ОБРАЩЕНИЕ ГИПЕРВЫХОДНЫХ
СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМЧлен-корреспондент РАН А. В. Ильин^{1, 2, 3, *},
Е. И. Атамас^{2, **}, В. В. Фомичев^{1, 2, 3, ***}

Поступило 11.09.2018 г.

Рассматривается задача обращения для линейной стационарной гипервыходной системы с запаздыванием. Для такой системы получена каноническая форма с выделением нулевой динамики, исследованы их инвариантные нули и описана их связь со спектральной наблюдаемостью подсистемы нулевой динамики. На основе полученных результатов указан алгоритм обращения рассматриваемых систем.

Ключевые слова: обращение динамических систем, системы с запаздыванием, МИМО системы.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524845538-541>

Введение и постановка задачи. Задача обращения управляемых систем относится к числу классических в математической теории управления. Необходимость её изучения определяется как обилием практических приложений, так и её важной ролью в исследовании фундаментальных теоретических вопросов. Данная работа посвящена исследованию задачи обращения для специального класса систем с запаздыванием — гипервыходных систем, размерность выхода которых строго больше размерности входа. Оказывается, что для них возможно применить разработанные ранее методы для квадратных систем [1], а наличие дополнительных выходов позволяет существенно ослабить налагаемые на систему ограничения.

Рассмотрим управляемую систему линейных стационарных дифференциальных уравнений с постоянными соизмеримыми запаздываниями вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^k A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^k B_i \xi(t - i\tau), \\ y &= \sum_{i=0}^k C_i x(t - i\tau), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход системы, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ — неизвестный вход, A_i, B_i, C_i — постоянные известные матрицы соответствующих размерностей, $\tau > 0$. Поскольку в данной работе рассматриваются гипервыходные системы, мы будем исследовать случай $l > m$.

Нами будет рассматриваться задача обращения такой системы, т.е. построения оценки $\tilde{\xi}(t)$ неизвестного сигнала $\xi(t)$ в режиме реального времени.

Для удобства дальнейшей работы с рассматриваемой системой введём оператор запаздывания $\delta: f(t) \mapsto f(t - \tau)$ и перепишем её в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^k A_i \delta^i x + \sum_{i=0}^k B_i \delta^i \xi, \\ y &= \sum_{i=0}^k C_i \delta^i x. \end{aligned}$$

Далее, формально ставя в соответствие оператору δ алгебраическую переменную Δ , мы можем записать полученную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\Delta)x(t) + B(\Delta)\xi(t), \\ y &= C(\Delta)x(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta)$ — матрицы, состоящие из многочленов от переменной Δ . Тем самым исходной системе (1) сопоставляется система над коммутативным кольцом $\mathbb{R}[\Delta]$. В дальнейшем всюду, где возможно, мы будем опускать явное указание зависимости матриц от Δ .

Каноническая форма с выделением нулевой динамики. Важную роль при решении различных задач управления,

¹ School of Science, Hangzhou Dianzi University, China

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

³ Центр информационных технологий в проектировании Российской Академии наук, Москва

* E-mail: iline@cs.msu.ru

** E-mail: eatamas@cs.msu.ru

*** E-mail: fomichev@cs.msu.ru

в том числе задачи обращения, играет форма с выделением нулевой динамики. Нашей первой целью будет построение такой формы для гипервыходных систем с запаздыванием. Отметим, что для квадратных систем с запаздыванием (т.е. тех, для которых $l = m$) каноническая форма с выделением нулевой динамики была получена в работе [2]. Напомним важное определение относительного порядка для квадратных систем.

Определение 1 [3]. Пусть $y_1, \dots, y_m$ — выходы системы, а $c_1, \dots, c_m$ — соответствующие строки матрицы C . Вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$ определяет относительный векторный порядок, если выполнены следующие условия:

1. $c_i B = 0, c_i A B = 0, \dots, c_i A^{r_i-2} B = 0, c_i A^{r_i-1} B \neq 0$ для всех $1 \leq i \leq m$.

$$2. \det \begin{pmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{pmatrix} = \det H_r(\Delta) \neq 0.$$

В случае, когда $H_r(\Delta)$ унимодулярна, т.е. $\det H_r(\Delta) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, относительный порядок называется чистым. Мы будем использовать обозначение $|r| = r_1 + \dots + r_m$.

Замечание. Как и в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений, векторный относительный порядок, а тем более чистый векторный относительный порядок, определены не для всякой системы с запаздыванием.

