ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 5, с. 519–522

МАТЕМАТИКА

УДК 519.175.4

ОПРОВЕРЖЕНИЕ ЗАКОНА НУЛЯ ИЛИ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНЫХ МОНАДИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАЗРЕЖЕННОГО БИНОМИАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

А. Н. Егорова*, М. Е. Жуковский**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 4.09.2018 г.

Поступило 13.09.2018 г.

В настоящей работе мы привели примеры экзистенциальпых монадических формул, вероятность истинности которых не имеет предела на биномиальном случайном разреженном графе $G(n, n^{-\alpha})$. При $\alpha < \frac{1}{2}$ соответствующие примеры содержат всего одну монадическую переменную.

Ключевые слова: разреженный случайный граф, закон нуля или единицы, закон сходимости, экзистенциальные предложения, монадический язык второго порядка.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524845519-522

Формулы первого порядка строятся с помощью символов отношения ~ (символ смежности) и =; логических связок $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$; переменных x, y, x_1, ... (переменные — это вершины графа); кванторов $\forall$, $\exists$ (см. [1–3]). Монадический язык отличается от языка первого порядка (мы называем языком множество формул: так, язык первого порядка — это множество всех формул первого порядка) тем, что помимо переменных, выражающих вершины графа, в нём используются монадические переменные, выражающие унарные предикаты [4, 5]. Экзистенциальной монадической формулой называется монадическая формула, в которой все монадические переменные находятся в начале формулы и связаны кванторами существования. Например, экзистенциальная монадическая формула

$$\exists X \neg\, [(\exists x_1 \exists x_2 [X(x_1) \wedge (\neg X(x_2))]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists y \exists z [X(y) \wedge (\neg X(z)) \wedge (y \sim z)])]$$

выражает свойство графа быть несвязным. Известно, что это свойство не может быть выражено формулой первого порядка (см., например, [1]).

В настоящей работе изучается биномиальный случайный граф $G(n,p)$ [1, 2, 6], каждая пара вершин в котором из множества $V_n = \{1, 2, ..., n\}$ соединена ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар.

В 1969 г. Ю.В. Глебский, Д.И. Коган, М.И. Лиогонький, В.А. Таланов [7] (и независимо в 1976 г. Р. Фагин [8]) доказали, что любая формула первого порядка либо истинна на случайном графе $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$ с вероятностью, стремящейся к 1, либо ложна с вероятностью, стремящейся к 1. В такой ситуации говорят, что случайный граф подчиняется FO-закону нуля или единицы (больше информации о FO-законах нуля или единицы можно получить в [1, 9–11]). Аналогично $G(n, p)$ подчиняется MSO-закону нуля или единицы (подчиняется EMSO-закону нуля или единицы), если любая монадическая формула второго порядка (экзистенциальная монадическая формула второго порядка) либо истинна на $G(n, p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, либо ложна с вероятностью, стремящейся к 1. MSO-закон нуля или единицы для $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$ был опровергнут М. Кауфманном и С. Шелахом в 1985 г. [12]. Более того, они доказали, что не выполнен даже MSO-закон сходимости (иными словами, существует такая монадическая формула второго порядка ϕ, что $P\left(G\left(n, \frac{1}{2}\right) = \phi\right)$ не сходится). В 1987 г. Кауфманн [13] доказал, что существует экзистенциальная монадическая формула с 4 бинарными предикатами, для которой также нет сходимости

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.

**E-mail: alena.egorova@phystech.edu*

***E-mail: zhukmax@gmail.com*

(здесь, разумеется, рассматривается случайная структура, выбранная равномерно из множества всех структур с 4 бинарными предикатами на $\{1, 2, ..., n\}$). Сходимость для $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$ была опровергнута Дж.-М. Ле Барсом в 2001 г. [5].

Биномиальный случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$, $\alpha \in (0, 1)$, называется разреженным. В 1988 г. С. Шелах и Дж. Спенсер [14] доказали, что разреженный случайный граф подчиняется FO-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда α — иррациональное число. В 1993 г. в работе [15] доказано, что при $\alpha \in (0, 1)$ не выполнен MSO-закон сходимости. В той же работе в последней главе утверждается, что аналогичными методами можно опровергнуть и EMSO-закон сходимости. К сожалению, автор не привёл доказательство, из-за чего справедливость соответствующего результата не удаётся проверить. В настоящей работе мы приводим новый метод построения экзистенциальных монадических предложений, для которых нет сходимости. При $\alpha < \frac{1}{2}$ наш метод позволяет обойтись всего одной монадической переменной. Основной результат нашей работы приведён ниже.

Теорема 1. *Пусть* $\delta > 0$.

1. *Существует такое экзистенциальное монадическое предложение* ϕ *с одной монадической переменной, что для любого* $\alpha < \frac{1}{2} - \delta$ *не существует предела* $\mathrm{P}(G(n, n^{-\alpha}) \vDash \phi)$ *при* $n \to \infty$.

2. *Существует такое экзистенциальное монадическое предложение* ϕ, *что для любого* $\alpha < 1 - \delta$ *не существует предела* $\mathrm{P}(G(n, n^{-\alpha}) \vDash \phi)$ *при* $n \to \infty$.

