ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 5, с. 542–546

МЕХАНИКА

УДК 539.3

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Л. М. Зубов

Представлено академиком РАН В.А. Бабешко 25.07.2018 г.

Поступило 13.08.2018 г.

Рассматривается задача о больших деформациях составного нелинейно-упругого полого цилидра, подверженного внутреннему и внешнему давлениям и нагруженного по торцам продольной силой и крутящим моментом. Составной цилиндр представляет собой трубу с внутренним и внешним покрытиями в форме предварительно напряжённых полых круговых цилиндров. Найдено точное решение задачи, которое справедливо для любых моделей изотропных несжимаемых упругих материалов.

Ключевые слова: нелинейная упругость, изотропные несжимаемые материалы, предварительно деформированные слои, растяжение, кручение, раздувание, универсальное решение.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524845542-546

В нелинейной теории упругости известен [1–5] ряд семейств конечных деформаций, являющихся универсальными решениями уравнений равновесия, т.е. решениями, пригодными для любого материала из определённого класса. К универсальным решениям для изотропных несжимаемых однородных тел относится деформация кручения, раздувания и растяжения-сжатия полого кругового цилиндра [6–9]. Задачи кручения призматических и естественно закрученных стержней в рамках трёхмерной нелинейной теории упругости исследованы в [10, 11]. На основе общей модели изотропного несжимаемого нелинейно-упругого тела решены задача кручения сплошного кругового цилиндра с центральным предварительно напряжённым включением [12] и задача кручения цилиндра с сосредоточенной винтовой дислокацией [13].

В представленной работе получено точное и универсальное в классе изотропных несжимаемых материалов решение задачи о нелинейных деформациях кручения, радиального расширения или сжатия и осевого растяжения-сжатия трёхслойной цилиндрической трубы. Внешний и внутренний слои трубы содержат неоднородные поля предварительных напряжений. К появлению предварительных напряжений в поверхностных слоях конструкций могут приводить химическое парофазное осаждение и напыление, атомно-силовое осаждение, 3D-печать и другие технологические процессы.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: zubovl@yandex.ru

1. Рассмотрим цилиндрическую трубу, которая в естественном, ненапряжённом состоянии занимает область $r_{**} \le r \le r_*$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le z \le L$, где r, ϕ, z — круговые цилиндрические координаты, связанные с декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 соотношениями $x_1 = r\cos\phi$, $x_2 = r\sin\phi$, $x_3 = z$. Труба снабжена внешним и внутренним покрытиями в форме полых круговых цилиндров. Эти цилиндры присоединяются к трубе и скрепляются с ней после их предварительной деформации. Начальная деформация внешнего цилиндрического покрытия задаётся соотношениями

$$r = r(\rho),\ \ \phi = k_0\theta + t_0\zeta,\ \ z = b_0\theta + l_0\zeta. \tag{1}$$

Здесь ρ, θ, ζ — цилиндрические координаты точек внешнего покрытия в его естественном состоянии, k_0, t_0, b_0, l_0 — постоянные. Предварительная деформация внутреннего покрытия выражается аналогичными формулами

$$r = r(\eta),\ \ \phi = k_1\chi + t_1\xi,\ \ z = b_1\chi + l_1\xi, \tag{2}$$

где η, χ, ξ — цилиндрические координаты точек внутреннего покрытия в естественном состоянии. Внутренний и внешний радиусы каждого покрытия обозначим соответственно ρ_1, ρ_0 и η_1, η_0, откуда имеем $\rho_1 \le \rho \le \rho_0$, $\eta_1 \le \eta \le \eta_0$. Согласно (1), (2), предварительная деформация покрытий описывается четырёхпараметрическими семействами функций и представляет собой [14] осевое растяжение-сжатие, радиальное расширение или сжатие и кручение в сочетании с образованием винтовой дислокации и клиновой дисклинации. Данный подход позволяет моделировать достаточно широкий класс статически возможных полей предварительных напряжений в покрытиях.

