УДК 517.956

ДЕТАЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМА ЭВОЛЮЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Член-корреспондент РАН А. И. Аптекарев*, Ю. Г. Рыков**

Поступило 03.09.2018 г.

Система уравнений газовой динамики без давления представляет собой гидродинамически обоснованное обобщение системы уравнений, состоящей из векторного уравнения Бюргерса в пределе исчезающей вязкости и закона сохранения массы. Последняя система уравнений интенсивно использовалась, в частности, в астрофизике для описания крупномасштабной структуры Вселенной. Решения векторного уравнения Бюргерса содержат интересную динамику особенностей, которая может описывать процессы концентрации. Однако эта динамика не удовлетворяет закону сохранения импульса, что не позволяет относиться к ней как к динамике материальных объектов. В настоящем сообщении исследуется динамика особенностей, сохраняющая импульс, на основе системы уравнений газовой динамики без давления. Эта динамика оказывается более разнообразной и сложной, однако для неё также возможно сформулировать вариационный подход, для которого в работе получены основные принципы и соотношения.

Ключевые слова: газовая динамика без давления, сильные особенности, соотношения Гюгонио, вариационное представление, процессы концентрации.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524846655-658>

Система уравнений газовой динамики без давления выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{U}) &= 0, \\ (\rho \mathbf{U})_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^l, t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{x})$ — плотность среды, $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ — вектор скорости, $\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$ обозначает тензорное произведение, а div_x матрицы — вектор div_x её строк. Система (1) дополняется начальными условиями $\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^l)$, $\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^l)$. Для определённости мы будем рассматривать (1) в случае пространственной размерности $l = 2$ и $l = 3$, хотя описанная ниже методология, вообще говоря, применима в случае любой размерности.

Хорошо известно, что система (1) допускает наличие сильных особенностей, характеризующихся наличием сильных разрывов у вектора скорости и дельта-особенностей на многообразиях разной размерности у плотности. Описание эволюции таких особенностей представляет основной интерес в изучении (1) и связанных с ней систем уравнений. В случае гладких решений система (1) может быть сведена к системе уравнений, состоящей из первого уравнения (1) — закона сохранения массы — и век-

торного уравнения Бюргерса—Хопфа (т.е. уравнения Бюргерса в пределе исчезающей вязкости).

Если дополнительно потребовать выполнения условия $\nabla \times \mathbf{U} = 0$, то $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \nabla \Phi(t, \mathbf{x})$, и векторное уравнение Бюргерса—Хопфа может быть записано в виде уравнения Гамильтона—Якоби для потенциала $\Phi(t, \mathbf{x})$:

$$\frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\nabla \Phi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(t, \mathbf{x})}{2} = 0. \quad (2)$$

Для уравнения (2) и его обобщений на общий выпуклый гамильтониан изучены вязкие решения, включая тонкие вопросы распространения векторного поля скоростей на пространственно-временные точки, находящиеся внутри особенностей разных размерностей (см. [1–3]). При этом использовалась вариационная трактовка вязких решений уравнений типа Гамильтона—Якоби. Этот результат, в частности, оказался востребованным в астрофизических приложениях (см. обзорную статью [4]), где всё же отмечалось, что в описанной модели не выполняется закон сохранения импульса. Другой подход к построению обобщённых решений на основе вариационного принципа для уравнений/систем типа Бюргерса—Хопфа ($l = 1$) см. в [5], многомерное обобщение этого подхода см. в [6].

Запись системы (1) основана на законах сохранения массы и импульса, однако, как показано в [7, 8], эволюция особенностей (1) уже не имеет гамильтонов характер, и её описание фактически представляет собой обобщение соотношений Гюго-

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской Академии наук, Москва

*E-mail: aptekaa@keldysh.ru**E-mail: yu-rykov@yandex.ru

нию для нестрогой гиперболической системы законов сохранения (1). Ввиду того что особенности возникают на многообразиях разных размерностей, задача получения согласованного обобщения соотношений Югонио является нетривиальной. Тем не менее результаты работы [9], полученные для двумерного случая, указывают путь, на котором возможны формулировка вариационного принципа для (1) и описание на его основе процесса концентрации материи. В настоящей работе приводится строгая постановка задачи об описании эволюции особенностей для (1) в случае двух и трёх пространственных переменных на основании вариационного представления слабых решений.

1. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Как хорошо известно, в случае одной пространственной переменной для получения обобщённых решений системы (1) оказывается достаточным найти точки $y(t, x)$ глобального минимума функции

$$J(t, x, y) = \int_0^y \left[u_0(s) - \frac{x-s}{t} \right] \rho_0(s) ds, \quad (3)$$

по которым обобщённое решение в точке (t, x) однозначно восстанавливается. Если таких точек глобального минимума несколько, то это означает наличие в решении разрыва с той или иной структурой.

В работе [9] показано, что в двумерном случае необходимо рассматривать вектор-функционал, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} J_i &\equiv \iint_A \left[u_{i0}(a, b) - \frac{x_i - \bar{a}_i}{t} \right] \rho_0(a, b) dadb \equiv \\ &\equiv \iint_A X_i(a, b) \frac{\partial(a, b)}{\partial(\tau, s)} d\tau ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{a}_1 = a$, $\bar{a}_2 = b$, $\frac{\partial(a, b)}{\partial(\tau, s)} \equiv (a_\tau b_s - b_\tau a_s)$, A — некоторая область в лагранжевых переменных (a, b) , а $(a(\tau, s), b(\tau, s))$ — параметризация этой области. Если определить $\frac{\delta J_i}{\delta A}$ — вариацию J_i по области A ,

то при фиксированных $(t, \mathbf{x})$ условия $\frac{\delta J_i}{\delta A} = 0$, $i = 1, 2$, определяют элемент кривой Γ_x в пространстве $\mathbf{x}$, на которой образуется дельта-функция плотности, при этом будет выполнен закон сохранения импульса (см. [8, 9]). В пространстве (a, b) этому элементу кривой Γ_x будет также соответствовать некоторая кривая $\Gamma_{(a,b)}$ вместе с инфинитезимальным элементом площади. Вещество, содержащееся

в этом инфинитезимальном элементе площади в начальный момент времени, в момент времени t будет сконцентрировано на кривой Γ_x . Если при фиксированном $(t, \mathbf{x})$ имеется несколько таких кривых $\Gamma_{(a,b)}$, которые ограничивают некоторую область $D(t)$, то условия

$$\iint_{D(t)} X_i(a, b) dadb = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

определяют движение особенности с дельта-функцией плотности в точке $(t, \mathbf{x})$ и обеспечивают выполнение закона сохранения импульса. Масса “тяжёлой” точки равна $\iint_{D(t)} \rho_0 dadb$.

Теперь перейдём к более конкретному математическому описанию рассмотренного механизма.

2. КОНКРЕТИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМА ЭВОЛЮЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

На некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим пространство $C^1(K)$ непрерывно дифференцируемых вектор-функций $(a(\tau, s), b(\tau, s))$. Определим следующие вектор-функции, $i = 1, 2$, $X_i(a, b)$ определено в (4):

$$\begin{aligned} J_i(\tau, s) &\equiv \iint_{\bar{A}} X_i(a, b) \frac{\partial(a, b)}{\partial(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \\ \Phi_i(\tau, s) &\equiv \int \bar{X}_i(a, b) \frac{\partial(a, b)}{\partial(\alpha, s)} d\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем рассматривать $\mathbf{J} = (J_1, J_2)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ как отображения $C^1(K)$ в пространство непрерывных функций $C(K)$.

