ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 4, с. 426–430

МЕХАНИКА

УДК 519.63, 532.3

О ПРИМЕНЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГРИНА–НАГДИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ОНДУЛЯРНЫМИ БОРАМИ

В. В. Остапенко

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 04.07.2018 г.

Поступило 23.07.2018 г.

Базисные законы сохранения модели Грина–Нагди теории мелкой воды выводятся из двумерных интегральных законов сохранения массы и полного импульса, описывающих плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости над горизонтальным дном. Этот вывод основан на понятии локального гидростатического приближения, которое обобщает понятие длинноволнового приближения и применяется для анализа применимости уравнений Грина–Нагди при моделировании волновых течений жидкости с ондулярными борами.

Ключевые слова: ондулярные боры, модель Грина–Нагди, локальное гидростатическое приближение.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524844426-430

1. Длинноволновое приближение (ДВП) [1]

$$\varepsilon = H^2 / L^2 \ll 1, \tag{1}$$

где H – характерная глубина потока, а L – характерная длина поверхностных волн, широко применяется при моделировании различных течений жидкости и газа, например течений воды в открытых руслах или в прибрежных зонах морей, плёночных течений, крупномасштабных газодинамических течений в атмосферах планет. Различные модели теории мелкой воды, описывающие такие течения, выводятся из уравнений неразрывности и Эйлера путём разложения по малому параметру ДВП ε. При этом из неравенства (1) следует [2], что пространственная производная глубины $h(x, t)$ плоскопараллельного потока в таких моделях удовлетворяют условию

$$|h_x| \le O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{2}$$

Однако уравнения теории мелкой воды используются не только для описания медленно меняющихся течений с гладкой свободной поверхностью, таких как паводковые течения в реках, они также широко применяются для моделирования быстро протекающих волновых процессов, связанных с распространением гидравлических боров, возникающих при разрушении плотины гидросооружения [2, 3] или при выходе крупных морских волн типа цунами на мелководье и наклонный берег [4]. Для описания таких течений в рамках первого приближения по параметру ε эти уравнения используются в форме гиперболической системы законов сохранения (классической [5] в случае потенциального течения и обобщённой [6] в случае вихревого течения), допускающей разрывные решения с ударными волнами, которыми моделируются гидравлические боры реального течения. В случае потенциального течения второе приближение теории мелкой воды приводит к модели Грина–Нагди [7], предназначенной для моделирования волновых течений с ондулярными борами.

При расчёте гидравлического бора по гиперболическим моделям [5, 6] на фронте ударной волны $hx = \infty$, а при его расчёте по дисперсионной модели [7] на фронте бора $h_x \ge O(1)$, что противоречит условию ДВП (2). Для разрешения этого противоречия в рамках классической теории мелкой воды необходимо предполагать [8], что ударными волнами описываются переходные области, ширина которых l много больше характерной глубины потока и одновременно много меньше характерной длины волн, т.е. $H \ll l \ll L$. Однако натурные наблюдения и результаты лабораторного моделирования показывают [2, 3], что поперечные размеры l реальных гидравлических боров сравнимы с

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

характерными глубинами рассматриваемых потоков, т.е. $l = O(H)$, в силу чего соответствующие им переходные области не удовлетворяют условию ДВП $H \ll l$.

Несмотря на это сравнение разрывных решений классических уравнений первого приближения теории мелкой воды [5] с результатами лабораторных экспериментов в задачах о разрушении плотины над ровным дном [2, 3] (включая случай сухого русла в нижнем бьефе [8]), над уступом дна [9], над неровным дном типа шельфа [10], а также в канале со ступенькой дна в нижнем бьефе [11] показывает, что теория достаточно хорошо согласуется с экспериментом по возможным типам волн, по скорости их распространения, а также по асимптотическим и осреднённым по пространству глубинам за фронтами прерывных волн. В то же время численные расчёты задачи о разрушении плотины по дифференциальным уравнениям модели Грина–Нагди не позволяют эффективно воспроизвести последовательность затухающих поверхностных волн за фронтом ондулярного бора [12, 13]. Амплитуда и длина этих волн, получаемые в численных расчётах, существенно отличаются от тех, которые наблюдаются в лабораторных экспериментах [2, 3].

