*ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 1, с. 7–10*

МАТЕМАТИКА

*УДК 517.31+511.4*

# КРИВЫЕ ТИПА ПЕАНО, ЧИСЛА ЛИУВИЛЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

**А. Н. Агаджанов**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 19.09.2018 г.

Поступило 03.10.2018 г.

В сообщении с позиции теории чисел рассматриваются кривые типа Пеано в многомерном евклидовом пространстве. В отличие от кривых, построенных Д. Гильбертом, А. Лебегом, В. Серпинским и др., в настоящей работе представлены результаты, показывающие, что каждая такая кривая является непрерывным образом универсальных (общих для всех кривых) нигде не плотных совершенных множеств из отрезка [0, 1] с нулевой $s$-мерной мерой Хаусдорфа, состоящих исключительно из чисел Лиувилля. Приводится пример задачи, в которой пара непрерывных функций, управляющих поведением колебательной системы, порождает на плоскости кривую типа Пеано.

*Ключевые слова*: кривые типа Пеано, совершенные множества, числа Лиувилля, микроскопические множества, уравнение Клейна—Гордона.

**DOI:** https://doi.org/10.31857/S0869-565248517-10

Под кривыми типа Пеано в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) будем понимать континуумы, т.е. непустые связные компакты, которые имеют внутренние точки и представляются при любом $\varepsilon > 0$ в виде суммы конечного числа подконтинуумов диаметра меньше $\varepsilon$ [1].

Эти кривые названы в честь итальянского математика Джузеппе Пеано, построившего в 1980 г. первый пример непрерывного отображения отрезка [0, 1] на квадрат $[0, 1]^2$. В дальнейшем аналогичные примеры были построены Гильбертом, Лебегом, Серпинским и др. Обширная библиография, посвящённая кривым типа Пеано, приведена в [2, 3].

Пусть $0 \leq t \leq 1$. Общий принцип построения кривых типа Пеано основан на выборе таких функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t) \in C_{[0,1]}$, что образ отрезка [0, 1] при непрерывном отображении

$$t \to (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

оказывается локально связным континуумом в $\mathbb{R}^n$, имеющим внутренние точки. Как известно [1], из локальной связности континуумов следует их представимость в виде суммы конечного числа подконтинуумов диаметра меньше $\varepsilon$.

Функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ называют координатными функциями, порождающими в $\mathbb{R}^n$ кривые типа Пеано.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва*
*E-mail*: *ashot_ran@mail.ru*

В [4, 5] показано, что многомерный единичный куб может быть получен как непрерывный образ множеств, имеющих нулевую $s$-мерную меру Хаусдорфа на отрезке [0, 1].

В настоящей работе получены результаты, из которых следует, что кривая типа Пеано в $\mathbb{R}^n$ является непрерывным образом некоторых совершенных множеств из [0, 1], имеющих однородную числовую природу, а именно состоящих из различных классов, принадлежащих множеству чисел Лиувилля. В сообщении описаны три таких множества. Отметим, что каждое из них имеет нулевую $s$-мерную меру Хаусдорфа и, следовательно, относится к “малым” множествам в смысле теории категорий Бэра [6].

Центральное место в работе занимает

Т е о р е м а 1. *Произвольная кривая типа Пеано в $\mathbb{R}^n$ является непрерывным образом универсального* (*общего для всех кривых*) *нигде не плотного совершенного множества*, *представляющего микроскопическое множество*.

В смысле теории $s$-мерной меры Хаусдорфа микроскопические множества [7], имея мощность континуума, являются значительно “меньшими”, чем множество чисел Лиувилля.

## 1. НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫЕ СОВЕРШЕННЫЕ МНОЖЕСТВА НА [0, 1] И ЧИСЛА ЛИУВИЛЛЯ

Приведём необходимые определения [8, 9].

О п р е д е л е н и е 1. Действительное число $\xi \in (0, 1)$ называется ч и с л о м Л и у в и л л я, если оно иррационально и для каждого натурального $k$ существуют целые $m$ и $n$, такие что

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^k} \quad \text{и} \quad n > 1.$$

Известно, что любое число Лиувилля является трансцендентным.

