ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 3, с. 259–262

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

О БЫСТРО РАСТУЩИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Коньков

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 20.11.2018 г.

Поступило 30.11.2018 г.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, содержащих члены с младшими производными, получены достаточные условия отсутствия быстро растущих решений.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, быстро растущие решения, blow-up.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524853259-262

Будем изучать решения уравнения

$$w^{(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i(t) w^{(i)} = q(t) h(|w|) \operatorname{sign} w, \quad t > a > 0, \quad (1)$$

порядка $m \geq 2$, где $q\colon [a, \infty) \to [0, \infty)$ и $b_i\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, принадлежат пространству $L_{\infty,\mathrm{loc}}([a, \infty))$, а $h\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ — непрерывная функция.

Важным частным случаем (1) является уравнение типа Эмдена—Фаулера

$$w^{(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i(t) w^{(i)} = q(t) |w|^{\lambda-1} w, \quad t > a > 0, \quad (2)$$

где λ — некоторое вещественное число.

Определение 1 (см. [3]). Решение (1) называется быстро растущим, если

$$|w^{(m-1)}(t)| \to \infty \quad \text{при } t \to \infty.$$

Вопросы, рассмотренные в этом сообщении, ранее исследовали в работах [1–5] для уравнений, не содержащих младшие производные.

Обозначим

$$b(t) = \sum_{i=1}^{m-1} t^{m-i-1} b_i^+(t),$$

где

$$b_i^+(t) = \begin{cases} b_i(t), & b_i(t) > 0, \\ 0, & b_i(t) \leq 0. \end{cases}$$

Ниже по умолчанию будем считать, что $\sigma > 1$ и $\theta > 1$ — некоторые вещественные числа, выбор которых мы ничем не ограничиваем. Будем также предполагать, что существуют измеримая функция $f\colon [a, \infty) \to [0, \infty)$ и непрерывная функция $g\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что

$$f(t) \leq \frac{q(t)}{1 + t \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(t/\sigma, t\sigma) \cap [a, \infty)} b}$$

для почти всех $t \in [a, \infty)$ и

$$g(\zeta) \leq \inf_{(\zeta/\theta, \theta\zeta)} h$$

для всех $\zeta \in (0, \infty)$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\int_1^\infty g^{-\frac{1}{m}}(\zeta) \zeta^{\frac{1}{m}-1} d\zeta < \infty, \quad (3)$$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{t^m f(t)}{\int_a^t \tau^{m-1} f(\tau) d\tau} < \infty \quad (4)$$

и при этом

$$\int_a^\infty t^{m-1} f(t) dt = \infty.$$

Тогда уравнение (1) *не имеет быстро растущих решений*.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3) *и* (4) *и при этом*

$$\int_a^\infty \xi^{m-1} f(t) dt < \infty. \quad (5)$$

Тогда любое быстро растущее решение (1) *удовлетворяет оценке*

$$|w(t)| \leq AG^{-1}\left(B\left(\int_t^\infty \tau^{m-1} f(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{m}}\right)$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: *konkov@mech.math.msu.ru*

для всех достаточно больших t, *где* G^{-1} *— функция, обратная к*

$$G(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} g^{-\frac{1}{m}}(\zeta)\zeta^{\frac{1}{m}-1}d\zeta,$$

а постоянные $A > 0$ *и* $B > 0$ *зависят только от* m, σ, θ *и от предела в левой части* (4).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия* (3)–(5) *и*

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m}G^{-1}\left(\varepsilon\left(\int_{t}^{\infty}\tau^{m-1}f(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{m}}\right) < \infty$$

для всех вещественных чисел $\varepsilon > 0$ *из некоторой окрестности нуля. Тогда уравнение* (1) *не имеет быстро растущих решений.*

П р и м е р 1. Предположим, что $\lambda > 1$,

$$q(t) \ge Qt^k \tag{6}$$

и

$$b_i(t) \le Bt^{s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \tag{7}$$

для почти всех $t \in [a, \infty)$, где $Q > 0$ и $B > 0$ — некоторые постоянные. Обозначим

$$z = \max_{1\le i\le m-1}(s_i + m - i). \tag{8}$$

Рассмотрим сначала случай $z \ge 0$. Согласно теоремам 1 и 3, если

$$k \ge -\lambda(m-1) + z - 1,$$

то уравнение (2) не имеет быстро растущих решений. С другой стороны, если

$$k < -\lambda(m-1) + z - 1,$$

то

$$w(t) = t^{(z-m-k)/(\lambda-1)}$$

является быстро растущим решением (2), где q и b_i — непрерывные функции такие, что

$$c_1 t^k \le q(t) \le c_2 t^k \tag{9}$$

и

$$c_1 t^{s_i} \le b_i(t) \le c_2 t^{s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \tag{10}$$

для всех $t \in [a, \infty)$ и некоторых постоянных $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$.

