ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 5, с. 523–526

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

ОДНА КОНСТРУКЦИЯ ОТРАЖАЮЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

Академик РАН И. А. Ибрагимов[1,2,*], Н. В. Смородина[1,2,], М. М. Фаддеев[1,2,***]**

Поступило 02.10.2018 г.

Для некоторых классов одномерных процессов Леви вводится понятие отражения от границы интервала. Показано, что траектории отражающегося процесса определяют случайные операторы, переводящие функции, заданные на границе интервала в элементы L_2 на всём интервале.

Ключевые слова: случайные процессы, начально-краевая задача, предельные теоремы, локальное время.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524845523-526

В работе рассматриваются процессы Леви, принимающие значения на конечном интервале (для определённости — на $[0, \pi]$) и отражающиеся от его границы. Процесс стартует из точки $x \in (0, \pi)$ и движется по своей траектории, пока не достигнет границы интервала. В момент достижения границы процесс отражается от неё, оставляя на ней "скачок импульса" и продолжает двигаться дальше. Скачки импульса в каждой точке границы с течением времени накапливаются.

Отражающиеся процессы возникают при построении вероятностных представлений решений начально-краевых задач с краевым условием Неймана. В частности, для уравнения теплопроводности $2\partial_t u = \partial^2_{xx} u$ решение $u(t, x)$ начально-краевой задачи с начальной функцией $f(x)$ и однородными краевыми условиями Неймана может быть представлено в виде $u(t,x) = \mathbf{E} f(\tilde{w}_x(t))$, где $\tilde{w}_x$ — отражающийся от границы интервала винеровский процесс, стартующий в нулевой момент времени из точки $x \in (0, \pi)$.

Поскольку траектории процессов Леви нигде не дифференцируемы, то понятие отражения от границы требует строгого определения. Такие способы известны для процессов с непрерывными траекториями (см. [1, 2, 5]). В нашем случае траектории не обязательно непрерывны, поэтому для построения отражающегося процесса мы воспользуемся подходом, предложенным в [3, 4], основанном на использовании идеологии теории обобщённых функций. Опишем основные идеи указанного подхода. Пусть $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$ — процесс Леви, а $\xi_x(t) = x + \xi(t)$. Начальную функцию f мы будем рассматривать как основную функцию, а операцию отражения переносим на неё, заменяя функцию некоторой новой функцией $\widetilde{f}$, которая является продолжением функции f с интервала $[0, \pi]$ на всю вещественную ось. Далее полагаем по определению $\mathbf{E} f(\widetilde{\xi_x}(t)) = \mathbf{E} \widetilde{f}(\xi_x(t))$.

Эволюция отражающихся процессов описывается двумя семействами операторов R^t, Q^t. Первое семейство является полугруппой, описывающей эволюцию одномерного распределения процесса внутри интервала. Второе семейство описывает эволюцию среднего накопленного скачка импульса в точках границы. Элементы этого семейства являются операторами, действующими на функции, заданные на границе интервала и переводящие их в функции из $L_2[0, \pi]$. Далее будет показано, что для рассмотренных процессов Леви можно определить не только средний накопленный скачок импульса, но и "индивидуальный" накопленный скачок импульса каждой траектории, который мы также будем трактовать как случайный оператор $\mathcal{Q}^t(\xi(\cdot))$, зависящий уже от траектории исходного процесса.

Пусть функция f принадлежит соболевскому пространству $W_2^2[0, \pi]$. Представим f в виде

$$f(x) = f_0(x) + f'(0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f'(\pi) - f'(0)}{2\pi} x^2.$$

При таком представлении функция f_0 удовлетворяет соотношению $f_0'(0) = f_0'(\pi) = 0$. Разложим

[1] *Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук*

[2] *Санкт-Петербургский государственный университет*

**E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru*

***E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru*

****E-mail: m.faddeev@spbu.ru*

функцию f_0 в ряд Фурье $f_0(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j N_j(x)$ по ортогональному в $L_2[0,\pi]$ базису $\{N_j\}_{j=0}^{\infty}$, где

$$N_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ N_j(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(jx) \text{ при } j\geq 1.$$

Рассмотрим продолжение $\widetilde{f}$ функции f с интервала $[0,\pi]$ на всю вещественную прямую, где

$$\widetilde{f}(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j N_j(x)+f'(0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{f'(\pi)-f'(0)}{2\pi}x^2. \quad (1)$$

Далее, пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Определим полугруппу P^t операторов в $W_2^2[0,\pi]$, полагая для $f\in W_2^2[0,\pi]$ $P^t f(x)=\mathbf{E}\widetilde{f}(x+w(t))$.