Определение 2. Действительное число $\xi \in \in (0, 1)$ называется $m$-ультрачислом Лиувилля, если существует бесконечное множество алгебраических чисел $(\alpha_n)$ порядка $m$, таких что

$$0 < |\xi - \alpha_n| < (\exp^{[3]}(H(\alpha_n)))^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $\exp^{[3]}(x) = \exp(\exp(\exp(x)))$, $H(\alpha)$ — высота алгебраического числа $\alpha$ [10].

Определение 3. Действительное число $\xi \in \in (0, 1)$ называется ультрачислом Лиувилля, если для каждого натурального $k$ существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{m}{n}$ $(n > 1)$, таких что

$$0 < \left|\xi - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(n)}.$$

Отметим, что множества чисел Лиувилля, $m$-ультрачисел Лиувилля и ультрачисел Лиувилля являются базисными на (0, 1), иначе говоря, каждое действительное число из (0, 1) может быть представлено в виде суммы элементов из этих множеств [8, 9]. Подчеркнём, что эти множества имеют на (0, 1) мощность континуума, являются всюду плотными и их $s$-мерная мера Хаусдорфа равна нулю.

Напомним, что некоторое множество $E \in (0, 1)$ имеет нулевую $s$-мерную меру Хаусдорфа, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность интервалов $I_n$, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|^s < \varepsilon$ и $|I_n| < \varepsilon$ при всех $n$.

Приведём ряд утверждений, имеющих принципиальное значение в теории кривых типа Пеано.

Утверждение 1. *Произвольное множество из* (0, 1) *с нулевой $s$-мерной мерой Хаусдорфа содержится в некотором $G_\delta$-нуль-множестве.*

Утверждение 2. *Пусть $L$ — множество чисел Лиувилля из* (0, 1). *Существует нигде не плотное совершенное множество $U_0$, состоящее исключительно из чисел Лиувилля.*

Утверждение 3. *Пусть $L_m$ — множество $m$-ультрачисел из* (0, 1). *Существует нигде не плотное совершенное множество $U'_m \subset L_m$.*

Утверждение 4. *Пусть $L_u$ — множество ультрачисел из* (0, 1). *Существует нигде не плотное совершенное множество $L'_u \subset L_u$.*

Имеет место следующая

Теорема 2. *Отрезок* [0, 1] *является непрерывным образом совершенных множеств $U_0$, $U'_m$, $L'_u$, причём непрерывные отображения осуществляются сужениями на эти множества соответствующих возрастающих сингулярных по Лебегу функций.*

Иначе говоря, отрезок [0, 1] в топологическом смысле можно считать одномерной кривой типа Пеано.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Произвольная кривая типа Пеано в $\mathbb{R}^n$ является непрерывным образом каждого из нигде не плотных совершенных множеств $U_0$, $U'_m$, $L'_u$, причём координатные функции $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, порождающие эту кривую, представляются в виде $\varphi_i(g_j(\tau))$.*

Здесь $j = 1, 2, 3$, $g_j(\tau)$ — сужения возрастающих сингулярных по Лебегу функций на множества $U_0$, $U'_m$, $L'_u$ соответственно.

Утверждение 5. *Каждая из сингулярных функций $g_j(t)$ является поточечным пределом последовательности сингулярных функций, не имеющих интервалов монотонности.*

Дополнительную информацию о сингулярных функциях можно найти в [11, 12].

Кривые типа Пеано оказываются также непрерывными образами микроскопических множеств из отрезка [0, 1]. Свойства микроскопических множеств описаны в статье [7].

Определение 4. Множество $E \subset [0, 1]$ называется микроскопическим, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует последовательность интервалов $\{I_n\}$ таких, что $E \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n$ и $\lambda(I_n) \leq \varepsilon^n$ при каждом $n$ ($\lambda(I_n)$ — мера Лебега интервала $I_n$).

