ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 6, с. 663–666

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА—ПУАССОНА В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Ю. О. Беляева*, А. Л. Скубачевский**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.09.2018 г.

Поступило 21.09.2018 г.

Рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре. Эта задача описывает кинетику заряженных частиц двукомпонентной высокотемпературной плазмы под действием внешнего магнитного поля. Показано, что для произвольного потенциала электрического поля и для достаточно большого внешнего магнитного поля характеристики уравнений Власова не пересекают границу цилиндра. Доказаны существование и единственность классического решения системы уравнений Власова—Пуассона с носителями плотностей распределения ионов и электронов, лежащими на некотором расстоянии от границы цилиндра.

Ключевые слова: уравнения Власова—Пуассона, смешанная задача, классические решения, внешнее магнитное поле.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524846663-666

Будем рассматривать систему уравнений Власова—Пуассона для двукомпонентной плазмы в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x,\,t) = 4\pi e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta}\beta f^{\beta}(x,\,v,\,t)dv,\qquad x\in Q,\ 0<t<T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v,\,\nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}}\left(-\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}[v,\,B],\,\nabla_v f^{\beta}\right) = 0,\qquad x\in Q,\ v\in\mathbb{R}^3,\ 0<t<T,\ \beta=\pm1, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$f^{\beta}(x,\,v,\,t)\big|_{t=0} = f_0^{\beta}(x,\,v),\quad x\in\bar{Q},\ v\in\mathbb{R}^3,\ \beta=\pm1, \tag{3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,\,t) = 0,\quad x\in\partial Q,\ 0\le t<T. \tag{4}$$

Здесь $Q = G\times\mathbb{R}$, $G\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G\in C^{\infty}$, $\partial Q = \partial G\times\mathbb{R}$, $f^{\beta} = f^{\beta}(x,\,v,\,t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $\varphi = \varphi(x,\,t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Смешанные задачи для системы уравнений Власова—Пуассона в областях с границей описывают математическую модель двукомпонентной плазмы в термоядерном реакторе. В физике и математике уравнениям Власова уделяется значительное внимание (см. [1, 2, 4–12] и имеющуюся там библиографию). Эти уравнения имеют приложения к моделированию кинетики высокотемпературной плазмы, процессу управляемого термоядерного синтеза, астрофизике, а также к таким важным физическим явлениям, как эффект затухания Ландау [7] и др.

Задача Коши и вопросы существования глобальных классических решений для системы уравнений Власова—Пуассона рассматривались в работах [4, 8, 9]. В областях с границей уравнения Власова исследованы значительно меньше. Глобальным классическим решениям в случае полупространства посвящены работы [5, 6]. В общей постановке вопрос о существовании классических решений смешанных задач для системы уравнений Власова—Пуассона является нерешённой проблемой [1].

Смешанные задачи для системы Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре и полупространстве исследовались в [10–12].

В случае бесконечного цилиндра уравнения Власова—Пуассона описывают кинетику высокотемпературной плазмы в пробочной ловушке. При попадании частиц плазмы на стенку вакуумной камеры

Российский университет дружбы народов, Москва

*E-mail: yilia-b@yandex.ru

**E-mail: skublector@gmail.com

может произойти либо разрушение реактора, либо остывание плазмы и прекращение реакции. Поэтому важно обеспечить удержание плазменного шнура строго внутри реактора, что достигается с помощью достаточно большого магнитного поля. Математически это можно интерпретировать как исследование решений, носители которых лежат на некотором расстоянии от границы рассматриваемой области.

Данная работа посвящена исследованию разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре. Показано, что при достаточно большом магнитном поле характеристики уравнений Власова не пересекают границу рассматриваемой области. Получены новые достаточные условия существования и единственности решений, носители которых лежат строго во внутреннем цилиндре.

Введём некоторые функциональные пространства.

Обозначим через $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\bar{Q}))$, $s \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, пространство Гёльдера функций, непрерывных в $\mathbb{R}^n$ $(\bar{Q})$ и имеющих непрерывные производные в $\mathbb{R}^n$ $(\bar{Q})$ вплоть до k-го порядка, $k = [s]$, с конечной нормой

$$\|u\|_s = \max_{|\alpha|\leq k}\sup_x |\mathcal{D}^\alpha u(x)| \quad \text{для } s = k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k,$$

$$\|u\|_s = \|u\|_k + |u|_{k+\sigma} \quad \text{для } s = k + \sigma,\ 0 \leq k \in \mathbb{Z},$$
$$0 < \sigma < 1,$$

где

$$|u|_{k+\sigma} = \max_{|\alpha|=k}\sup_{x\neq y}|x-y|^{-\sigma}|\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|,$$

$$\mathcal{D}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$
$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Пусть $\dot{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$, — пространство непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями.