В работах [14, 15] для обоснования применения первого приближения теории мелкой воды при моделировании волновых течений с гидравлическими борами базисные законы сохранения этого приближения были получены из двумерных интегральных законов сохранения массы и полного импульса, описывающих плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости над горизонтальным дном. При этом в [15] было использовано понятие гидростатического приближения, которое является локальным и обобщает понятие ДВП. В настоящей работе локальное гидростатическое приближение применяется для вывода базисных законов сохранения модели Грина–Нагди второго приближения теории мелкой воды и анализа применимости этой модели для численного расчёта волновых течений жидкости с ондулярными борами (рис. 1).

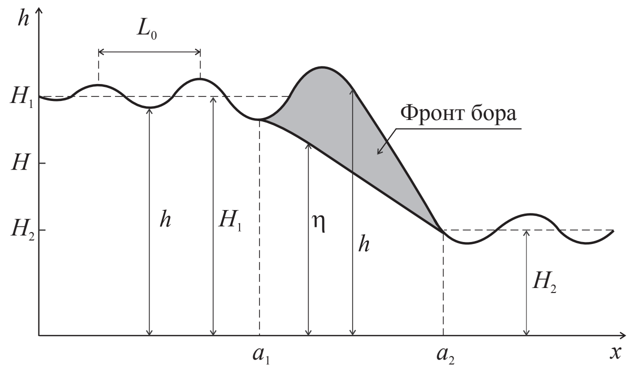

Рис. 1. Ондулярный бор, распространяющийся в положительном направлении оси x.

2. Рассмотрим плоскопараллельное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с горизонтальным дном. Ось x декартовой системы координат $\{x, y, z\}$ расположим на дне канала параллельно его боковым стенкам, а ось z направим вертикально вверх перпендикулярно дну канала. В такой системе координат рассматриваемое течение не зависит от координаты y и описывается глубиной жидкости $h(x, t)$, а также её горизонтальной $u(x, z, t)$ и вертикальной $w(x, z, t)$ скоростями, направленными соответственно по осям x и z. Течение жидкости происходит в поле силы тяжести, создающем ускорение $\mathrm{g} = (0, 0, -g)$, направленное вертикально вниз.

Зафиксируем пространственно-временную область

$$V = \{(x, z, t):\ x_1(t) \le x \le x_2(t),\ 0 \le z \le h(x,t),\ t_1 \le t \le t_2\}, \qquad (3)$$

которую на временном интервале $[t_1, t_2]$ занимает жидкость в канале между подвижными вертикальными плоскостями $x_1(t) < x_2(t)$. Закон сохранения массы жидкости в области (3) имеет вид

$$\int_{x_1}^{x_2} hdx \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^h udz \right) \bigg|_{x_1}^{x_2} dt = 0. \qquad (4)$$

Вводя обозначение

$$U(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)dz \qquad (5)$$

для осреднённой по глубине горизонтальной скорости жидкости, уравнение (4) можно записать в виде интегрального закона сохранения массы для модели мелкой воды

$$\int_{x_1}^{x_2} h \bigg|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (hU) \bigg|_{x_1}^{x_2} dt = 0. \qquad (6)$$

Отметим, что при выводе этого закона сохранения нам не потребовались какие-либо ограничения на параметры рассматриваемого течения. В случае гладких решений закон сохранения (6) можно записать в дифференциальной форме

$$h_t + (hU)_x = 0. \qquad (7)$$

С учётом формулы (5) закон сохранения горизонтальной составляющей импульса жидкости в области (3) имеет вид

$$\int_{x_1}^{x_2}(hU)dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^h\left(u^2+p\right)dz\right)\Big|_{x_1}^{x_2}dt=0, \tag{8}$$

где $p = p(x, z, t)$ — удельное давление. Преобразуем интегралы по вертикальной координате z с учётом уравнения неразрывности, потенциальности течения и уравнения Эйлера для вертикальной компоненты скорости жидкости

$$\text{а) } u_x + w_z = 0,$$
$$\text{б) } u_z - w_x = 0, \tag{9}$$
$$\text{в) } \dot{w} + p_z + g = 0,$$

где $\dot{w} = w_t + uw_x + ww_z$. Вводя обозначение $\tilde{u} = u - U$, с учётом потенциальности течения (9б) получаем

$$\int_0^h u^2 dz = hU^2 + \int_0^h \tilde{u}^2 dz = hU^2 + F,$$
$$F = \int_0^h\left(\int_{\xi(U)}^{\xi} w_x dz\right)^2 d\xi, \tag{10}$$

где $\xi(U) = \xi(U(x, t))$ — корень уравнения $u(x, \xi(U(x, t)), t) = U(x, t)$.