Обозначим через R^t интегральный оператор в $L_2[0,\pi]$ с ядром

$$R^t(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{j^2 t}{2}} N_j(x)N_j(y).$$

Тогда

$$P^t f(x)=\int_0^{\pi} f(y)R^t(x,y)dy-$$
$$-f'(0)Q^t(x,0)+f'(\pi)Q^t(x,\pi),$$

где

$$Q^t(x,\pi)=\frac{1}{2\pi}(t+x^2-\int_0^{\pi} y^2 R^t(x,y)dy),$$

$$Q^t(x,0)=Q^t(x,\pi)-x+\int_0^{\pi} yR^t(x,y)dy.$$

На Q^t мы будем смотреть как на линейный оператор, переводящий функцию g, заданную на двухточечном множестве $\{0,\pi\}$ в функцию $Q^t g\in L_2[0,\pi]$, где

$$Q^t g(x)=Q^t(x,0)g(0)+Q^t(x,\pi)g(\pi).$$

Обозначим через Λ функцию, получающуюся 2π-периодическим продолжением функции $x\mapsto|x|$ с интервала $[-\pi,\pi]$ на всю прямую. Определим процесс $w_x^0(t)$, полагая $w_x^0(t)=\Lambda(x+w(t))$. Для любых $x\in[0,\pi]$, $t\geq 0$ плотность распределения случайной величины $w_x^0(t)$ есть $R^t(x,\cdot)$.

Теорема 1. *Семейства операторов R^t, Q^t удовлетворяют соотношениям $R^{t+s}=R^tR^s$, $Q^{t+s}=Q^t+R^tQ^s$. При этом $R^0=I$ — тождественный оператор, а $Q^0=0$.*

Через A^N обозначим самосопряжённый оператор, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$ и заданный на области определения $\mathcal{D}(A^N)$, состоящей из тех функций класса $W_2^2[0,\pi]$, производная которых на границе интервала равна нулю. По определению оператор A^N переводит функцию $f=\sum_{j=0}^{\infty} a_j N_j$ в функцию $A^N f=-\sum_{j=0}^{\infty} j^2 a_j N_j$.

Теорема 2. *При всех $t>0$ и $f\in L_2[0,\pi]$ справедливы соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial t}R^t f=\frac{1}{2}A^N R^t f,\ \frac{\partial}{\partial t}Q^t(x,\theta)=\frac{1}{2}R^t(x,\theta).$$

Заменим винеровский процесс его аппроксимацией сложным пуассоновским процессом. Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с общим симметричным распределением $\mathcal{P}$. Предположим, что случайная величина ξ_1 имеет конечный четвёртый момент и $\mathbf{D}\xi_1=\mathbf{E}\xi_1^2=1$. Далее, пусть $\eta(t)$, $t\geq 0$ — стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим сложный пуассоновский процесс $\zeta_n(t)$, $t\in[0,T]$, полагая

$$\zeta_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j.$$

Пусть $f\in W_2^2[0,\pi]$, а функция $\widetilde{f}$ определяется (1). Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим полугруппу P_n^t операторов в $W_2^2[0,\pi]$, полагая $P_n^t f(x)=\mathbf{E}\widetilde{f}(x+\zeta_n(t))$.

