mathrm{Re}\,\Lambda(\kappa)$ делит отрезок между концевыми вершинами $Q_\kappa(1)$ и $K_+$ в отношении, удовлетворяющем для $\kappa = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ оценке

$$\left|\frac{\mathrm{Re}\,\Lambda(\kappa) - Q_\kappa(1)}{K_+ - \mathrm{Re}\,\Lambda(\kappa)} - 2{,}1\right| < 0{,}02$$

На рисунках 1 и 2 приведены результаты численного анализа асимптотического распределения собственных значений задачи (1), (2) с потенциалами рассматриваемого семейства $Q_\kappa(z)$ соответственно в случаях $\kappa = -2$, когда $Q_\kappa(\pm 1) = K_\mp$, и $\kappa = \frac{1}{1-2\tau}$, где $\tau \approx 0{,}622$ — корень уравнения $27(\tau-1)^2 = 16\tau^3$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birkhoff G.D.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. № 10. P. 681–700.
2. *Маслов В.П.* // ДАН. 1954. Т. 94. № 4. С. 623–626.
3. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* // ЖВМиМФ. 1964. Т. 4. № 2. С. 267–277.
4. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
5. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
6. *Степин С.А.* // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 219–220.
7. *Степин С.А., Аржанов А.А.* // ДАН. 2001. Т. 378. № 1. С. 18–21.
8. *Степин С.А., Титов В.А.* // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 27–30.
9. *Есина А.И., Шафаревич А.И.* // Мат. заметки. 2010. Т. 88. № 2. С. 229–248.

# SPECTRAL DEFORMATION IN A PROBLEM OF SINGULAR PERTURBATION THEORY

**S. A. Stepin, V. V. Fufaev**

Presented by Academician of the RAS Ya.G. Sinai August 23, 2018

Received September 20, 2018

Quasi-classical asymptotic behavior of the spectrum of a non-self-adjoint Sturm—Liouville problem is studied in the case of a one-parameter family of potentials being third-degree polynomials. For this problem, the phase-integral method is used to derive quantization conditions characterizing the asymptotic distribution of the eigenvalues and their concentration near edges of the limit spectral complex. Topologically different types of limit configurations are described, and critical values of the deformation parameter corresponding to type changes are specified.

*Keywords:* WKB asymptotics, quantization condition, spectral complex.