Градиент деформации [2–4], соответствующий переходу от естественной конфигурации к предварительно напряжённому состоянию, выражается для внешнего и внутреннего покрытия соответственно формулами

$$\mathbf{P}_0 = \frac{dr}{d\rho}\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_r + \frac{k_0 r}{\rho}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\phi + \frac{b_0}{\rho}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{i}_3 + t_0 r \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\phi + l_0 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \tag{3}$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{dr}{d\eta}\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{k_1 r}{\eta}\mathbf{e}_\chi \otimes \mathbf{e}_\phi + \frac{b_1}{\eta}\mathbf{e}_\chi \otimes \mathbf{i}_3 + t_1 r \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\phi + l_1 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \tag{4}$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos\phi + \mathbf{i}_2 \sin\phi,\ \ \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{i}_1 \sin\phi + \mathbf{i}_2 \cos\phi,$$

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}_1 \cos\theta + \mathbf{i}_2 \sin\theta,\ \ \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1 \sin\theta + \mathbf{i}_2 \cos\theta,$$

$$\mathbf{e}_\eta = \mathbf{i}_1 \cos\chi + \mathbf{i}_2 \sin\chi,\ \ \mathbf{e}_\chi = -\mathbf{i}_1 \sin\chi + \mathbf{i}_2 \cos\chi.$$

Здесь $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – постоянные орты декартовых координат. Материал каждого слоя составного цилиндра предполагается несжимаемым. Из условия несжимаемости $\det\mathbf{P}_0 = \det\mathbf{P}_1 = 1$ получим дифференциальные уравнения для определения функций $r(\rho)$ и $r(\eta)$. Решения этих уравнений, удовлетворяющие условиям контакта $r(\rho_1) = r_*$, $r(\eta_0) = r_{**}$, имеют вид

$$\begin{aligned} r(\rho) &= \sqrt{r_*^2 + \Lambda_0^{-1}\left(\rho^2 - \rho_1^2\right)},\ \ \Lambda_0 = k_0 l_0 - b_0 t_0, \\ r(\eta) &= \sqrt{r_{**}^2 - \Lambda_1^{-1}\left(\eta_0^2 - \eta^2\right)},\ \ \Lambda_1 = k_1 l_1 - b_1 t_1. \end{aligned} \tag{5}$$

В дальнейшем геометрические параметры рассматриваемой конструкции r_*, r_{**}, ρ_0, ρ_1, η_0, η_1, а также параметры предварительной деформации покрытий b_α, k_α, l_α, t_α ($\alpha = 0, 1$) считаются заданными величинами.

2. При решении задачи о радиальном расширении-сжатии, кручении и продольном растяжении-сжатии составной трубы за отсчётную конфигурацию принимается такая, которая представляет собой естественное состояние для среднего цилиндрического слоя и является предварительно напряжённой для цилиндрических покрытий. Цилиндрические координаты r, ϕ, z образуют единую для составного цилиндра систему лагранжевых координат, используемую для описания больших деформаций трёхслойной трубы. В этой отсчётной конфигурации составная труба занимает область $r_1 \le r \le r_0$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le z \le L$. Радиусы r_0, r_1 выражаются через заданные параметры предварительной деформации покрытий:

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{r_*^2 + \Lambda_0^{-1}\left(\rho_0^2 - \rho_1^2\right)}, \\ r_1 &= \sqrt{r_{**}^2 - \Lambda_1^{-1}\left(\eta_0^2 - \eta_1^2\right)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим R, Φ, Z цилиндрические эйлеровы координаты, т.е. координаты точек составного цилиндра в конечном состоянии и будем отыскивать деформацию тела в виде

$$R = R(r),\ \ \Phi = \phi + \psi z,\ \ Z = \lambda z, \tag{7}$$

где постоянные ψ и λ означают соответственно угол закручивания и кратность осевого удлинения трёхслойной трубы.

При помощи (7) находим градиент деформации, соответствующий переходу от естественного состояния среднего слоя в конечное, а также переходу от промежуточной конфигурации внешнего и внутреннего покрытий в конечное состояние составного цилиндра:

$$\mathbf{C} = \frac{dR}{dr}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R}{r}\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \psi R \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + \lambda \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \tag{8}$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{i}_1 \cos\Phi + \mathbf{i}_2 \sin\Phi,\ \ \mathbf{e}_\Phi = -\mathbf{i}_1 \sin\Phi + \mathbf{i}_2 \cos\Phi.$$