Обозначим через R_n^t оператор в $L_2[0,\pi]$, переводящий функцию $f=\sum_{j=0}^{\infty} a_j N_j$ в функцию $R_n^t f=\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-\frac{\lambda_j^n t}{2}} N_j$, где $\lambda_j^n=-2n\int_{\mathbb{R}}(\cos\frac{jy}{\sqrt{n}}-1)d\mathcal{P}(y)$. При фиксированном $x\in[0,\pi]$ ядро $R_n^t(x,\cdot)$ совпадает с распределением случайной величины $\zeta_{n,x}^0(t)=\Lambda(x+\zeta_n(t))$. Тогда

$$P_n^t f(x)=\int_0^{\pi} f(y)R_n^t(x,dy)-f'(0)Q_n^t(x,0)+$$
$$+f'(\pi)Q_n^t(x,\pi),$$

где

$$Q_n^t(x,\pi)=\frac{1}{2\pi}(t+x^2-\int_0^{\pi} y^2 R_n^t(x,dy)),$$

$$Q_n^t(x,0)=Q_n^t(x,\pi)-x+\int_0^{\pi} yR_n^t(x,dy).$$

Теорема 3. *Семейства операторов R_n^t, Q_n^t удовлетворяют соотношениям $R_n^{t+s}=R_n^tR_n^s$, $Q_n^{t+s}=Q_n^t+R_n^tQ_n^s$.*

При этом $R_n^0 = I$ *— тождественный оператор, а* $Q_n^0 = 0$.

Через A_n^N обозначим ограниченный оператор в пространстве $L_2[0,\pi]$, переводящий функцию $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j N_j$ в функцию $A_n^N f = -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^n a_j N_j$, а через A_n обозначим оператор, определённый на $W_2^2[0,\pi]$ как

$$A_n f(x) = 2n \int_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{f}\left(x + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) - \widetilde{f}(x) \right) \mathcal{P}(dy).$$

Введём ещё оператор $\widetilde{R}_n^t$ в $L_2[0,\pi]$ с ядром

$$\widetilde{R}_n^t(x,y) = N_0(x)N_0(y) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^n}{j^2} e^{-\frac{\lambda_j^n t}{2}} N_j(x)N_j(y).$$

Теорема 4. *При всех* $t > 0$ *и* $f \in L_2[0,\pi]$ *справедливы соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial t} R_n^t f = \frac{1}{2} A_n^N R_n^t f,\ \frac{\partial}{\partial t} Q_n^t(x,\theta) = \frac{1}{2} \widetilde{R}_n^t(x,\theta).$$

Теорема 5. *Существует число* $C > 0$ *такое, что для любой функции* $f \in \mathcal{D}(A^N)$ *выполнено*

$$\| R_n^t f - R^t f \|_{L_2[0,\pi]} \le \frac{C\sqrt{t}}{\sqrt{n}} \| f \|_{W_2^2[0,\pi]}.$$

Теорема 6. *Существует число* $C > 0$, *такое, что для любой функции* $g = \{g(0), g(\pi)\}$, *выполнено*

$$\left\| Q_n^t g - Q^t g \right\|_{L_2[0,\pi]} \le \frac{Ct^{3/8}}{n^{3/8}} \left(|g(0)| + |g(\pi)| \right).$$

Покажем, что операторы Q^t, Q_n^t могут быть получены усреднением некоторых случайных операторов $\mathcal{Q}^t$, $\mathcal{Q}_n^t$, которые будут иметь смысл накопленного скачка импульса уже индивидуальной траектории. Начнём с более простого случая оператора Q_n^t. Пусть $g = \{g(0), g(\pi)\}$ — функция, заданная на границе отрезка. Построим по ней функцию f, заданную на $[0,\pi]$:

$$f(x) = -g(0)\left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{g(\pi) + g(0)}{2\pi} x^2.$$

Определим случайный (зависящий от траектории процесса $\zeta_n(\cdot)$) оператор, полагая

$$\left[\mathcal{Q}_n^t(\zeta_n(\cdot)) g \right](x) = \frac{1}{2} \int_0^t \left([A_n f]\left(\zeta_{n,x}^0(\tau) \right) - \left[A_n^N f \right]\left(\zeta_{n,x}^0(\tau) \right) \right) d\tau.$$

Раскладывая функцию f в ряд Фурье, получим

$$\left[\mathcal{Q}_n^t(\zeta_n(\cdot)) g \right](x) = \frac{g(0)}{\pi} \left(\frac{t}{2} + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^n}{j^2} \cos\left(j\left(x + \zeta_n(\tau) \right) \right) d\tau \right) + \frac{g(\pi)}{\pi} \left(\frac{t}{2} + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda_j^n}{j^2} \cos\left(j\left(x + \zeta_n(\tau) \right) \right) d\tau \right).$$

Теорема 7. *Для любой функции* $g = \{g(0), g(\pi)\}$ *справедливо*

$$\mathrm{E}\left[\mathcal{Q}_n^t(\zeta_n(\cdot)) g \right](x) = \left[Q_n^t g \right](x).$$

Определим теперь случайный оператор, соответствующий оператору Q^t. Эта конструкция будет немного сложнее, так как, в отличие от оператора A_n^N, оператор A^N не продолжается до ограниченного оператора в $L_2[0,\pi]$.