Используя уравнение Эйлера (9в), находим

$$\int_0^h p dz = \frac{gh^2}{2} + G, \quad G = \int_0^h\left(\int_\xi^h \dot{w} dz\right)d\xi. \tag{11}$$

Для вычисления интеграла G введём вспомогательную функцию

$$w_\alpha(x, t) = w(x, z_\alpha, t), \quad z_\alpha = \alpha h, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Применяя уравнение неразрывности (9а), формулу $u = U + \tilde{u}$ и недивергентную форму записи уравнения (7)

$$\dot{h} + hU_x = 0, \quad \dot{h} = h_t + Uh_x, \tag{12}$$

получаем

$$w_\alpha = \int_0^{z_\alpha} w_z dz = -\int_0^{z_\alpha} u_x dz =$$
$$= -\int_0^{z_\alpha}\left(U_x + \tilde{u}_x\right)dz = \alpha\dot{h} - \psi_\alpha,$$

где с учётом потенциальности течения (9б)

$$\psi_\alpha = \int_0^{z_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{\xi(U)}^{\xi} w_x dz\right)d\xi.$$

Отсюда следует, что интеграл G можно представить в виде

$$G = \int_0^h\left(\int_\xi^h \dot{w}_\alpha dz_\alpha\right)d\xi =$$
$$= \int_0^h\left(\int_\xi^h\left(\frac{z_\alpha \ddot{h}}{h} - \dot{\psi}_\alpha\right)dz_\alpha\right)d\xi = \frac{h^2\ddot{h}}{3} + \Psi, \tag{13}$$

где

$$\Psi = \int_0^h\left(\int_\xi^h \dot{\psi}_\alpha dz_\alpha\right)d\xi,$$
$$\ddot{h} = \dot{h}_t + U\dot{h}_x, \quad \dot{\psi}_\alpha = \psi_{\alpha t} + u\psi_{\alpha x} + w\psi_{\alpha z}.$$

3. Предположим, что рассматриваемое течение содержит изолированный ондулярный бор, распространяющийся в положительном направлении оси x (рис. 1), и фронт этого бора в момент времени t занимает область

$$W(t) = \{(x, z, t):\ a_1(t) < x < a_2(t), \quad \eta(x, t) \le z \le h(x, t)\}, \tag{14}$$

где $\eta(x, t) > 0$, $\eta(a_i(t), t) = h(a_i(t), t)$, $a_i'(t) > 0$. Будем полагать, что характерные глубины потока H_1 за фронтом бора и H_2 перед фронтом бора — величин одного порядка, т.е. $H_2 = O(H_1)$. С учётом этого характерную глубину всего течения зададим по формуле $H = (H_1 + H_2)/2$. Поскольку на фронте бора неравенство (2) не выполняется, то для такого течения невозможно корректно определить характерную длину L поверхностных волн, входящую в условие ДВП (1). Поэтому введём понятие локального гидростатического приближения (ЛГСП), в силу которого течение жидкости в точке $A = (x, z, t)$ удовлетворяет ЛГСП с малым параметром δ, если в этой точке выполнено неравенство

$$w^2(A)/C^2 < \delta \ll 1, \quad C = \sqrt{gH}. \tag{15}$$

Как показано в [15], понятие ЛГСП (15) обобщает понятие ДВП (1) на случай волновых течений с гидравлическими борами.