Обозначим через $C_0^s(\bar{Q})$, $s \geq 0$, замыкание множества функций из $C^s(\bar{Q})$ с компактными в $\bar{Q}$ носителями.

Будем обозначать $\hat{C}^s(\bar{Q})$ пространство вектор-функций $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ с координатами $Y_i \in C^s(\bar{Q})$ и нормой

$$\|Y\|_s = \max_{0\leq m\leq k}\langle Y\rangle_m,$$

$$\langle Y\rangle_m = \left\{\sum_{i=1}^3 \max_{|\alpha|=m}\|\mathcal{D}^\alpha Y_i\|_0^2\right\}^{1/2} \quad \text{для } s = k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k,$$

$$\|Y\|_s = \|Y\|_k + \langle Y\rangle_{k+\sigma},$$

$$\langle Y\rangle_{k+\sigma} = \left\{\sum_{i=1}^3 |Y|_{k+\sigma}^2\right\}^{1/2} \quad \text{для } s = k + \sigma,$$
$$0 \leq k \in \mathbb{Z},\ 0 < \sigma < 1.$$

Введём банахово пространство $C([0, T], C_0^s(\bar{Q}))$, $s > 0$, непрерывных функций $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(\cdot, t) \in C_0^s(\bar{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{s,T} = \sup_{0\leq t\leq T}\|\varphi(\cdot, t)\|_s.$$

Рассмотрим также банахово пространство $L_1((0, T), C_0^s(\bar{Q}))$, $s > 0$, измеримых по Лебегу функций $(0, T) \ni t \mapsto \varphi(\cdot, t) \in C_0^s(\bar{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{L_1((0,T), C_0^s(\bar{Q}))} = \int_0^T \|\varphi(\cdot, t)\|_s dt.$$

Обозначим

$$M_{s,R} = \left\{\varphi \in C([0, T], C_0^s(\bar{Q})) \colon \|\varphi\|_{L_1((0,T), C_0^s(\bar{Q}))} \leq R\right\},$$
$$R > 0,\ s > 0.$$

Определение 1. Вектор-функцию $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$, $f^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$ мы назовём *классическим решением задачи* (1)–(4), если $\{\varphi, f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (1), (2), начальным условиям (3) и краевому условию (4).

Пусть $B_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x - x^0| < r\}$, $B_r = B_r(0)$, $|B_r| = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ и $G_\delta = \{x' \in G \colon \operatorname{dist}(x', \partial G) > \delta\}$, $Q_\delta = \{x \in Q \colon \operatorname{dist}(x, \partial Q) > \delta\}$, где $\delta > 0$, $x' = (x_1, x_2)$. Предположим, что $G_{2\delta} \neq \phi$.

Обозначим $\mathcal{D}_0 = (Q_{\delta_0} \cap B_\kappa) \times B_{\rho_0}$, где δ_0, κ_0, κ, $\rho_0 > 0$ таковы, что $\dfrac{3\delta}{2} < \delta_0 < \kappa_0 < \kappa - \dfrac{\delta}{8}$, $\rho_0 < \rho$, $Q_{\delta_0} \cap B_{\kappa_0} \neq \phi$.

Сформулируем теперь условия, которым должны удовлетворять магнитное поле B и начальные плотности распределения $f_0^\beta(x, v)$.

Условие 1. Пусть $B \in \hat{C}^{1+\sigma}(\bar{Q})$ и пусть $B(x) = (0, 0, h)$ для $x \in \bar{Q}_{\delta/4}$, где

$$\frac{16c}{e\delta}\left(\rho + \frac{\sqrt{3}eR}{m_{-1}}\right) < h,$$

$\delta, \rho, R, h > 0$ не зависят от x.

Условие 2. Пусть $f_0^\beta \in \dot{C}^{1+\sigma}(\mathbb{R}^6)$ и пусть $\operatorname{supp} f_0^\beta \subset \mathcal{D}_0$.

Пусть $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ — заданная функция, тогда уравнение (2) с начальным условием (3) можно решить, используя метод характеристик. Для этого рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \tag{5}$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < T,\ \beta = \pm 1, \tag{6}$$

с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta\big|_{\tau=0} = x, \quad \beta = \pm 1, \tag{7}$$

$$V_\varphi^\beta\big|_{\tau=0} = v, \quad \beta = \pm 1, \tag{8}$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$.

