

УДК 532.517.4

К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРАНДТЛЯ 2-го РОДА

Н. В. Никитин, В. О. Пиманов, Н. В. Попеленская*

Представлено академиком РАН А.Г. Куликовским 25.06.2018 г.

Поступило 23.07.2018 г.

Численно исследовано турбулентное течение в трубе квадратного сечения. Изучены концентрированные продольные вихри, ответственные за возникновение вторичных течений. Показано, что продольные вихри образуются в результате нелинейного взаимодействия турбулентных пульсаций, в которых пульсации продольной компоненты завихренности специальным образом согласованы по фазе с пульсациями продольной компоненты скорости. Дана физическая интерпретация вскрытого механизма.

Ключевые слова: турбулентные течения, уравнения Навье–Стокса, прямое численное моделирование, вторичные течения Прандтля 2-го рода, турбулентные пульсации, напряжения Рейнольдса.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524844420-425>

ВВЕДЕНИЕ

Одно из интересных и важных с практической точки зрения проявлений турбулентности — способность вызывать так называемые вторичные течения — организованные движения жидкости в плоскости, перпендикулярной направлению основного потока. Такие течения называются вторичными течениями Прандтля 2-го рода в отличие от вторичных течений 1-го рода, возникающих в искривлённых потоках под действием центробежных эффектов как в ламинарных, так и в турбулентных течениях [1]. Вторичные течения вносят заметный вклад в процессы поперечного переноса, однако сложны для модельного описания [2]. Такое положение дел объясняется, в частности, отсутствием понимания физических механизмов возникновения вторичных течений. В пространственно-однородных течениях вторичные течения однозначно описываются распределением продольной компоненты завихренности, уравнение для которой содержит источниковый член, отражающий действие турбулентных пульсаций. Традиционно источниковый член записывается в виде градиентов напряжений Рейнольдса, что представляется удобным для использования в рамках полуэмпирических моделей турбулентности. В данной работе на примере

течения в трубе квадратного сечения показано, что такое представление скрывает действующие физические механизмы и не подходит для моделирования. Предлагается альтернативное представление источникового члена, даётся объяснение механизма возникновения концентрированных продольных вихрей.

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в длинной прямой трубе квадратного поперечного сечения: $0 < y, z < 2h$ (x — координата вдоль потока, y, z — декартовы координаты в поперечной плоскости). Течение описывается уравнениями Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости, p — давление, t — время, ρ, ν — плотность и вязкость жидкости. Вдоль трубы используется условие периодичности, на стенках ставятся условия прилипания. Для численного решения задачи применяется алгоритм [3]. Расчёты проведены при числе Рейнольдса $Re = hU_b / \nu = 2200$ (U_b — средняя расходная скорость). Длина расчётной области $L_x = 10h$; расчётная сетка размером 128^3 равномерна по x и неравномерна (со сгущением узлов у стенок трубы) по y, z . В пристенных единицах $L_x^+ = 1500$, а размер ячеек сетки $h_x^+ = 12$ в

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

* E-mail: aero.natap@mail.ru

продольном направлении и $0,9 < h_y^+, h_z^+ < 3,6$ в поперечной плоскости (верхний индекс “+” обозначает нормировку величин на пристенные масштабы скорости $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ и длины $l_\tau = \nu / u_\tau$, τ_w — среднее по периметру трение на стенках трубы).

Результаты расчёта хорошо согласуются с результатами [4], полученными при близком значении Re, по всем представленным в этой работе характеристикам. В частности, значения коэффициента сопротивления $f = 8(u_\tau / U_b)^2$ в двух расчётах составляют 0,0371 и 0,037. Далее приведены распределения средних величин, которые рассчитываются после выхода решения на статистически стационарный режим осреднением по времени, координате x и всем симметричным точкам в плоскости y, z. Осреднение обозначается чертой сверху.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рисунке 1а изображены изолинии продольной компоненты средней скорости в плоскости (y, z). С учётом симметрии средних характеристик здесь и далее приводится только одна четверть поперечного сечения. В согласии с известными данными экспериментов [5] и численных расчётов [4, 6] распределение скорости демонстрирует характерные выпуклости, направленные в сторону углов. Это обусловлено наличием вторичного течения с максимальной скоростью около 1,8% от U_b , линии тока которого изображены на рис. 1б. Вторичное течение однозначно описывается распределением средней продольной завихренности

$\Omega_x = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}$ (V, W — компоненты скорости вторичного течения), изолинии которой приведены на рис. 1в.