Возмущения потока, возникающие на фронте ондулярного бора, формируют последовательность затухающих поверхностных волн, распространяющихся за фронтом бора. Если характерная длина L_0 этих волн сравнима с характерной глубиной потока, т.е. $L_0 = O(H)$, то за фронтом бора образуется поверхностный слой жидкости, внутри которого условие ЛГСП не выполняется. Модель Грина–Нагди не позволяет эффективно воспроизводить структуру этих ондулярных волн, в силу чего такие течения более точно аппроксимируются базисными законами сохранения первого приближения теории мелкой воды [14, 15]. Поэтому далее будем предполагать, что характерная длина ондулярных волн $L_0 \gg H$ и условие ЛГСП (15) выполняется во всех точках жидкости $A \notin W(t)$.

Для приближённого моделирования рассматриваемого течения введём безразмерные переменные

$$x_* = \frac{\sqrt{\delta}}{H}x, \quad z_* = \frac{z}{H}, \; t_* = \frac{\sqrt{\delta}C}{H}t, \quad h_* = \frac{h}{H},$$
$$u_* = \frac{u}{C}, \quad p_* = \frac{p}{C^2}, \; w_* = \frac{w}{\sqrt{\delta}C}, \tag{16}$$

которые в результате подстановки $\delta = H^2/L^2$ переходят в безразмерные переменные ДВП [8, 15], где величину L можно рассматривать как характерную длину волн в областях перед и за фронтом ондулярного бора. Далее наряду с (16) будем использовать обозначение

$$U_* = \frac{1}{h_*}\int_0^{h_*} u_* dz_* = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{h}\int_0^h u dz\right) = \frac{U}{C} \tag{17}$$

для безразмерной горизонтальной скорости, осреднённой по глубине потока.

Можно показать, что законы сохранения (4), (6)–(8) не изменяются при записи в безразмерных переменных (16), (17), а уравнения (10), (11) и (13) принимают вид

$$\int_0^h u^2 dz = hU^2 + \delta^2 F,$$
$$\int_0^h p dz = \frac{h^2}{2} + \delta G, \quad G = \frac{h^2 \ddot{h}}{3} + \delta\Psi.$$

Это означает, что если боковые границы $x = x_i(t)$ области интегрирования (3) не пересекаются с областью (14), в которой расположен фронт бора, т.е. удовлетворяют одному из трёх условий:

$$1)\; a_2(t) < x_1(t), \quad 2)\; x_2(t) < a_1(t),$$
$$3)\; x_1(t) < a_1(t) < a_2(t) < x_2(t),$$

то из уравнения (8) с точностью $O(\delta^2)$ следует интегральный закон сохранения полного импульса для модели Грина–Нагди

$$\int_{x_1}^{x_2} (hU)\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\left(hU^2 + \frac{h^2}{2} + \delta\frac{h^2\ddot{h}}{3}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0, \tag{18}$$

Если хотя бы одна из боковых границ $x = x_i(t)$ пересекается с областью (14), то уравнение (18) в общем случае не аппроксимирует закон сохранения горизонтального импульса (8).

4. Следствием интегрального уравнения (18) в областях $x < a_1(t)$ и $x > a_2(t)$ вне фронта бора (14) является дифференциальная форма записи закона сохранения полного импульса

$$(hU)_t + \left(hU^2 + \frac{h^2}{2} + \frac{\delta h^2 \ddot{h}}{3}\right)_x = 0, \tag{19}$$

из которой с учётом закона сохранения массы (7) следует уравнение для изменения скорости жидкости в модели Грина–Нагди

$$U_t + \left(\frac{U^2}{2} + h\right)_x + \frac{\delta}{3h}\left(h^2\ddot{h}\right)_x = 0, \tag{20}$$

где с учётом уравнений (12)

$$\ddot{h} = h\left((U_x)^2 - U_{xt} - UU_{xx}\right).$$

Система уравнений (7), (20) была получена в [7] из уравнений неразрывности и Эйлера с учётом предположения о линейной зависимости вертикальной скорости жидкости w от координаты z. Основной недостаток этой системы заключается в том, что построенные на ее основе разностные схемы (см., например, [12]) в общем случае недивергентным образом аппроксимируют закон сохранения полного импульса (19). Этот недостаток отсутствует в консервативных разностных схемах [13], которые непосредственно аппроксимируют дивергентные уравнения (7), (19). Во многих работах, например [12, 13], системы (7), (19) и (7), (20) применяются для численного моделирования ондулярных боров, возникающих, в частности, при расчёте задачи о разрушении плотины. Однако на интервале $(a_1(t), a_2(t))$, над которым расположен фронт бора (14), уравнения (19) и (20) не являются следствием интегрального закона сохранения полного импулса (18), в силу чего не описывают реальное течение жидкости на этом интервале и, как следствие, разностные схемы, построенные на их основе, не позволяют корректно воспроизводить ондуляции, возникающие за фронтом бора.