Функция $R(r)$ находится из условия несжимаемости $\det\mathbf{C} = 1$ и имеет вид

$$R = \sqrt{R_1^2 + \lambda^{-1}\left(r^2 - r_1^2\right)},\ \ r_1 \le r \le r_0, \tag{9}$$

где R_1 — внутренний радиус трубы в конечном состоянии. Внешний радиус деформированной трубы R_0 определяется через R_1 по формуле $R_0 = \sqrt{R_1^2 + \lambda^{-1}\left(r_0^2 - r_1^2\right)}$. Из (9) вытекают выражения для радиусов границ раздела слоёв в конечном состоянии составной трубы:

$$\begin{aligned} R_* &= \sqrt{R_1^2 + \lambda^{-1}\left(r_*^2 - r_1^2\right)}, \\ R_{**} &= \sqrt{R_1^2 + \lambda^{-1}\left(r_{**}^2 - r_1^2\right)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Согласно известной [2–4] формуле преобразования градиента деформации при изменении отсчётной конфигурации, градиенты деформации $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{C}_1$, соответствующие переходу внешнего и внутреннего покрытий из их ненапряжённых конфигураций в конечное состояние, будут иметь выражения

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{C} = \frac{\rho}{\Lambda_0 \lambda R}\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_R +$$

$$+ (k_0 + b_0\psi)\rho^{-1}R\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Phi + b_0\lambda\rho^{-1}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{i}_3 + \\ + (t_0 + l_0\psi)R\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + l_0\lambda\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (11)$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{C} = \frac{\eta}{\Lambda_1\lambda R}\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_R + \\ + (k_1 + b_1\psi)\eta^{-1}R\mathbf{e}_\chi \otimes \mathbf{e}_\Phi + b_1\lambda\eta^{-1}\mathbf{e}_\chi \otimes \mathbf{i}_3 + \\ + (t_1 + l_1\psi)R\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + l_1\lambda\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (12)$$

3. Определяющее соотношение изотропного несжимаемого упругого материала записывается следующим образом [4]:

$$\mathbf{T} = [\alpha(I_1, I_2) + I_1\beta(I_1, I_2)]\mathbf{F} - \beta(I_1, I_2)\mathbf{F}^2 - q\mathbf{E}, \quad (13)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}, \; I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{F}, \; I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}^2\mathbf{F} - \mathrm{tr}\mathbf{F}^2\right), \quad (14)$$

$$\alpha(I_1, I_2) = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}, \; \beta(I_1, I_2) = 2\frac{\partial W}{\partial I_2}. \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{F}$ — мера деформаций Фингера, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, q — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию, α, β — скалярные функции отклика, $W(I_1, I_2)$ — удельная энергия деформации, I_1, I_2 — первый и второй инварианты тензора $\mathbf{F}$ (третий инвариант равен единице в силу условия несжимаемости). Представление (13) справедливо в случае, когда градиент деформации и мера деформаций Фингера отсчитываются от естественного состояния тела. Из (8), (11), (12) вытекает, что тензорное поле $\mathbf{F}$ во всех точках составной трубы, т.е. при $R_1 \le R \le R_0$, имеет следующее разложение:

$$\mathbf{F} = F_{RR}(R)\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + F_{\Phi\Phi}(R)\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \\ + F_{\Phi Z}(R)(\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi) + F_{ZZ}(R)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (16)$$

В силу (8), (11), (12) компоненты тензора (16) имеют разные выражения на разных участках промежутка $R_1 \le R \le R_0$, а именно:
в области $R_1 \le R < R_{**}$

$$F_{RR} = \frac{\eta^2}{\lambda^2\Lambda_1^2R^2}, \\ F_{\Phi\Phi} = (k_1 + b_1\psi)^2\eta^{-2}R^2 + (t_1 + l_1\psi)^2R^2, \\ F_{\Phi Z} = l_1\lambda(t_1 + l_1\psi)R + b_1\lambda(k_1 + b_1\psi)\eta^{-2}R, \\ F_{ZZ} = \left(l_1^2 + b_1^2\eta^{-2}\right)\lambda^2; \quad (17)$$

в области $R_{**} < R < R_*$

$$F_{RR} = \frac{r^2}{\lambda^2R^2}, \; F_{\Phi\Phi} = \frac{R^2}{r^2} + \psi^2R^2, \\ F_{\Phi Z} = \lambda\psi R, \; F_{ZZ} = \lambda^2; \quad (18)$$