Уравнение для Ω_x можно записать в следующем виде:

$$V \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial z^2} \right) = S. \quad (2)$$

В левой части (2) собраны конвективные и вязкие члены, а в правой имеется источниковый член S, отражающий действие турбулентных пульсаций. Можно показать, что при $S = 0$ любое движение в поперечной плоскости в конечном итоге затухает. Таким образом, при отсутствии турбулентных пульсаций установление стационарных вторичных течений в прямых длинных трубах невозможно. Традиционно источниковый член принято представлять в виде градиентов напряжений Рейнольдса:

$$S = S_n + S_s, \quad S_n = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}), \quad (3)$$

$$S_s = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \overline{v'w'}.$$

Здесь v', w' — пульсации поперечных компонент скорости; S_n отражает эффект анизотропии нормальных напряжений Рейнольдса, S_s — действие сдвиговых напряжений. Распределение всех членов уравнения (2) изображено на рис. 2. Показана наиболее интересная угловая область $0 < y/h, z/h < 0,6$. В каждой точке сумма трех

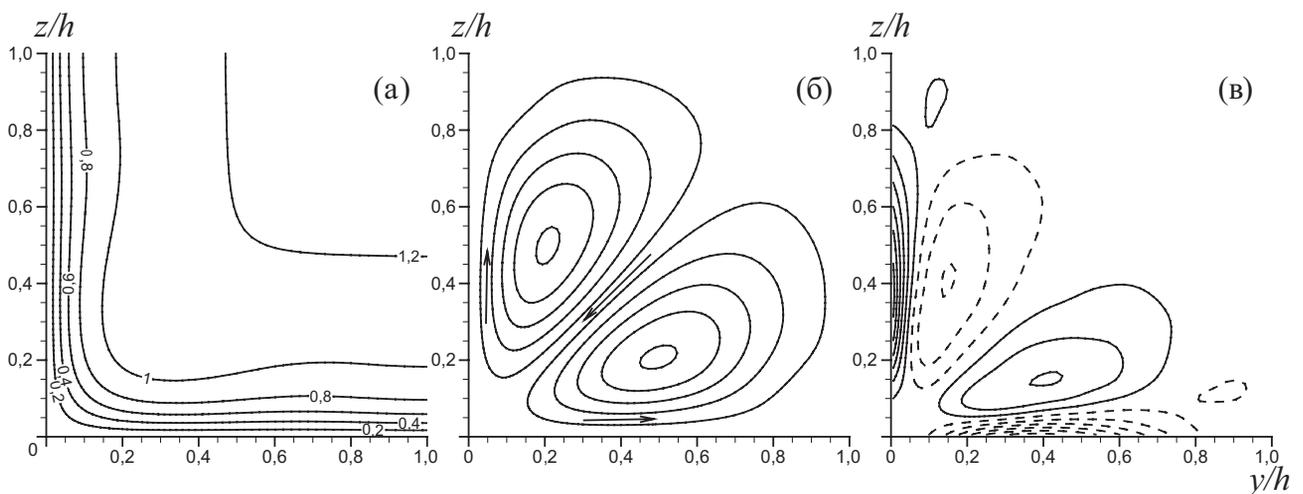


Рис. 1. Распределение средних характеристик: а — средняя скорость $\frac{U}{U_b}$; б — линии тока вторичного течения (стрелками показано направление движения); в — продольная завихренность (отрицательные значения показаны штриховыми линиями).

слагаемых, представленных на рис. 2, равна нулю. Источниковый (турбулентный) и вязкий член практически по всему сечению уравнивают друг друга, принимая максимальные (противоположные по знаку) значения в окрестности точек $(y/h; z/h) = (0,15; 0,07)$ и $(0,07; 0,15)$. Действие конвективных членов совпадает по знаку с действием турбулентности, но значительно уступает по величине.

Распределения двух слагаемых (3) изображены на рис. 3а, б. В области максимальных значений $|S|$ основной вклад вносит S_n , вклад S_s невелик и противоположен по знаку. Однако при удалении от ближайшей стенки (например, в районе $(y/h; z/h) = (0,25; 0,1)$) уже S_s определяет знак всего источникового члена. Ближе к стенке оба слагаемых вырастают до значений, вдвое превышающих максимум $|S|$, на 90% нейтрализуя друг друга.