Численные алгоритмы, предназначенные для моделирования ондулярных боров, необходимо строить путём аппроксимации интегрального закона сохранения полного импульса (18), записанного относительно областей (3), для которых $x_2 - x_1 > a_2 - a_1$, а t_1 и t_2 – последовательные слои разностной сетки. Если такая область (3) содержит внутри себя фронт бора, то соответствующий ей закон сохранения (18) будет с точностью $O(\delta^2)$ согласовывать параметры течения перед и за фронтом бора, представляя таким образом аналог условий Гюгонио в гиперболической модели первого приближения теории мелкой воды. Поскольку интегральный закон сохранения массы

(6) в модели мелкой воды выводится без ограничений на параметры течения, то его дифференциальная форма записи (7) выполняется во всей области течения, включая фронт бора (14). Поэтому для аппроксимации закона сохранения массы можно использовать консервативную разностную схему, аппроксимирующую дивергентное дифференциальное уравнение (7). Получаемый таким образом численный алгоритм на этапе аппроксимации интегрального закона сохранения импульса (18) будет неявным и для его реализации необходимо использовать многоточечные сеточные прогонки с итерациями по нелинейности на верхнем временном слое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Friedrichs K.O.* On the Derivation of Shallow Water Theory // Communs Pure Appl. Math. 1948. V. 1. P. 109–134.
2. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. *Henderson F.M.* Open Channel Flow. N.Y.: MacMillan, 1966.
4. *Yeh H., Liu P., Synolakis C.E.* Long-Wave Runup Models. Singapore: World Sci. Publ., 1996.
5. *Остапенко В.В.* Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: НГУ, 2014.
6. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
7. *Green A.E., Laws N., Nagdi P.M.* On the Theory of Water Waves // Proc. Roy. Soc. London. 1974. A. 338. P. 43–55.
8. *Остапенко В.В.* Модифицированные уравнения теории мелкой воды, допускающие распространение прерывных волн по сухому руслу // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 6. С. 22–43.
9. *Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В.* Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 72–83.
10. *Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В.* Волны в открытом канале, образующиеся при удалении щита перед неровным дном типа шельфа // Водные ресурсы. 2004. Т. 31. № 5. С. 540–545.
11. *Гусев А.В., Остапенко В.В., Малышева А.А., Малышева И.А.* Волны в открытом канале, образующиеся при прохождении прерывной волны над ступенькой дна // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 31–44.
12. *El G.A., Grimshaw R.H., Smyth N.F.* Unsteady Undular Bores in Fully Non-Linear Shallow-Water Theory // Phys. Fluids. 2006. V. 18. 027104.
13. *Metayer O., Gavrilyuk S., Hank S.* A Numerical Scheme for the Green–Naghdi Model // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 2034–2045.
14. *Остапенко В.В.* О законах сохранения теории мелкой воды // ДАН. 2015. Т. 464. № 5. С. 558–561.
15. *Остапенко В.В.* К обоснованию теории мелкой воды // ДАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 158–163.

ON THE APPLICATION OF THE GREEN–NAGDI EQUATIONS FOR THE SIMULATION OF WAVE FLOWS WITH UNDULAR BORES

V. V. Ostapenko

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov July 4, 2018

Received July 23, 2018

The basic conservation laws in the Green–Nagdi model of shallow-water theory are derived from the two-dimensional integral conservation laws of mass and the total momentum describing the plane-parallel flow in an ideal incompressible fluid above a horizontal bottom. This conclusion is based on the concept of a local hydrostatic approximation, which generalizes the concept of the long-wavelength approximation and is used for analyzing the applicability of the Green–Nagdi equations in modeling the wave flows with undular bores.

Keywords: undular bores, Green–Nagdi model, local hydrostatic approximation.