Схема доказательства теоремы 1 следующая.

Начнём со случая $\alpha < \frac{1}{2}$. Рассмотрим укоренённые деревья F_1 и F_2 с корнями R_1 и R_2 соответственно. Пусть F_1 — простой путь на a вершинах (P_a), укоренённый в одном из концов, а F_2 — совершенное 4-арное дерево (у корня 4 сына, у каждого из которых по 4 сына, и так далее) глубины a (т.е. для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, a-1\}$ количество вершин, находящихся на рассотянии i от корня, равно 4^i, а все вершины, находящиеся на расстоянии $a - 1$, являются листьями). Пусть γ — целое неотрицательное число, и граф W_a^γ получен следующим образом. Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ всех таких пар вершин (u, v), что $u \in V(F_1)$, $v \in V(F_2)$, и расстояние от u до R_1 совпадает с расстоянием от v до R_2. Добавим теперь к дизъюнктному объединению графов $F_1 \sqcup F_2$ по одному $P_{\gamma+2}$ между каждой парой вершин $(u, v) \in \mathcal{E}$. Разумеется, в полученном графе W_a^γ количество вершин равно $a + (\gamma+1)\frac{4^a - 1}{3}$, а количество рёбер — $a + (\gamma+2)\frac{4^a - 1}{3} - 2$.

Искомая формула имеет вид $\exists X\, \varphi(X) \wedge \wedge \mathrm{MAX}(X)$, где формула первого порядка $\varphi(X)$ помимо бинарных предикатов ~, = содержит ещё и один унарный предикат X и утверждает, что “для некоторого a подграф, индуцированный множеством $[X] := \{v : X(v)\}$, изоморфен W_a^γ”. Формула первого порядка MAX(X) с тем же набором предикатов утверждает, что любая вершина вне $[X]$ смежна хотя бы с одной вершиной из $[X]$.

Первое утверждение теоремы 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Пусть, кроме того,* n_i *— возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим*

$$k_i = 2(1 - 2\alpha) n_i^\alpha \ln n_i.$$

1. *Пусть* $0 < c < \frac{1-\alpha}{2(1-2\alpha)}$, $\varepsilon > 0$. *Если при каждом достаточно большом i не найдётся такого целого a, что* $a + \frac{4^a - 1}{3} \in (ck_i, k_i + \varepsilon)$, *то, с вероятностью, стремящейся к 1, ни для какого a не найдётся такого индуцированного подграфа F в* $G(n_i, n_i^{-\alpha})$, *что* $F \cong W_a^\gamma$ *и каждая вершина вне F имеет соседа в F.*

2. *Пусть теперь* $\frac{1-\alpha}{2(1-2\alpha)} < C_1 < C_2 < 1$. *Если для каждого достаточно большого i найдётся такое натуральное число* a_i, *что* $C_1 k_i \le a_i + \frac{4^{a_i} - 1}{3} \le C_2 k_i$, *то с вероятностью, стремящейся к* 1, *в* $G(n_i, n_i^{-\alpha})$ *найдётся такой индуцированной подграф* $F \cong W_a^\gamma$, *что каждая вершина вне F имеет соседа в F.*

К сожалению, при $\alpha \ge \frac{1}{2}$ наше доказательство леммы 1 перестаёт работать из-за большой дисперсии числа индуцированных подграфов нужного вида. Тем не менее, мы подобрали другую экзистенциальную монадическую формулу (для опровержения закона сходимости), которая не требует настолько точного вычисления размера максимального индуцированного подграфа. К сожалению, эта формула использует гораздо больше монадических переменных. Для получения этой формулы нам пришлось рассмотреть более сложную структуру, определённую ниже.

Положим $\omega_r(a) = \frac{r^a - 1}{r - 1}$. Рассмотрим граф W_a^γ, определённый выше, но теперь F_2 — это r-арное совершенное дерево. Рассмотрим, кроме того, простой путь $\tilde{F}_1$ на $\omega_r(a)$ вершинах, укоренённый в одном из концов $\tilde{R}_1$. Соединим каждую вершину $\tilde{F}_1$ с одной вершиной F_2 (и, таким образом, установим биекцию между соответствующими множествами вершин) простым путём $P_{\gamma+2}$ таким образом, что образ множества вершин в F_2, находящихся на заданном расстоянии от R_2, индуцирует в $\tilde{F}_1$ простой путь. Далее рассмотрим ещё одно r-арное совершенное дерево $\tilde{F}_2$, и пусть его глубина равна $\omega_r(a)$. Соединим простыми путями $P_{\gamma+2}$ вершины $\tilde{F}_1$ с вершинами $\tilde{F}_2$ таким же образом, как это сделано в W_a^{γ}. Обозначим полученный граф $W_a^{\gamma,*}$. Очевидно, в нём $V_{\gamma,r}(a) := a + 2(\gamma+1)\omega_r(a) + (\gamma+1)\omega_r(\omega_r(a))$ вершин и $E_{\gamma,r}(a) := a + 2(\gamma+2)\omega_r(a) + (\gamma+2)\omega_r(\omega_r(a)) - 4$ рёбер.