Лемма 1. *Пусть выполняется условие* 1. *Тогда для любых* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, $x \in Q_{7\delta/8}$ *и* $v \in B_\rho$ *существует единственное решение* $(X_\varphi^\beta(x, v, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, \tau))$ *задачи* (5)–(8) *на полуинтервале* $[0, T)$, *при этом* $X_\varphi^\beta(x, v, \tau) \in Q_{3\delta/4}$, $V_\varphi^\beta(x, v, \tau) \in B_{\rho_1}$ *для всех* $\tau \in [0, T)$, *где* $\rho_1 = \rho + \frac{\sqrt{3}eR}{m_{-1}}$.

В частности, это утверждение справедливо в случае $T = \infty$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (5), (6) на интервале $(0, t)$, $0 < t \le T$, с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta\big|_{\tau=t} = y, \quad \beta = \pm 1, \tag{9}$$

$$V_\varphi^\beta\big|_{\tau=t} = q, \quad \beta = \pm 1. \tag{10}$$

Лемма 2. *Пусть выполняется условие* 1. *Тогда для любых* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, $y \in Q_{7\delta/8}$, $q \in B_{\rho_1}$ *и* $0 < t \le T$ *существует единственное решение* $(X_\varphi^\beta(y, q, t, \tau), V_\varphi^\beta(y, q, t, \tau))$ *задачи* (5), (6), (9), (10) *на полуинтервале* $(0, t]$, *при этом* $X_\varphi^\beta(y, q, t, \tau) \in Q_{3\delta/4}$ *и* $V_\varphi^\beta(y, q, t, \tau) \in B_{\rho_2}$, *где* $\rho_2 = \rho_1 + \frac{\sqrt{3}eR}{m_{-1}}$.

Обозначим $\Omega_0 = (Q_{3\delta/4} \cap B_{\kappa_1}) \times B_{\rho_1}$, $\mathcal{D}_0^1 = (Q_{7\delta/8} \cap B_{\kappa_1-\delta/8}) \times B_{\rho_1}$, где $\kappa_1 = \kappa + T\rho_1$.

Продолжая функции $X_\varphi^\beta(y, q, t, \tau)$, $V_\varphi^\beta(y, q, t, \tau)$ по непрерывности в $\tau = 0$, мы будем полагать $\hat{X}_\varphi^\beta(y, q, t) = X_\varphi^\beta(y, q, t, 0)$, $\hat{V}_\varphi^\beta(y, q, t) = V_\varphi^\beta(y, q, t, 0)$.

Для произвольно заданного $0 < t \le T$ рассмотрим отображение

$$\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(y, q)\colon \Omega_0 \to \Omega_{\varphi,t}^\beta = \{(x, v)\colon (x, v) = \hat{S}_{\varphi,t}(y, q),\ (y, q) \in \Omega_0\},$$

заданное по формуле

$$\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(y, q) = (\hat{X}_\varphi^\beta(y, q, t), \hat{V}_\varphi^\beta(y, q, t)).$$

Очевидно, для любого $0 \le t < T$ отображение $S_{\varphi,t}^\beta\colon \Omega_{\varphi,t}^\beta \to \Omega_0$, заданное по формуле

$$S_{\varphi,t}^\beta(x, v) = (X_\varphi^\beta(x, v, t), V_\varphi^\beta(x, v, t)),$$

является обратным к $\hat{S}_{\varphi,t}^\beta$, т.е.

$$\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(S_{\varphi,t}^\beta(x, v)) = (x, v),\ (x, v) \in \Omega_{\varphi,t}^\beta.$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда для любых* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ *и* $0 < t \le T$ *мы имеем* $\operatorname{supp} f_0^\beta(\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x, v)) \subset \mathcal{D}_0^1$.

Определим функцию $f_\varphi^\beta(x, v, t)$ по формуле

$$f_\varphi^\beta(x, v, t) = \begin{cases} f_0^\beta(S_{\varphi,t}^\beta(x, v)),\ (x, v) \in \mathcal{D}_0^1,\ 0 \le t \le T, \\ 0, \quad (x, v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{D}_0^1,\ 0 \le t \le T, \end{cases}$$

где $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$.