В случае гипервыходных систем для удобства произведём замену обозначений, явно разделив вектор выходных сигналов. Через $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ мы будем обозначать вектор из первых m выходов, а через

$$z = (y_{m+1}, \dots, y_l)^T \equiv (z_{m+1}, \dots, z_l)^T$$

вектор из остальных $(l - m)$ выходов. Соответственно представим матрицу C в блочном виде $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, где $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}[\Delta]$ и $C_2 \in \mathbb{R}^{(l-m) \times n}[\Delta]$. Рассматриваемая система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\xi, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, нами выделена квадратная подсистема с выходами $y_i, i = 1, 2, \dots, m$. Для неё справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. Пусть квадратная система обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда она обратимым преобразованием приводима к форме с выделением нулевой динамики.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} &= A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r \xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $y_p^q = c_q A^{p-1} x = y_q^{(p-1)}$ — производная порядка $(p - 1)$ q -й компоненты выхода, $\bar{y}_s = (y_1^s, \dots, y_{r_s-1}^s)^T$ — вектор-столбец координат, соответствующих производным s -й компоненты выхода y , $\bar{y} = ((\bar{y}_1)^T, \dots, (\bar{y}_m)^T, y_{r_1}^1, \dots, y_{r_m}^m)^T$ — вектор-столбец всех координат, соответствующих компонентам $y_i = y_i^1$ выхода и их производным; $\bar{x}$ — оставшиеся координаты фазового вектора; $A_{11} \in R^{(n-|r|) \times (n-|r|)}$, $A_{12} \in R^{(n-|r|) \times m}$, $A_{21} \in R^{m \times (n-|r|)}$, $A_{22} \in R^{m \times |r|}$ — известные матрицы соответствующих размерностей, H_r — матрица из определения относительного порядка. При этом матрица A_{11} описывает нулевую динамику системы.

Сокращённо эта система может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{O_{(|r|-m) \times (n-|r|)}}{A_{21}} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{O_{(|r|-m) \times (m)}}{H_r} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} F_{r_1-1} & O & \dots & O & G_1 \\ O & F_{r_2-1} & \dots & O & G_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & F_{r_m-1} & G_m \end{bmatrix},$$

матрицы $F_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ имеют вид

$$F_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = [0],$$

а матрицы $G_p \in \mathbb{R}^{(r_p-1) \times m}$ состоят из нулей, за исключением одной единицы в позиции $(r_p - 1, p)$.

Учитывая введенные ранее обозначения и применяя этот результат к рассматриваемой гипервыходной системе, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть система (3) обладает чистым относительным порядком по выходам $y_1, \dots, y_m$. Тогда она обратимым преобразованием приводима к форме с выделением нулевой динамики

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi, \\ z &= C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}.\end{aligned}$$

Оказывается, эту форму можно усилить. Пусть c_i — строки матрицы C , $i = 1, 2, \dots, l$ тогда каждой строке c_i можно сопоставить r_i из определения относительного порядка. По аналогии со случаем квадратных систем, вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$ также называется вектором относительного порядка. Имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть гипервыходная система (3) обладает вектором компонент относительно-го порядка $r = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_l)$, причём $r_i \leq r_j$ при $1 \leq i \leq m$, $m+1 \leq j \leq l$, а по первым m компонентам относительный порядок чистый. Тогда система может быть приведена невырожденным преобразованием к форме

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi, \\ z &= C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}.\end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что в данном случае z зависит лишь от выходов системы, но не их производных.

Инвариантные нули гипервыходных систем. Другим важным для решения задачи обращения понятием является матрица Розенброка системы. Напомним, что для системы вида (2) она определяется следующим образом:

$$R(s, \Delta) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A(\Delta) & -B(\Delta) \\ \hline C(\Delta) & 0 \end{array} \right], \quad \Delta = e^{-\tau s}.$$

Инвариантными нулями системы называются такие значения s_0 , при которых ранг матрицы Розенброка меньше полного. Известно, что инвариантные нули не меняются при заменах координат. Тогда, воспользовавшись реализацией (5) системы (2), запишем её матрицу Розенброка в следующем блочном виде:

$$R(s, \Delta) = \left[\begin{array}{cc|c} sI - A_{11}(\Delta) & -A_{12}(\Delta) & 0 \\ \hline -\bar{A}_{21}(\Delta) & sI - \bar{A}_{22}(\Delta) & -\bar{B}(\Delta) \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline C_{21}(\Delta) & C_{22}(\Delta) & 0 \end{array} \right].$$