Определение 1. Будем говорить, что в точке $(t, \mathbf{x})$ возможно существование особенности размерности 1 в пространстве $\mathbf{x}$, если для отображения Φ из (6) существует такая точка $(a(\tau, s), b(\tau, s))$, а также значения $\bar{s}, \tau_1, \tau_2$, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau}(\tau_1, \bar{s}) &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau}(\tau_2, \bar{s}) = 0, \\ \Phi_i(\tau_1, \bar{s}) &= \Phi_i(\tau_2, \bar{s}); \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Замечание 1. При соответствующих ограничениях на рост функций $\rho_0(\mathbf{x}), U_0(\mathbf{x}), (a(\tau, s), b(\tau, s))$ условия (7) можно интерпретировать как поиск глобальных минимумов каждой из функций Φ_i , являющихся аналогами (3), что соответствует процедуре решения одномерной системы (1).

Определение 2. Точки $(a(\tau, s), b(\tau, s))$ и $(\alpha(\tau, s), \beta(\tau, s))$, в которых возможно существование

особенности размерности 1 в пространстве x , называются эквивалентными, если $\alpha(\tau, \bar{s}) = a(\tau, \bar{s})$; $\beta(\tau, \bar{s}) = b(\tau, \bar{s})$ вместе со своими производными при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Утверждение 1. Если для части поверхности Γ в пространстве (t, x) пересечение классов эквивалентности для каждой точки рассматриваемой части Γ непусто, то эта часть поверхности Γ является одномерной особенностью для (1) при фиксированном t .

Справедливость утверждения 1 следует из эквивалентности равенств (7) законам движения кривой, несущей дельта-функцию плотности, которые были получены в [8].

Пусть теперь для некоторой точки (t, x) существует M неэквивалентных точек $(a_m(\tau, s), b_m(\tau, s))$, для которых возможно существование особенностей размерности 1 в пространстве x , с соответствующими значениями $\bar{s}_m, \tau_{1m}, \tau_{2m}, m = 1, 2, \dots, M$. Пусть последовательные кривые $(a_m(\tau, \bar{s}_m), b_m(\tau, \bar{s}_m))$, $\tau \in [\tau_{1m}, \tau_{2m}]$, $m = 1, 2, \dots, M$, образуют замкнутую область $D(t)$.

Определение 3. Будем говорить, что в точке (t, x) возможно существование особенности размерности 0 в пространстве x , если для области $D(t)$ существует такая параметризация $(a_D(\tau, s), b_D(\tau, s))$, $\tau \in [\tau_{1D}, \tau_{2D}]$, $\tau_{1D} = \min_m \{\tau_{1m}, \tau_{2m}\}$, $\tau_{2D} = \max_m \{\tau_{1m}, \tau_{2m}\}$, $s \in [s_{1D}, s_{2D}]$, которая для каждого $m = 1, 2, \dots, M$ эквивалентна $(a_m(\tau, \bar{s}_m), b_m(\tau, \bar{s}_m))$, $\tau \in [\tau_{1m}, \tau_{2m}]$ при фиксированном значении s .

Утверждение 2. Если для части кривой L в пространстве (t, x) возможно существование особенности размерности 0 в пространстве x и выполнено равенство

$$J_i(\tau_{1D}, s_{1D}) = J_i(\tau_{2D}, s_{2D}), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

то эта часть кривой L является нульмерной особенностью в пространстве x для (1) при фиксированном t .

Замечание 2. Соотношения (8) являются другой формой записи соотношений (5).

Справедливость утверждения 2 следует из эквивалентности равенств (8) законам движения точки, несущей дельта-функцию плотности, что было показано в [9].

3. ОБОБЩЕНИЕ НА ТРЁХМЕРНЫЙ И ОБЩИЙ МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Для трёхмерного случая иерархию особенностей можно строить по аналогии с разделом 2. Используемые ниже обозначения являются естественным

обобщением обозначений раздела 2 на трёхмерный случай.