Среди микроскопических множеств имеются совершенные множества, не обладающие условием числовой однородности. Иначе говоря, среди их элементов имеются числа, отличные от чисел Лиувилля.

Относительно роли микроскопических множеств в теории кривых типа Пеано следует отметить теорему 1, приведённую выше.

## 2. ПРИМЕР КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ПРИ УПРАВЛЕНИИ КОТОРОЙ ВОЗНИКАЕТ КРИВАЯ ТИПА ПЕАНО НА ПЛОСКОСТИ

В последние десятилетия активно изучаются задачи граничного управления колебательными системами. Обширную библиографию по этим вопросам можно найти, например, в [13].

Рассмотрим колебательные системы, динамика которых описывается функциями $Q(x, t)$ $(0 \le x \le 1,$ $t \ge 0)$, имеющими интегральные представления Клейна—Гордона [14]:

$$Q(x, t) = \sum_{i=1}^{5} I_i(x, t), \tag{1}$$

где

$$I_1(x, t) = \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi, \tau) \cdot L(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \tag{2}$$

$$I_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l s(\xi) \cdot f_0(\xi) \cdot L(x, \xi, t) d\tau, \tag{3}$$

$$I_3(x, t) = \int_0^l s(\xi) \cdot f_1(\xi) \cdot L(x, \xi, t) d\tau, \tag{4}$$

$$I_4(x, t) = p(0)\int_0^t \varphi_1(\tau) \cdot \Lambda_1(x, t - \tau) d\tau, \tag{5}$$

$$I_5(x, t) = p(l)\int_0^t \varphi_2(\tau) \cdot \Lambda_2(x, t - \tau) d\tau, \tag{6}$$

$$L(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \cdot u_n(\xi) \cdot \sin(t \cdot \sqrt{\lambda_n})}{\|u_n\|^2 \cdot \sqrt{\lambda_n}}, \quad \|u_n\|^2 = \int_0^l s(x) \cdot u_n^2(x) dx, \tag{7}$$

$$\Lambda_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} L(x, \xi, t)\bigg|_{\xi=0}, \quad \Lambda_2(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} L(x, \xi, t)\bigg|_{\xi=l}. \tag{8}$$

В (7) $\lambda_n$ и $u_n(x)$ представляют собственные числа и собственные функции задачи Штурма—Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(p(x)u'_x)'_x + (\lambda(s(x) - q(x)))u = 0, \tag{9}$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{10}$$

Предполагаются выполненными условия

$$Q|_{t=0} = f_0(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\bigg|_{t=0} = f_1(x), \tag{11}$$

$$Q|_{x=0} = u(t), \quad Q|_{x=l} = v(t). \tag{12}$$

Поведением колебательной системы (1) можно управлять выбором функций $u(t)$ и $v(t)$.

Если функции $s(x)$, $p(x)$, $p'_x$, $q(x)$, $f_0(x)$, $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\Phi_1(x, t)$ обладают необходимой гладкостью, причём $s(x) > 0$, $p(x) > 0$ при $0 \le x \le l$, то функции $Q(x, t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению типа Клейна—Гордона

$$s(x) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - q(x) \cdot Q + \Phi(x, t). \tag{13}$$

Частными случаями уравнения (13) являются волновое и телеграфные уравнения [13].

Выбор модели поведения колебательной системы в виде (1) существенно снижает требования к гладкости функций, входящих в правые части представлений (2)–(12).

Предположим, что для функции $Q(x, t)$ поточечно выполняется условие $Q(x, t) = \lim\limits_{m\to\infty} Q_m(x, t)$, где $Q_m(x, t)$ из (1), а условия (12) имеют вид

$$Q_m|_{x=0} = u_m(t), \quad Q_m|_{x=l} = v_m(t). \tag{14}$$

В предположении существования непрерывных поточечных пределов $u(t) = \lim\limits_{m\to\infty} u_m(t)$ и $v(t) = \lim\limits_{m\to\infty} v_m(t)$, можно сделать вывод о том, что пара функций $(u(t), v(t))$ управляет поведением системы, когда её динамика описывается $Q(x, t)$.