Далее определим (γ, r)-процесс в графе $\mathcal{G}$ как последовательность вложенных (каждый предыдущий является индуцированным подграфом следующего, и все графы являются индуцированными подграфами в $\mathcal{G}$) графов $W^{\gamma,*}(1) \subset W^{\gamma,*}(2) \subset \ldots$, в котором каждый следующий граф получен из предыдущего добавлением либо одной вершины и одного ребра, либо простого пути $P_{\gamma+3}$, соединяющего две вершины предыдущего графа. При этом в момент $i = 2\omega_r(a) + \omega_r(\omega_r(a)) - 2$ граф $W^{\gamma,*}(i)$ изоморфен W_a^{γ}.

Построенная нами экзистенциальная монадическая формула записывает следующее свойство графа: “Существуют такие чётное положительное число a и (γ, r)-процесс $W^{\gamma,*}(1) \subset W^{\gamma,*}(2) \subset \ldots \subset W^{\gamma,*}(i)$ в данном графе, что $2\omega_r(a) + \omega_r(\omega_r(a)) \le i + 2 < 2\omega_r(a+1) + \omega_r(\omega_r(a+1))$, и при этом (γ, r)-процесса $W^{\gamma,*}(1) \subset \ldots \subset W^{\gamma,*}(i+1)$ в данном графе нет.”

Легко видеть, что второе утверждение теоремы 1 следует из сформулированной ниже леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$.

1. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Тогда с вероятностью, стремящейся к* 1, *для каждого такого a, что* $|V_{\gamma,r}(a)| \ge 2\left(1 - \frac{\gamma+2}{\gamma+1}\alpha\right) n^{\alpha} \ln n + \varepsilon$, *в* $G(n, n^{-\alpha})$ *не найдётся индуцированного подграфа, изоморфного* $W_a^{\gamma,*}$.

2. *Пусть теперь* $0 < \beta < \min\left\{\alpha, \frac{2}{3}(1-\alpha)\right\}$. *Тогда при всех достаточно больших целых* γ *с вероятностью, стремящейся к* 1, *во-первых, для каждого такого a, что* $|V_{\gamma,r}(a)| \le n^{\beta}$, *в* $G(n, n^{-\alpha})$ *найдётся индуцированный подграф, изоморфный* $W_a^{\gamma,*}$, *а во-вторых, для любого множества вершин V случайного графа, мощность которого не превосходит* n^{β}, *и любой пары вершин* u, $v \in V$ *найдётся индуцированный простой путь* $P_{\gamma+3}$, *соединяющий u с v и не имеющий с V никаких других общих вершин и других соседей в V.*

Источник финансирования. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16–11–10014 и гранта поддержки ведущих научных школ Российской Федерации НШ-6760.2018.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский М.Е., Райгородский А.М.* // УМН. 2015. Т. 70. № 1. С. 35–88.
2. *Spencer J.H.* The Strange Logic of Random Graphs. B.: Springer Verlag, 2001.
3. *Верещагин Н.К., Шень А.* Языки и исчисления. М.: МНЦМО, 2000.
4. *Жуковский М.Е., Санчез М.Г.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 5. С. 513–515.
5. *Le Bars J.-M.* // Inform. Processing Lett. 2001. V. 77. P. 43–48.
6. *Janson S., Luczak T., Rucinski A.* Random Graphs. N.Y.: Wiley, 2000.
7. *Глебский Ю.В., Коган Д.И., Легонький М.И., Таланов В.А.* // Кибернетика. 1969. Т. 2. С. 17–27.
8. *Fagin R.* // J. Symbolic Logic. 1976. V. 41. P. 50–58.
9. *Жуковский М.Е., Медведева А.Е.* // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 3. С. 342–349.
10. *Жуковский М.Е., Островский Л.Б.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2017. Т. 81. № 6. С. 100–113.
11. *Matushkin A.D., Zhukovskii M.E.* // Discrete Appl. Math. 2018. V. 236. P. 329–346.
12. *Kaufmann M., Shelah S.* // Discrete Math. 1985. V. 54. P. 285–293.
13. *Kaufmann M.* Counterexample to the 0-1 Law for Existential Monadic Second-Order Logic. Technical Report. CLI Internal Note 32. Computational Logic. December 1987.
14. *Shelah S., Spencer J.H.* // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 97–115.
15. *Tyszkiewicz J.* // Lect. Notes in Comput. Sci. 1993. V. 702. P. 425–439.

A DISPROOF OF THE ZERO-ONE LAW FOR EXISTENTIAL MONADIC SECOND ORDER PROPERTIES OF SPARSE BINOMIAL RANDOM GRAPHS

A. N. Egorova, M. E. Zhukovskii

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov September 4, 2018

Received September 13, 2018

We construct existential monadic second order sentences that have no limit probabilities on binomial sparse random graph $G(n; n^{-\alpha})$. For $\alpha < \frac{1}{2}$, the constructions have only one monadic variable.

Keywords: sparse random graph, zero-one law, convergence law, existential sentences, monadic second order logic.