ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 1, с. 19–21

УДК 519.615

2-ФАКТОРМЕТОД НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМОЙ КУНА—ТАККЕРА

Академик РАН Ю. Г. Евтушенко[1,2,3,*], А. А. Третьяков[1,4,5,]**

Поступило 14.11.2018 г.

Предлагается новый метод решения задачи условной оптимизации с ограничениями неравенствами для случая, когда система необходимых условий оптимальности Куна—Таккера вырождена. Такая ситуация возникает, например, при невыполнении условий строгой дополняющей нежёсткости в решении. Обосновывается сведение задачи с неравенствами к задаче с равенствами и использование нового 2-факторметода Ньютона для эффективного решения полученной вырожденной системы условий оптимальности.

Ключевые слова: 2-факторметод Ньютона, необходимые условия оптимальности Куна—Таккера, вырожденность, сходимость, искусственные переменные, сводимость.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652485119-21

При решении оптимизационных задач с ограничениями типа неравенства возникает идея свести неравенства к равенствам путём добавления искусственных переменных. Однако для того чтобы система необходимых условий экстремума Куна—Таккера (К—Т) [6] была невырожденной, необходимо вводить условия строгой дополнительной нежёсткости. В противном случае нельзя гарантировать применимость высокоэффективных методов типа Ньютона. Поэтому такая редукция, как сказано в [3, 4], не представлялась перспективной. В данной работе мы покажем эффективность указанного подхода с точки зрения применения 2-факторметода для решения системы вырожденных условий оптимальности и докажем, что система К—Т 2-регулярна.

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное пространство, задана целевая функция $f(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и вектор-функция $g(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяющая допустимое множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ g(x) \le 0_m\},$$

здесь 0_m есть m-мерный нулевой вектор, $g(x) = (g^{(1)}(x), \ldots, g^{(m)}(x))^\top$. Ставится задача минимизации функции $f(x)$ на X

$$\min_{x \in X} f(x). \tag{1}$$

Наличие ограничения типа неравенства в определении множества X усложняет применение метода Ньютона для численного решения задачи (1). В [3] эта трудность преодолевалась путём перехода к ограничениям типа равенства. Для этого вводился вектор $s \in \mathbb{R}^m$ и допустимое множество представлялось в виде

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n,\quad s \in \mathbb{R}^m\colon\ g(x) + D(s)s = 0_m\},$$

где $D(a)$ — диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоит вектор a, размеры матрицы D определяются размерностью вектора a.

В дальнейшем рассматриваем задачу минимизации

$$\min_{(x,s)\in \bar{X}} f(x). \tag{2}$$

Задачи минимизации $f(x)$ по x на X и по x, s на $\bar{X}$ эквивалентны.

Для задачи (2) введём функцию Лагранжа

$$L(u) \triangleq f(x) + \lambda^\top [g(x) + D(s)s],$$

здесь $s, \lambda \in \mathbb{R}^m$, $u^\top = [x^\top, s^\top, \lambda^\top] \in \mathbb{R}^\ell$, $\ell = n + 2m$.

Введём систему из ℓ нелинейных уравнений с ℓ неизвестными

[1] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской Академии наук, Москва*

[2] *Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.*

[3] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

[4] *System Research Institute Polish Academy Sciences, Warshaw, Poland*

[5] *Siedlce University, Poland*

**E-mail*: *yuri-evtushenko@yandex.ru*

***E-mail*: *tret@ap.siedlce.pl*

$$L_u(u) = 0_\ell. \tag{3}$$

Её решение $u_*^\top = (x_*^\top, s_*^\top, \lambda_*^\top) \in \mathbb{R}^\ell$. Если $\lambda_* \geq 0_m$, $L_u(u_*) = 0_\ell$, то в точке (x_*, λ_*) выполнены необходимые условия минимума в задаче (1) (условия Куна—Таккера). Поэтому заменим условие неотрицательности λ на уравнение

$$\lambda - D(\omega)\omega = 0_m, \tag{4}$$

где ω есть m-мерный вектор. Рассмотрим расширенную систему

$$\Psi(z) = \begin{cases} L_u(u) = 0_\ell \\ \lambda - D(\omega)\omega = 0_m \end{cases} = 0_r, \tag{5}$$

где $z^\top = (x^\top, s^\top, \lambda^\top, \omega^\top)$, $r = n + 3m$. Таким образом, исходная задача, содержащая неравенства, сведена к системе равенств. Причём в её решении (x_*, λ_*) выполнены необходимые условия Куна—Таккера.

Пусть $I(x) = \{1 \leq i \leq m: g^{(i)}(x) = 0\}$. В точке x выполнено условие регулярности ограничений (УРО), если все векторы $g_x^{(i)}(x)$, $i \in I(x)$, линейно независимы. В точке z_* выполнено условие строгой дополняющей нежёсткости (УСДН), если все $\lambda_*^{(i)}$, $s_*^{(i)}$ не равны нулю одновременно, $1 \leq i \leq m$.

Если в точке z_* имеют место условия (5) и

$$x^\top L_{xx}(u_*)x > 0 \quad \forall x \neq 0_n \quad g_x^{(i)}(x_*)x \leq 0, \quad i \in I(x_*), \tag{6}$$

тогда x_* — точка строгого локального минимума в задаче (1), т.е. выполнены достаточные условия строгого минимума второго порядка (см., например, [5]).

Применим метод Ньютона к решению системы (5), тогда получим итерационный процесс

$$z_{k+1} = z_k - (\Psi_z(z_k))^{-1}\Psi(z_k). \tag{7}$$

Если в решении z_* не выполнено УСДН, то матрица $\Psi_z(z_*)$ выроджена и метод (7) не гарантирует сходимость. Построим так называемый 2-факторметод Ньютона, обеспечивающий квадратичную скорость сходимости.