Обозначим

$$F_\varphi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f_\varphi^\beta(x, v, t)dv, \quad x \in \bar{Q},\ 0 \le t \le T.$$

Положим $m_s = \max\limits_\beta \|f_0^\beta\|_s$, $s \ge 0$.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда для любой* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ *мы имеем* $F_\varphi \in C([0, T], C_0^\sigma(\bar{Q}))$, *при этом*

$$\|F_\varphi\|_{L_1((0,T), C^\sigma(\bar{Q}))} \le c_1 m_\sigma,$$

где $c_1 = 2|B_{\rho_1}|(1 + 3^{\sigma/2}c_0^\sigma)T$,

$$c_0 = \exp\left(\max\left\{\frac{3eR}{m_{-1}} + \frac{\sqrt{3}e\rho_2}{cm_{-1}}\langle B\rangle_1 T,\ T\right\}\right).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения Пуассона с условием Дирихле в бесконечном цилиндре:

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in Q, \tag{11}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial Q. \tag{12}$$

Из теоремы 6.3 в [3] вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Для любой функции* $f \in C_0^\sigma(\bar{Q})$ *существует единственное решение задачи* (11), (12) $u \in C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$ *и*

$$\|u\|_{C^{2+\sigma}(\bar{Q})} \leq c_2 \|f\|_{C^{\sigma}(\bar{Q})},$$

где $c_2 > 0$ *не зависит от* f.

Основным результатом данного сообщения является следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1 *и* 2. *Предположим также, что выполняется следующее неравенство*:

$$4\pi e c_1 c_2 m_\sigma < R,$$

где c_1, $c_2 > 0$ — *константы из лемм* 4, 5.

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(4) *такое, что* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ *и* $\operatorname{supp} f^{\beta}(\cdot,\cdot,t) \subset \mathcal{D}_0^1$ *для всех* $t \in [0, T]$.

Благодарности. Авторы глубоко благодарны академику РАН В.В. Козлову за внимание к работе и ценные советы.

Источники финансирования. Работа подготовлена при поддержке Программы РУДН "5-100" и гранта РФФИ 17–01–00401.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. 2008. Т. 63. № 4 (382). С. 93–130.
2. *Маслов В.П.* Уравнения самосогласованного поля, Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. М.: ВИНИТИ, 1978. В. 11. С. 153–234.
3. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
4. *Batt J.* Global Symmetric Solutions of the Initial Value Problem of Stellar Dynamics // J. Different. Equat. 1977. V. 25. № 3. P. 342–364.
5. *Guo Y.* Regularity for the Vlasov Equations in a Half Space // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. № 1. P. 255–320.
6. *Hwang H.J., Velázquez J.J.L.* On Global Existence for the Vlasov—Poisson System in a Half Space // J. Different. Equat. 2009. V. 247. № 6. P. 1915–1948.
7. *Mouhot C., Villani C.* On Landau Damping // Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
8. *Pfaffelmoser K.* Global Classical Solutions of the Vlasov—Poisson System in Three Dimensions for General Initial Data // J. Different. Equat. 1992. V. 95. № 2. P. 281–303.
9. *Schäffer J.* Global Existence of Smooth Solutions to the Vlasov—Poisson System in Three Dimensions // Communs Partial Different. Equats. 1991. V. 16. № 8/9. P. 1313–1335.
10. *Скубачевский А.Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова—Пуассона в полупространстве, Теория функций и уравнения математической физики. Сб. статей. К 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Льва Дмитриевича Кудрявцева // Тр. Мат. ин-та РАН. 2013. Т. 283. С. 204–232.
11. *Скубачевский А.Л.* Уравнения Власова—Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // 2014. УМН. Т. 69. № 2. С. 107–148.
12. *Скубачевский А.Л., Tsuzuki Y.* Классические решения уравнений Власова—Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 3. С. 536–552.

ON CLASSICAL SOLUTIONS TO THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE VLASOV–POISSON SYSTEM IN AN INFINITE CYLINDER

Yu. O. Belyaeva, A. L. Skubachevskii

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov September 18, 2018

Received September 21, 2018

The first mixed problem for the Vlasov–Poisson system in an infinite cylinder is considered. This problem describes the kinetics of charged particles in a high-temperature two-component plasma under an external magnetic field. For an arbitrary electric field potential and a sufficiently strong external magnetic field, it is shown that the characteristics of the Vlasov equations do not reach the boundary of the cylinder. It is proved that the Vlasov–Poisson system with ion and electron distribution density functions supported at some distance from the cylinder boundary has a unique classical solution.

Keywords: Vlasov–Poisson equations, mixed problem, classical solutions, external magnetic field.