Ясно, что ранг $R(s, \Delta)$ не зависит от блоков третьей строки и второго столбца, а потому её инвариантные нули совпадают с таковыми матрицы

$$\begin{aligned}R'(s, \Delta) &= \left[\begin{array}{c|c} sI - A_{11}(\Delta) & 0 \\ \hline -\bar{A}_{21}(\Delta) & -\bar{B}(\Delta) \\ \hline C_{21}(\Delta) & 0 \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} sI - A_{11}(\Delta) & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline -\bar{A}_{21}(\Delta) & -\bar{H}_r(\Delta) \\ \hline C_{21}(\Delta) & 0 \end{array} \right].\end{aligned}$$

Если система обладает чистым относительным порядком, то матрица H_r обратима и, следовательно, инвариантные нули R' совпадают с инвариантными нулями матрицы

$$R''(s, \Delta) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A_{11}(\Delta) \\ \hline C_{21}(\Delta) \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{[(n-|r|)+(l-m)] \times [n-|r|]}.$$

Поскольку матрица является прямоугольной, в общем случае у системы инвариантных нулей не будет.

Оказывается, что это условие связано с наблюдаемостью систем с запаздыванием.

Определение 2 [4]. Система (2) спектрально наблюдаема, если она наблюдаема на бесконечности, т.е. при нулевом управлении для любой начальной функции, порождающей нулевой выход на $[0, +\infty)$, найдётся момент времени t_1 , такой, что $x(t) = 0$ при $t \geq t_1$.

Теорема 3 [4]. Система (2) спектрально наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} sI - A(\Delta) \\ C(\Delta) \end{pmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что спектральная наблюдаемость системы позволяет построить для неё асимптотический (вообще говоря, распределённый) наблюдатель [5].

Таким образом, в общем случае (т.е. при отсутствии у системы инвариантных нулей) пара $\langle C_{21} | A_{11} \rangle$ спектрально наблюдаема и, следовательно, мы можем получить оценку вектора $\bar{x}$ из (6).

Обращение гипервыходных систем. Для построения оценки неизвестного входного сигнала ξ обратимся к последней группе уравнений системы (4).

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi.$$

Предположим, что первые m компонент вектора относительного порядка равны единице: $r = (1, \dots, 1, r_{m+1}, \dots, r_l)$. Тогда для обращения системы можно применить методы, описанные в [1] для квадратных систем. Всё вышесказанное позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 4. Пусть гипервыходная система (1) приводима к виду (6) и обладает чистым единичным векторным относительным порядком по выходам y , система не имеет инвариантных нулей, неизвестный сигнал

$$\xi(t) \in \Omega^1 = \left\{ \xi(t) : \xi \in C^1[0, \infty), |\xi(t)| \leq \xi_0, |\dot{\xi}(t)| \leq \xi_1 \right\}.$$

Тогда существует инвертор, дающий оценку $\hat{\xi}(t)$ для неизвестного сигнала $\xi(t)$ с произвольной наперед заданной точностью, начиная с некоторого момента t^* .

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17–07–00899, 18–07–00540, 18–37–00106).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атамась Е.И., Ильин А.В., Фомичев В.В. Обращение векторных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1363–1369.
2. Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В. О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // ДАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 11–15.
3. Conte G., Perdon A.M., Moog C.H. Inversion and Tracking Problems for Time Delay Linear Systems // In: Applications of Time Delay Systems. B.; Heidelberg: Springer, 2007. P. 267–284.
4. Lee E.B., Olbrot A. Observability and Related Structural Results for Linear Hereditary Systems // Intern. J. Control. 1981. V. 34. № 6. P. 1061–1078.
5. Watanabe K. Finite Spectrum Assignment and Observer for Multivariable Systems with Commensurate Delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. 31. № 6. P. 543–550.

INVERSION OF HYPEROUTPUT TIME-DELAY SYSTEMS

Corresponding Member of the RAS A. V. Il'in^{1,2,3}, E. I. Atamas², V. V. Fomichev^{1,2,3}

¹ School of Science, Hangzhou Dianzi University, China

² Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

³ Center for Information Technology in the design of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Received September 11, 2018

An inversion problem for LTI hyperoutput time-delay system is considered. For such systems canonical form with isolated zero dynamics is obtained, system invariant zeros and their relation to spectral observability of zero dynamics subsystem are investigated. Using this results, inversion algorithm is suggested for time-delay systems.

Keywords: inversion of dynamic systems, systems with delay, MIMO systems.