Взаимная нейтрализация двух слагаемых выражения (3) указывает на то, что представление S в виде градиентов напряжений Рейнольдса скрывает действующие физические механизмы образования концентрированных продольных вихрей. Кроме того, такое представление неудачно для использования в приближённых моделях, поскольку требует правильного воспроизведения двух близких по значению и противоположных по знаку величин. Отметим, что взаимная нейтрализация двух слагаемых (3) отмечается и в других течениях, в частности в трубе эллиптического сечения [7].

В недавних работах [8, 9] показано, что для оценки генерации продольной завихренности в локализованных турбулентных структурах в круглых трубах более продуктивным оказывается альтернативное представление источника S в (2) в виде суммы конвективных и деформационных членов:

$$S = -u' \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} - v' \frac{\partial \omega'_x}{\partial y} - w' \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} + \omega'_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \omega'_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \omega'_z \frac{\partial u'}{\partial z}. \quad (4)$$

В области формирования продольных вихрей определяющий вклад в S даёт сумма первого и четвёртого слагаемых в правой части (4), описывающих взаимодействие пульсаций продольных компонент скорости и завихренности. В рассматриваемом случае, включающем осреднение по x , эти два слагаемых в точности совпадают. Таким образом, для их суммы получаем выражение

$$S_{u\omega} = 2\overline{\omega'_x \frac{\partial u'}{\partial x}}. \quad (5)$$

Распределение $S_{u\omega}$ показано на рис. 3в. Как видно, $S_{u\omega}$ в значительной степени и по форме и по значению воспроизводит распределение всего источникового члена, изображённое на рис. 2в.

Пульсации продольных компонент скорости и завихренности оказываются согласованными по фазе таким образом, что ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$ положительно коррелированы в области концентрации

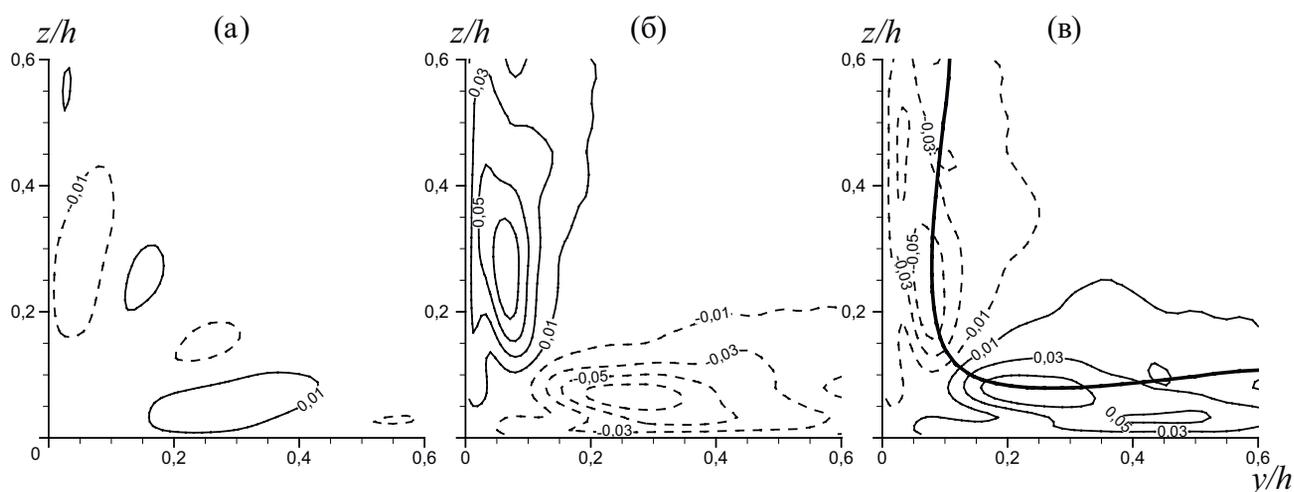


Рис. 2. Распределение членов уравнения (2): а — конвективные члены $-v' \frac{\partial \omega'_x}{\partial y} - w' \frac{\partial \omega'_x}{\partial z}$; б — вязкий член $v \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial z^2} \right)$; в — источниковый член S . Все величины нормированы на $\left(\frac{U_b}{h} \right)^2$. Отрицательные значения показаны штриховыми линиями. На панели (в) жирная линия $U: C_f = 0$ (8).