Введём обозначения. На пространстве $\mathcal{H} = [0,\pi] \times C_0[0,\infty]$ рассмотрим меру $\mu = \mathrm{mes} \times P_W$, где mes — мера Лебега на $[0,\pi]$, а P_W — мера Винера. Через Π_m обозначим проектор в $L_2[0,\pi]$ на линейную оболочку векторов $N_0, N_1, \ldots, N_m$.

Определим случайный оператор, полагая для $g = \{g(0), g(\pi)\}$

$$\left[\mathcal{Q}^t(w(\cdot)) g \right](x) = \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \int_0^t \left(f''\left(w_x^0(\tau) \right) - \left[\left(A^N \Pi_m \right) f \right]\left(w_x^0(\tau) \right) \right) d\tau. \quad (2)$$

Предел в (2) понимается в $L_2(\mathcal{H}, \mu)$.

Раскладывая функцию f в ряд Фурье, получаем

$$\left[\mathcal{Q}^t(w(\cdot)) g \right](x) = \frac{g(0)}{\pi} \left(\frac{t}{2} + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(j\left(x + w(\tau) \right) \right) d\tau \right) + \frac{g(\pi)}{\pi} \left(\frac{t}{2} + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos\left(j\left(x + w(\tau) \right) \right) d\tau \right).$$

Теорема 8. *Для любой* $g = \{g(0), g(\pi)\}$ *выполнено* $\mathbf{E}[\mathcal{Q}^t(w(\cdot))g](x) = [Q^t g](x)$.

Пусть $\xi_\alpha(t)$ — симметричный α-устойчивый процесс Леви с параметром $\alpha \in (1,2)$ и мерой Леви вида $\frac{dx}{C_\alpha |x|^{1+\alpha}}$, где $C_\alpha = \Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2} \right)$.

Определим полугруппу операторов P_α^t, полагая $P_\alpha^t f(x) = \mathbf{E}\widetilde{f}(x + \xi_\alpha(t))$. Поскольку случайные величины $\xi_\alpha(t)$ не имеют второго момента, мы можем определить данную полугруппу только на подпространстве $W_2^2[0,\pi]$, состоящем из функций f, удовлетворяющих условию $f'(0) = f'(\pi)$.

Обозначим через R_α^t интегральный оператор в $L_2[0,\pi]$ с ядром

$$R_\alpha^t(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{j^\alpha t}{\alpha}} N_j(x) N_j(y).$$

Тогда

$$P_\alpha^t f(x) =$$
$$= \int_0^\pi f(y) R_\alpha^t(x,y)dy - f'(0)Q_\alpha^t(x,0) + f'(\pi)Q_\alpha^t(x,\pi),$$

где

$$Q_\alpha^t(x,0) = -x + \int_0^\pi y R_\alpha^t(x,y)dy + C,\ Q_\alpha^t(x,\pi) = C,$$

а константа C может быть выбрана произвольно, что означает, что для отражающегося устойчивого процесса мы можем определить только разность между накопленным средним скачком импульса на левом и правом концах промежутка.

Теорема 9. *Семейства операторов* P_α^t, Q_α^t *удовлетворяют соотношениям* $R_\alpha^{t+s} = R_\alpha^t R_\alpha^s$, $Q_\alpha^{t+s} = Q_\alpha^t + R_\alpha^t Q_\alpha^s$. *При этом* $R_\alpha^0 = I$ *— тождественный оператор, а* $Q_\alpha^0 = 0$.