Введём следующие наборы функций: $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$, $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, которые будут рассматриваться как отображения $C^1(K)$ в $C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^3$ — некоторый компакт, $i = 1, 2, 3$:

$$I_i \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} J_i(\tau, s, \gamma) d\gamma, \quad J_i \equiv \int_{\beta_1}^{\beta_2} \Phi_i(\tau, \beta, p) d\beta, \quad (9)$$

$$\Phi_i(\tau, s, p) \equiv \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} X_i(a, b, c) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\alpha, s, p)} d\alpha.$$

Определение 4. Будем говорить, что в точке (t, x) возможно существование особенности коразмерности 1 в пространстве x , если для отображения Φ существует такая точка $(a(\tau, s, p), b(\tau, s, p), c(\tau, s, p))$, а также значения $\bar{s}, \bar{p}, \tau_1, \tau_2$, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau}(\tau_1, \bar{s}, \bar{p}) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau}(\tau_2, \bar{s}, \bar{p}) = 0, \quad (10)$$

$$\Phi_i(\tau_1, \bar{s}, \bar{p}) = \Phi_i(\tau_2, \bar{s}, \bar{p}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Определение 5. Точки $(a(\tau, s, p), b(\tau, s, p), c(\tau, s, p))$ и $(\alpha(\tau, s, p), \beta(\tau, s, p), \gamma(\tau, s, p))$, в которых возможно существование особенности коразмерности 1 в пространстве x , называются эквивалентными, если $\alpha(\tau, \bar{s}, \bar{p}) = a(\tau, \bar{s}, \bar{p})$; $\beta(\tau, \bar{s}, \bar{p}) = b(\tau, \bar{s}, \bar{p})$; $\gamma(\tau, \bar{s}, \bar{p}) = c(\tau, \bar{s}, \bar{p})$ вместе со своими производными при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Утверждение 3. Если для части гиперповерхности Γ коразмерности 1 в пространстве (t, x) пересечение классов эквивалентности для каждой точки рассматриваемой части Γ непусто, то эта часть гиперповерхности Γ является особенностью коразмерности 1 в пространстве x для (1) при фиксированном t .

Замечание 3. Соотношения (9), (10) соответствуют соотношениям (6), (7).

Пусть теперь для некоторой точки (t, x) существует M неэквивалентных точек $(a_m(\tau, s, p), b_m(\tau, s, p), c_m(\tau, s, p))$, для которых возможно существование особенностей коразмерности 1 в пространстве x , с соответствующими значениями $\bar{s}_m, \bar{p}_m, \tau_{1m}, \tau_{2m}, m = 1, 2, \dots, M$. Пусть последовательные кривые $(a_m(\tau, \bar{s}_m, \bar{p}_m), b_m(\tau, \bar{s}_m, \bar{p}_m), c_m(\tau, \bar{s}_m, \bar{p}_m))$, $\tau \in [\tau_{1m}, \tau_{2m}]$, $m = 1, 2, \dots, M$, образуют замкнутую кривую в $\mathbb{R}^3$, на которую можно натянуть некоторую поверхность $D(t)$.

Определение 6. Будем говорить, что в точке (t, x) возможно существование особенности коразмерности 2 в пространстве x , если существует соответствующая поверхность $D(t)$, для которой существует такая параметризация $(a_D(\tau, s, p),$

$b_D(\tau, s, p), c_D(\tau, s, p)), \tau \in [\tau_{1D}, \tau_{2D}], \tau_{1D} = \min_m \{\tau_{1m}, \tau_{2m}\}, \tau_{2D} = \max_m \{\tau_{1m}, \tau_{2m}\}, s \in [s_{1D}, s_{2D}], p = \text{const}$, которая для каждого $m = 1, 2, \dots, M$ эквивалентна $(a_m(\tau, \bar{s}_m, \bar{p}_m), b_m(\tau, \bar{s}_m, \bar{p}_m), c_m(\tau, \bar{s}_m, \bar{p}_m)), \tau \in [\tau_{1m}, \tau_{2m}]$ при некоторых фиксированных значениях s и p .

Утверждение 4. Если для части поверхности Δ коразмерности 2 в пространстве $(t, \mathbf{x})$ возможно существование особенности коразмерности 2 в пространстве $\mathbf{x}$ и выполнено равенство

$$J_i(\tau_{1D}, s_{1D}, p) = J_i(\tau_{2D}, s_{2D}, p), \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

то эта часть поверхности Δ является особенностью коразмерности 2 в пространстве $\mathbf{x}$ для (1) при фиксированном t .