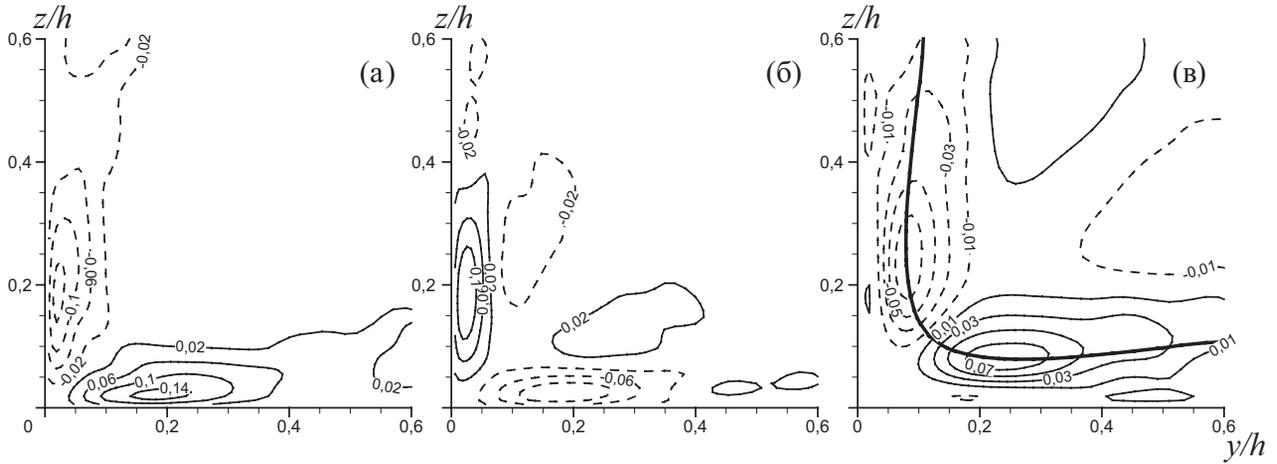


Рис. 3. Распределение составляющих источникового члена S : а — S_n ; б — S_s ; в — S_{uw} (5). Все величины нормированы на $(U_b/h)^2$. Отрицательные значения показаны штриховыми линиями. На панели (в) жирная линия $U: C_f = 0$ (8).

продольного вихря с положительным Ω_x и отрицательно коррелированы в области продольного вихря с отрицательным Ω_x . Для выявления причины возникновения этих корреляций обратимся к уравнению для пульсационной составляющей продольной компоненты завихренности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = & -U \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} - V \frac{\partial \omega'_x}{\partial y} - W \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} - \\ & -v' \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} - w' \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} + \Omega_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \\ & + \Omega_z \frac{\partial u'}{\partial z} + \omega'_y \frac{\partial U}{\partial y} + \omega'_z \frac{\partial U}{\partial z} + \nu \Delta \omega'_x + N. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, N содержит квадратичные относительно пульсаций члены. Слагаемые в правой части (6) отражают различные механизмы изменения продольной завихренности, включающие конвективный перенос, растяжение и деформацию вихревых линий. Оценка величины и фазы различных членов (6) на основании анализа результатов расчета показывает, что нелинейные члены N всюду невелики, а максимальный вклад в корреляцию пульсаций ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$ вносят слагаемые $-U \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}$ и $\Omega_x \frac{\partial u'}{\partial x}$. Запишем уравнение для ω'_x в следующем виде:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = -U \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + \Omega_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \dots \quad (7)$$

Второе слагаемое в правой части отражает появление пульсаций продольной завихренности вследствие продольной деформации жидкой частицы в области концентрации Ω_x . Оно

стремится произвести ω'_x , пропорциональное Ω_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$, что обеспечило бы корреляцию между ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$ в нужном месте (в области концентрации Ω_x) и нужного знака. Первое слагаемое, описывающее конвективный снос средним течением, однако, способно нарушить необходимое согласование фаз пульсаций ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$.

Известно, что возмущения в пристенном слое турбулентного потока $d^+ < 10$ (здесь d — расстояние от стенки) имеют организованное волновое поведение, обладая почти постоянной скоростью сноса $C_f^+ \approx 10$ [10]. В каждой точке поперечного сечения определим фазовую скорость распространения возмущений вниз по потоку как скорость подвижной системы отсчёта, в которой изменение амплитуды возмущения происходит медленнее всего. В системе отсчёта $x_1 = x - C_f t$ скорость изменения величины $f(t, x)$ определяется выражением

$$\text{ем } \frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial t} + C_f \frac{\partial f}{\partial x}. \text{ Отыскивая точку минимума } \left(\frac{\partial f}{\partial t_1} \right)^2 \text{ по параметру } C_f, \text{ получим}$$

$$C_f = - \frac{\overline{\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}. \quad (8)$$