Через A_α^N обозначим оператор, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$ и заданный на области определения $\mathcal{D}(A^N)$. По определению оператор A_α^N переводит функцию $f = \sum_{j=0}^\infty a_j N_j$ в функцию $A_\alpha^N f = -\sum_{j=1}^\infty j^\alpha a_j N_j$.

Введём ещё оператор $\widetilde{R}_\alpha^t$ в $L_2[0,\pi]$ с ядром

$$\widetilde{R}_\alpha^t(x,y) = N_0(x)N_0(y) + \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{2-\alpha}} e^{-\frac{j^\alpha t}{\alpha}} N_j(x)N_j(y).$$

Теорема 10. *При всех* $t > 0$ *и* $f \in L_2[0,\pi]$ *справедливы соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial t} R_\alpha^t f = \frac{1}{\alpha} A_\alpha^N R_\alpha^t f,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q_\alpha^t(x,0) - Q_\alpha^t(x,\pi)) = \frac{1}{\alpha}(\widetilde{R}_\alpha^t(x,0) - \widetilde{R}_\alpha^t(x,\pi)).$$

Определим случайный оператор, соответствующий оператору Q_α^t. На пространстве $\mathcal{H}_\alpha = [0,\pi]\times D_0[0,\infty]$ (здесь D_0 — пространство Скорохода) рассмотрим меру $\mu_\alpha = \mathrm{mes}\times P_\alpha$, где P_α — мера, порождённая процессом $\xi_\alpha(t)$. Для каждого g, $g(0)+g(\pi)=0$ положим

$$\left[Q_\alpha^t\left(\xi_\alpha(\cdot)\right)g\right](x) =$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\lim_{m\to\infty}\int_0^t \left[\left(A_\alpha^N \Pi_m\right) f\right]\left(\xi_{\alpha,x}^0(\tau)\right)d\tau,$$

где $\xi_{\alpha,x}^0(\tau) = \Lambda(x+\xi_\alpha(\tau))$, а функция f строится по функции g по формуле $f(x) = -g(0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Предел понимается в $L_2(\mathcal{H}_\alpha, \mu_\alpha)$.

Раскладывая функцию f в ряд Фурье, получаем

$$\left[Q_\alpha^t\left(\xi_\alpha(\cdot)\right)g\right](x) =$$
$$= \frac{g(0)}{\alpha}\frac{4}{\pi}\int_0^t \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{(2l-1)^{2-\alpha}} \cos\left((2l-1)\left(x+\xi_\alpha(\tau)\right)\right)d\tau.$$

Теорема 11. *Для любой функции* $g = \{g(0), g(\pi)\}$, *такой, что* $g(0)+g(\pi)=0$, *выполнено*

$$\mathbf{E}[Q_\alpha^t(\xi_\alpha(\cdot))g](x) = [Q_\alpha^t g](x).$$

Источник финансирования. Работа первого автора (теоремы 1—4) выполнена при поддержке программы Президиума РАН №01 "Фундаментальная математика и её приложения" (грант PRAS-18-01). Работа второго автора (теоремы 9—11) выполнена при поддержке РНФ (грант № 17—11—01136). Работа третьего автора (теоремы 5—8) выполнена при поддержке РНФ (грант № 17—11—01136).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скороход А.В.* // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6. № 3. С. 287–298.
2. *Pilipenko A.* An Introduction to Stochastic Differential Equations with Reflection. Potsdam: Universitatsverlag, 2014.
3. *Ибрагимов И. А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* // Теория вероятностей и ее применения. 2016. Т. 61. № 4. С. 733–752.
4. *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* // Теория вероятностей и ее применения. 2017. Т. 62. № 3. С. 446–467.
5. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории М.: Мир, 1968.

A CONSTRUCTION OF REFLECTING LÉVY PROCESSES

Academician of the RAS I. A. Ibragimov[1,2], N. V. Smorodina[1,2], M. M. Faddeev[1,2]

[1] Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences at Saint-Peterburg, Saint-Peterburg, Russian Federation
[2] Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Received October 2, 2018

For some classes of Lévy Processes, the notion of reflection from an interval boundary is introduced. It is shown that trajectories of a reflecting process define random operator that map functions defined on the interval boundaries into elements of L_2 on the whole interval.

Keywords: random processes, initial boundary value problem, limit theorems, local time.