в области $R_* < R \le R_0$

$$F_{RR} = \frac{\rho^2}{\lambda^2\Lambda_0^2R^2}, \\ F_{\Phi\Phi} = (k_0 + b_0\psi)^2\rho^{-2}R^2 + (t_0 + l_0\psi)^2R^2, \quad (19\text{а})$$

$$F_{\Phi Z} = l_0\lambda(t_0 + l_0\psi)R + b_0\lambda(k_0 + b_0\psi)^2\rho^{-2}R, \\ F_{ZZ} = \left(l_0^2 + b_0^2\rho^{-2}\right)\lambda^2. \quad (19\text{б})$$

Если учесть вытекающие из (4), (9) соотношения

$$\eta^2 = \eta_1^2 + \lambda\Lambda_1\left(R^2 - R_1^2\right), \; R_1 \le R < R_{**}, \quad (20)$$

$$r^2 = r_1^2 + \lambda\left(R^2 - R_1^2\right), \; R_{**} < R < R_*, \quad (21)$$

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \lambda\Lambda_0\left(R^2 - R_*^2\right), \; R_* < R \le R_0, \quad (22)$$

то формулы (17)–(19) приводят к явным выражениям компонент меры деформаций Фингера в трёхслойной трубе как функций радиальной эйлеровой координаты R. Эти функции разрывны и претерпевают скачки на поверхностях раздела слоёв $R = R_*$ и $R = R_{**}$. Инварианты тензора $\mathbf{F}$ выражаются через его компоненты:

$$I_1 = F_{RR} + F_{\Phi\Phi} + F_{ZZ}, \\ I_2 = F_{RR}(F_{\Phi\Phi} + F_{ZZ}) + F_{RR}^{-1}. \quad (23)$$

Будем считать, что все три слоя составной трубы изготовлены из разных материалов. Это означает, что функции отклика $\alpha(I_1, I_2)$ и $\beta(I_1, I_2)$ в (13) различны для разных слоёв. В дальнейшем функции отклика для внешнего покрытия будем обозначать α_0, β_0, а для внутреннего покрытия α_1, β_1. Для функций отклика среднего слоя сохраняются обозначения α, β, использованные в (13).

4. Векторное уравнение равновесия в эйлеровых координатах при отсутствии массовых сил имеет вид

$$\mathbf{e}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial R} + \frac{1}{R}\mathbf{e}_\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \Phi} + \mathbf{i}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial Z} = 0. \quad (24)$$

Из (13), (16)–(19) и (24) вытекает, что давление q не зависит от координат Φ, Z, тензор напряжений Коши имеет представление

$$\mathbf{T} = \sigma_R(R)\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \sigma_\Phi(R)\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \\ + \tau_{\Phi Z}(R)(\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi) + \sigma_Z(R)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (25)$$

а векторное уравнение (24) сводится к одному скалярному

$$\frac{d\sigma_R}{dR} + \frac{\sigma_R - \sigma_\Phi}{R} = 0. \quad (26)$$

Согласно (13), (16)–(22), (25) разность $(\sigma_R - \sigma_\Phi)$ — известная функция переменной R. Считая, что трёхслойная труба нагружена внешним p_0 и внутренним p_1 давлениями, приходим к следующим граничным условиям:

$$\sigma_R(R_0) = -p_0, \ \sigma_R(R_1) = -p_1. \qquad (27)$$

Решение уравнения (26), удовлетворяющее первому граничному условию (27), имеет вид

$$\sigma_R(R) = \int_R^{R_0} B(R)dR - p_0, \ R_1 \le R \le R_0. \qquad (28)$$

Разрывная функция $B(R)$ определяется при помощи (13), (16)–(22), (25) и задаётся разными выражениями в разных слоях составной трубы:
в области $R_1 \le R < R_{**}$

$$RB(R) = [\alpha_1(I_1, I_2) + I_1\beta_1(I_1, I_2)](F_{RR} - F_{\Phi\Phi}) + \\ + \beta_1(I_1, I_2)\left(F_{\Phi\Phi}^2 + F_{\Phi Z}^2 - F_{RR}^2\right), \qquad (29)$$