Рассчитанная по (8) скорость сноса возмущений почти постоянна $C_f \approx 9$ в пристенном слое $d^+ < 10$ всюду по периметру и увеличивается с

удалением от стенки. При этом $U - C_f < 0$ вблизи стенки и $U - C_f > 0$ в ядре потока. Переходя в (7) в подвижную систему отсчёта, получаем

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = -(U - C_f) \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + \Omega_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \dots \quad (9)$$

Отсюда видно, что конвективный член не нарушает согласования фаз между ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$ в области критического слоя, где выполняется равенство $U - C_f = 0$. Линия в плоскости поперечного сечения, вдоль которой выполняется это равенство, изображена на рис. 2в и 3в. Из рисунков видно, что и $S_{\omega\omega}$, и весь источниковый член S сосредоточены вдоль критического слоя. Это ещё раз подтверждает, что источник порождения средней продольной завихрённости связан именно с корреляцией ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$, возникающей за счёт продольной деформации жидких частиц в области концентрации Ω_x .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе путём прямого численного моделирования турбулентного течения в трубе квадратного сечения выявлен механизм возникновения концентрированных продольных вихрей, вызывающих вторичное течение. Продольные вихри образуются в результате нелинейного взаимодействия турбулентных пульсаций, которые организуются таким образом, что пульсации ω'_x оказываются согласованными по фазе с пульсациями $\frac{\partial u'}{\partial x}$. Физически это соответствует возникновению пульсаций продольной завихрённости при продольной деформации жидкой частицы, обладающей продольной завихрённостью Ω_x . Таким образом, нужная согласованность фаз колебаний ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$ возникает именно в областях концентрации Ω_x . Подтверждением действительности вскрытого механизма служит то, что концентрация источникового члена в уравнении для средней продольной завихрённости наблюдается в области критического слоя, где местная

скорость среднего течения совпадает со скоростью сноса возмущений вниз по потоку, что является необходимым условием сохранения нужного согласования фаз колебаний ω'_x и $\frac{\partial u'}{\partial x}$.

Ранее аналогичный механизм самоподдержания концентрированных продольных вихрей был выявлен в локализованных структурах в круглых трубах [8, 9]. Показано его присутствие в ряде так называемых инвариантных трёхмерных решений уравнений Навье—Стокса в круглой трубе и плоском канале [11]. В настоящее время получены определённые свидетельства того, что аналогичный механизм ответствен за образование квазипродольных вихрей в развитых турбулентных пристенных течениях, что является причиной возникновения полосчатых структур и, в конечном итоге, причиной самоподдержания турбулентных пульсаций. Таким образом, имеются основания предполагать, что выявленный механизм является универсальным механизмом возникновения продольных вихрей в турбулентных течениях.

Источник финансирования. Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-01-00140-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bradshaw P. // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987. № 19. P. 53–74.
2. Speziale C.G. // Int. J. Eng. Sci. 1982. V. 20. № 7. P. 863–872.
3. Nikitin N. // J. Comput. Phys. 2006. V. 217. P. 759–781.
4. Gavrilakis S. // J. Fluid Mech. 1992. V. 244. P. 101–129.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
6. Никитин Н.В. // ДАН. 1997. Т. 353. № 3. С. 338–342.
7. Воронова Т.В., Никитин Н.В. // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 59–70.
8. Никитин Н.В., Пиманов В.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 64–75.
9. Никитин Н.В., Пиманов В.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 68–76.
10. Kim J., Hussain F. // Phys. Fluids. 1993. A5. P. 695–706.
11. Пиманов В.О. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 4. С. 47–53.

MECHANISM OF FORMATION OF PRANDTL'S SECONDARY FLOWS OF THE SECOND KIND

N. V. Nikitin, V. O. Pimanov, N. V. Popelenskaya

Presented by Academician of the RAS A.G. Kulikovsky June 25, 2018

Received July 23, 2018

Turbulent flow in a tube of square cross section is investigated numerically. The concentrated longitudinal vortices responsible for the occurrence of secondary flows are studied. It is shown that the longitudinal vortices are formed as a result of nonlinear interaction of turbulent pulsations in which the pulsations of the longitudinal component of vorticity are specially adjusted in phase with the pulsations of the longitudinal velocity component. A physical interpretation of this mechanism is given.

Keywords: turbulent flows, Navier–Stokes equations, direct numerical simulation, Prandtl's secondary flows of the second kind, turbulent pulsations, Reynolds stresses.