Определение 7. Будем говорить, что в точке $(t, \mathbf{x})$ возможно существование особенности коразмерности 3 в пространстве $\mathbf{x}$, если существует несколько поверхностей $D_n(t), n = 1, 2, \dots, N$, ограничивающих объём $V(t)$ и имеющих соответствующие параметризации, и существует такая параметризация объёма $V(t)$ $(a_V(\tau, s, p), b_V(\tau, s, p), c_V(\tau, s, p)), \tau \in [\tau_{1V}, \tau_{2V}], s \in [s_{1V}, s_{2V}], p \in [p_{1V}, p_{2V}]$, которая для каждого $n = 1, 2, \dots, N$ эквивалентна параметризации соответствующей поверхности $D_n(t)$.

Утверждение 5. Если для части кривой L в пространстве $(t, \mathbf{x})$ возможно существование особенности коразмерности 3 в пространстве $\mathbf{x}$ и выполнено равенство

$$I_i(\tau_{1V}, s_{1V}, p_{1V}) = I_i(\tau_{2V}, s_{2V}, p_{2V}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

то эта часть кривой L является особенностью коразмерности 3 в пространстве $\mathbf{x}$ для (1) при фиксированном t .

Замечание 4. Соотношения (12) соответствуют соотношениям (8), а соотношения (11) описывают промежуточный тип особенностей, связанный с трёхмерностью пространства. Количество промежуточных типов особенностей будет увеличиваться в соответствии с увеличением размерности пространства $\mathbf{x}$.

Из описанной выше процедуры можно построить иерархию особенностей и в многомерном случае, вводя необходимые определения и формулируя утверждения по аналогии.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке по Программе № 1 Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богаевский И.А. // Мат. сб. 2006. Т. 197. № 12. С. 11–42.
2. Khanin K., Sobolevski A. // Phil. Trans. Roy. Soc. A 2010. V. 368. P. 1579–1593.
3. Khanin K., Sobolevski A. // Arch. Ration. Mech. Anal. 2016. V. 219. Iss. 2. P. 861–885.
4. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Шандарин С.Ф. // УФН. 2012. Т. 182. № 3. С. 233–261.
5. Aptekarev A.I., Rykov Yu.G. // Rus. J. Math. Phys. 2006. V. 13. № 1. С. 4–12.
6. Aptekarev A.I. // Contemp. Math. 2016. V. 661. P. 167–186.
7. E W., Rykov Yu.G., Sinai Ya.G. // Commun. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 349–380.
8. Rykov Yu.G. // Boll. U.M.I. Sezione B. 8. 2002. V. 5B. P. 55–78.
9. Рыков Ю.Г. // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 94. 14 с.

DETAILED DESCRIPTION OF THE EVOLUTION MECHANISM FOR SINGULARITIES IN THE SYSTEM OF PRESSURELESS GAS DYNAMICS

Corresponding Member of the RAS A. I. Aptekarev, Yu. G. Rykov

Received September 3, 2018

The system of pressureless gas dynamics is a hydrodynamically justified generalization of the system consisting of the Burgers vector equation in the limit of vanishing viscosity and the mass conservation law. The latter system of equations was intensively used, in particular, in astrophysics to describe the large scale structure of the Universe. The solutions of the vector Burgers equation involve interesting dynamics of singularities, which can describe concentration processes. However, this dynamics does not satisfy the law of momentum conservation, which prevents us from treating it as dynamics of material objects. In this paper, momentum-conserving dynamics of singularities is investigated on the basis of the pressureless gas dynamics system. Such dynamics turns out to be more diverse and complex, but it is also possible to formulate a variational approach, for which the basic principles and relations are obtained in the work.

Keywords: pressureless gas dynamics, strong singularities, Hugoniot relations, variational representation, concentration processes.