в области $R_{**} < R < R_*$

$$RB(R) = [\alpha(I_1, I_2) + I_1\beta(I_1, I_2)](F_{RR} - F_{\Phi\Phi}) + \\ + \beta(I_1, I_2)\left(F_{\Phi\Phi}^2 + F_{\Phi Z}^2 - F_{RR}^2\right), \qquad (30)$$

в области $R_* < R \le R_0$

$$RB(R) = [\alpha_0(I_1, I_2) + I_1\beta_0(I_1, I_2)](F_{RR} - F_{\Phi\Phi}) + \\ + \beta_0(I_1, I_2)\left(F_{\Phi\Phi}^2 + F_{\Phi Z}^2 - F_{RR}^2\right). \qquad (31)$$

Напомним, что в качестве компонент тензора $\mathbf{F}$ в формулы (29)–(31) следует подставлять соответственно выражения (17)–(19). То же самое относится к инвариантам деформации, вычисляемым согласно (23).

Если на внутренней поверхности трубы задано гидростатическое давление p_1, то постоянная R_1 заранее не известна. Соотношением для её определения служит второе граничное условие (27). После нахождения напряжения $\sigma_R(R)$ по формуле (28) функция $q(R)$ и напряжения $\sigma_\Phi(R)$, $\sigma_Z(R)$ и $\tau_{\Phi Z}(R)$ определяются при помощи уравнений состояния материала (13) и соотношений (16)–(22). Очевидно, что, вообще говоря, напряжения $\sigma_\Phi(R)$, $\sigma_Z(R)$ и $\tau_{\Phi Z}(R)$ — разрывные функции, претерпевающие скачки на границах раздела слоёв, в то время как $\sigma_R(R)$ — непрерывная функция.

Система напряжений, действующих в поперечном сечении составного цилиндра $Z = \text{const}$, статически эквивалентна продольной силе Q и крутящему моменту G, которые одинаковы для всех сечений и вычисляются по формулам

$$Q = 2\pi\int_{R_1}^{R_0} \sigma_Z(R)RdR, \ G = 2\pi\int_{R_1}^{R_0} \tau_{\Phi Z}(R)R^2dR. \qquad (32)$$

Полученное выше точное решение задачи о больших деформациях трубы с предварительно напряжёнными покрытиями пригодно для любых моделей изотропных несжимаемых упругих тел, т.е. универсально в указанном классе материалов.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 18–11–00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ericksen J.L.* // Zeitschr. angew. Math. und Phys. 1954. V. 5. P. 466–486.
2. *Truesdell C., Noll W.* The Nonlinear Field Theories of Mechanics. In: Handbuch der Physik. B.: Springer, 1965. V. 3/3. P. 1–602.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
5. *Saccomandi G.* Non-Linear Elasticity: Theory and Applications // London. Math. Soc. Lect. Notes. 2001. V. 283. P. 97–134.
6. *Rivlin R.S.* // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1949. A 242. P. 173–195.
7. *Green A.E., Adkins J.E.* Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics. Oxford: Clarendon Press, 1960.
8. *Ogden R. W.* Non-Linear Elastic Deformations. N.Y.: Dover, 1997.
9. *Zubov L.M., Sheidakov D.N.* // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2008. V. 75. P. 0110021–0110026.
10. *Zubov L.M., Bogachkova L.U.* // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62. P. 373–379.
11. *Зубов Л.М.* // ПММ. 2006. Т. 70. В. 2. С. 332–343.
12. *Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M.* // Int. J. Solids Struct. 2014. V. 51. P. 1403–1409.
13. *Галаско А.А., Зубов Л.М.* // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2015. № 4. С. 35–43.
14. *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. B.: Springer, 1997.

LARGE DEFORMATIONS OF A CYLINDRICAL TUBE WITH PRESTRESSED COATINGS

L. M. Zubov

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.A. Babeshko July 25, 2018

Received August 13, 2018

The problem of large deformations in a combined nonlinear elastic hollow cylinder under internal and external pressures, loaded with a longitudinal force and torque at the end faces, is under consideration. The combined cylinder is a tube with the internal and external coatings in the form of prestressed hollow circular cylinders. An exact solution to the problem is found, which is valid for any model of isotropic incompressible elastic materials.

Keywords: nonlinear elasticity, isotropic incompressible materials, preliminarily strained layers, tension, torsion, inflation, universal solution.