В общем случае схемы 2-факторметода решение системы нелинейных уравнений

$$\Phi(y) = 0_r \tag{8}$$

при $y \in \mathbb{R}^r$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_k - \{\Phi_y(y_k) + \mathcal{P}\Phi_{yy}(y_k)h\}^{-1} \times \\ \times (\Phi(y_k) + \mathcal{P}\Phi_y(y_k)h), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathcal{P}$ — матрица ортогонального проектирования на $(\operatorname{Im}\Phi_y(y_*))^\perp$, а $h \in \mathbb{R}^r$ — некоторый фиксированный вектор, $\|h\| = 1$, такой, что матрица $\{\Phi_y(y_*) + \mathcal{P}\Phi_{yy}(y_*)h\}$ невыроджена, т.е. отображение $\Phi(\cdot)$ — 2-регулярно на векторе h в точке y_* решения системы (8). В этом случае справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\Phi \in C^3(\mathbb{R}^r)$ *и* $\Phi(\cdot)$ — *2-регулярно в решении* y_* *на векторе* h. *Тогда при* $y_0 \in U_\varepsilon(y_*)$ *для схемы* (9) *справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|y_{k+1} - y_*\| \leq c\|y_k - y_*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

где $\varepsilon > 0$ *достаточно малое* (*см. пример* 2).

Доказательство см., например, в [2].

Следуя [1, 2], введём отображение

$$F(z) = \Psi(z) + \mathcal{P}\Psi_z(z)h$$

и 2-фактороператор

$$F_z(z) = \Psi_z(z) + \mathcal{P}\Psi_{zz}(z)h,$$

где $(r \times r)$-матрица $\mathcal{P}$ проектирует вектор $\Psi_{zz}(z_k)h$ на $(\operatorname{Im}\Psi_z(z_*))^\perp$, r-мерный вектор h, имеющий единичную норму, выбирается из условия невыроjденности $F_z(z_*)$, причём здесь z_* — априори неизвестный вектор. Отметим, что матрицу $\mathcal{P}$, вообще говоря, можно выбирать просто из условия невырожденности 2-фактороператора $F_z(z_*)$.

Рассмотрим систему, аналогичную (5):

$$F(z) = 0_r. \tag{11}$$

В случае вырождения $\Psi_z(z_*)$ матрица $\mathcal{P}$ ненулевая и решение системы (11) локально совпадает с z_*. Предполагая, что f и g принадлежат классу C^3, вычислим производную $F_z(z_*)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f, g \in C^3(\mathbb{R}^n)$, *существует удовлетворяющий системе* (5) *вектор* z_*, *в точке* x_* *выполнены достаточные условия оптимальности* (6) *и условие регулярности ограничений. Тогда существует вектор* $h \neq 0$ *такой, что* 2-*факторматрица* $F_z(z_*)$ *не выроjдена*.

Метод Ньютона, применённый к системе (11), имеет вид

$$z_{k+1} = z_k - (F_z(z_k))^{-1}F(z_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

или

$$\begin{aligned} z_{k+1} = z_k - (\Psi_z(z_k) + \mathcal{P}\Psi_{zz}(z_k)h)^{-1} \times \\ \times (\Psi(z_k) + \mathcal{P}\Psi_z(z_k)h) \end{aligned} \tag{13}$$

и называется 2-факторметодом решения системы (5).

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\Psi \in C^3(\mathbb{R}^r)$ *и для* $h \in \mathbb{R}^r$, $\|h\| \neq 0$, *существует* $\{F_z(z_*)\}^{-1}$. *Тогда 2-факторметод* (12), (13) *сходится к решению* z_* *системы* (11) *с квадратичной скоростью, т.е.*

$$\|z_{k+1} - z_*\| \le c\|z_k - z_*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $z_0 \in U_\varepsilon(z_*)$, $\varepsilon > 0$ *достаточно малое*, *а* $c > 0$ — *независимая константа*.

Доказательство приведено в [2].

Источники финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17–07–00510) и Программы Президиума РАН 27.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брежнева О.А.*, *Евтушенко Ю.Г.*, *Третьяков А.А.* Новые численные методы и некоторые прикладные аспекты теории *p*-регулярности //ЖВМиМФ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1987–2000.
2. *Белаш К.Н.*, *Третьяков А.А.* Методы решения вырожденных задач // ЖВМиМФ. 1988. Т. 28. № 7. С. 1097–1102.
3. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Belmont: Athena sci., 1999. P. 1–60.
4. *Izmailov A.F.*, *Solodov M.V.* Newton-Type Methods for Optimization Problems without Constraint Qualifications // SIAM J. Optimization. 2004. V. 15. № 1. P. 210–228.
5. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
6. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 2000.

2-FACTOR NEWTON METHOD FOR SOLVING THE CONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEM WITH THE SINGULAR KUHN–TUCKER SYSTEM

Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko, A. A. Tret'yakov

Received November 14, 2018

A new method for solving the inequality constrained optimization problem is proposed for the case when the system of necessary optimality conditions of Kuhn–Tucker is degenerate. This situation occurs for example in the case when strict complementarity conditions fails in solution point. The reduction of the inequalities constrained optimization problem to the equalities constrained problem is substantiated and the use of a new 2-factor Newton method for the effective solution of the obtained degenerate system of optimality conditions is shown.

Keywords: 2-factor Newton method, necessary Kuhn–Tucker optimality conditions, degenerate, convergence, slack variables, reduction.