В частности, если

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \cos(n_k \cdot t), \quad v_m(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \sin(n_k \cdot t)$$

являются лакунарными тригонометрическими полиномами при $m = 1, 2, \ldots$ ($n_k$ — натуральные числа, причём $\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge q > 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k| < +\infty$), то пара управляющих функций $(u(t), v(t))$ имеет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(n_k \cdot t), \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(n_k \cdot t)\right).$$

Например, при $a_k = \frac{1}{k^p}$ $(p > 1)$, $n_k = k!$, из теоремы Салема—Зигмунда [15] следует, что функции $(u(t), v(t))$ порождают на плоскости кривую типа Пеано.

Самостоятельный интерес представляют следующие утверждения.

Утверждение 6. *Для функции $u(t)$ множества $u(L)$, $u(L_m)$, $u(L_u)$ имеют вторую категорию по Бэру на множестве $u([0, 1])$.*

Аналогичное утверждение выполняется для функции $v(t)$.

Утверждение 7. *Для каждой функции $u(t)$, $v(t)$ существуют такие множества $A_1$, $A_2$ первой категории по Бэру на $[0, 1]$, что множества $u(A_1)$ и $v(A_2)$ являются множествами второй категории.*

Следствие 1. *Функции* $u(t)$, $v(t)$ *не обладают* $(N)$*-условием Лузина на* [0, 1] *в смысле теории категорий.*

Утверждение 8. *На отрезке* [0, 1] *существует множество второй категории, состоящее исключительно из чисел Лиувилля* $L^* \subset L$, *такое что функция* $u(t)$ *является взаимно однозначной на этом множестве.*

Аналогичное утверждение справедливо для функции $v(t)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М., 2010.
2. *Sagan H.* Space-Filling Curves. B.: Springer, 1994.
3. *Bader M.* Space-Filling Curves. B.: Springer, 2010.
4. *Liu W.* // Chinese J. Math. 1995. V. 23. P. 173–178.
5. *Ying-Fen Lin*, *Ngai-Ching Wong* // Comput. & Math. with Appl. 2003. V. 45. P. 1871–1881.
6. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М., 2008.
7. *Karasinska A.*, *Wagner-Bojakowska E.* // Topology Appl. 2012. V. 159. P. 1894–1898.
8. *Marques D.*, *Moreira C.G.* // Bull. Austral. Math. Soc. 2015. V. 15. P. 29–33.
9. *Marques D.*, *Ramirez J.* // Proc. Jap. Acad. Ser. A Math. Sci. 2015. V. 91. P. 25–28.
10. *Фельдман Н.И.*, *Шидловский А.Б.* // УМН. 1967. Т. 22. В. 3 (135). С. 3–81.
11. *Garg K.M.* // Rev. Roum. Math. Pureset Appl. 1969. V. 14. P. 1441–1452.
12. Агаджанов А.Н. // ДАН. 2014. Т. 454. № 3. С. 503–506.
13. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниям. М.: Физматлит, 2004.
14. *Полянин А.Д.* Линейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001.
15. *Salem R.*, *Zygmund A.* // Duke Math. J. 1945. V. 12. P. 569–578.

# PEANO-TYPE CURVES, LIOUVILLE NUMBERS, AND MICROSCOPIC SETS

**A. N. Agadzhanov**

Presented by Academician of the RAS S.N. Vasilyev September 19, 2018

Received October 3, 2018

Peano-type curves in multidimensional Euclidean space are considered in terms of number theory. In contrast to curves constructed by D. Hilbert, H. Lebesgue, V. Sierpinski, and others, this paper presents results showing that each such curve is a continuous image of universal (shared by all curves) nowhere dense perfect subsets of the interval [0, 1] with a zero s-dimensional Hausdorff measure that consist of only Liouville numbers. An example of a problem in which a pair of continuous functions controlling the behavior of an oscillating system generates a Peano-type curve in the plane is given.

*Keywords*: Peano-type curves, perfect sets, Liouville numbers, microscopic sets, Klein–Gordon equation.