Предположим теперь, что $z < 0$. Согласно теоремам 1 и 3, если

$$k \ge -\lambda(m-1) - 1,$$

то уравнение (2) не имеет быстро растущих решений. Чтобы убедиться в точности последнего неравенства, заметим, что в случае

$$k < -\lambda(m-1) - 1,$$

полагая

$$w(t) = t^{(m+k)/(1-\lambda)},$$

получим быстро растущее решение (2), где q и b_i — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям (9) и (10).

П р и м е р 2. Рассмотрим уравнение

$$w^{(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i(t)w^{(i)} = q(t)w\ln^{\mu}(1+|w|), \quad t > a > 0, \tag{11}$$

где $\mu > m$ и при этом $q: [a, \infty) \to [0, \infty)$ и $b_i: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ — локально ограниченные измеримые функции такие, что выполнены (6) и (7).

Пусть $z \ge 0$, где z определено формулой (8). По теореме 1, если

$$k \ge z - m,$$

то уравнение (11) не имеет быстро растущих решений. В свою очередь, если

$$k < z - m,$$

то найдутся непрерывные функции q и b_i, удовлетворяющие условиям (9) и (10), для которых (11) имеет быстро растущее решение. В самом деле, возьмём максимальное $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ такое, что

$$z = s_i + m - i.$$

Тогда требуемое решение определяется формулой

$$w(t) = e^{At^{\alpha}},$$

где

$$\alpha = \begin{cases} -\dfrac{k+m}{\mu-m}, & \dfrac{z}{m-i} < -\dfrac{k+m}{\mu-m}, \\ \dfrac{z-m-k}{\mu-i}, & \dfrac{z}{m-i} \ge -\dfrac{k+m}{\mu-m}, \end{cases}$$

и $A > 0$ — достаточно большое вещественное число.

Пусть теперь $z < 0$. В соответствии с теоремой 1, если

$$k \ge -m,$$

то уравнение (11) не имеет быстро растущих решений. В то же время в случае

$$k < -m,$$

полагая

$$w(t) = e^{At^{-(k+m)/(\mu-m)}},$$

где $A > 0$ — достаточно большое вещественное число, получим быстро растущее решение (11) для некоторых непрерывных функций q и b_i, удовлетворяющих условиям (9) и (10).

Теорема 4. *Предположим, что* $m = 2$, $\lambda > 1$, *и пусть найдутся положительное решение дифференциального неравенства*

$$\mathcal{R}'' + b(t)\mathcal{R}' \le 0 \tag{12}$$

и неотрицательные измеримые функции ρ *и* ψ *такие, что*

$$\rho(t) \le \inf_{(t/\sigma, t\sigma)\cap[a,\infty)} \mathcal{R} \tag{13}$$

и

$$\left(1 + t \operatorname*{ess\,sup}_{(t/\sigma, t\sigma)\cap[a,\infty)} \left(\frac{2\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} + b\right)\right)\psi(t) \le \frac{q(t)}{\mathcal{R}(t)} \tag{14}$$

для почти всех $t \in [a, \infty)$, *и при этом*

$$\int_a^\infty t\rho^\lambda(t)\psi(t)\mu^{-\frac{1}{2}}(t)dt = \infty,$$

где

$$\mu(t) = 1 + t^2 \operatorname*{ess\,sup}_{(t/\sigma, t\sigma)\cap[a,\infty)} \rho^\lambda\psi.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет решений таких, что* $|w|$ *— положительная монотонно неубывающая функция в окрестности бесконечности.*

Замечание 1. Если w — быстро растущее решение, то $|w|$, очевидно, является положительной монотонно возрастающей функцией в некоторой окрестности бесконечности. Таким образом, если справедливы условия теоремы 4, то уравнение (2) не имеет быстро растущих решений.

Теорема 5. *Предположим, что* $m \ge 3$, $\lambda > 1$, *и пусть найдутся положительное решение дифференциального неравенства*

$$\mathcal{R}'' + b(t)\left(\mathcal{R}' + \frac{1}{t}\mathcal{R}\right) \le 0 \tag{15}$$

и неотрицательные измеримые функции ρ *и* ψ *такие, что выполнены* (13) *и* (14) *и при этом*

$$\int_a^\infty t^{\lambda(m-2)+1}\rho^\lambda(t)\psi(t)\mu^{\frac{1}{\lambda(m-2)+2}-1}(t)dt = \infty,$$

где

$$\mu(t) = 1 + t^{\lambda(m-2)+2} \operatorname*{ess\,sup}_{(t/\sigma, t\sigma)\cap[a,\infty)} \rho^\lambda\psi.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет быстро растущих решений.*

Если существуют постоянные $B > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$b(t) \le Bt^{-1-\delta} \tag{16}$$

для почти всех $t \ge a$, то, полагая

$$\mathcal{R}(t) = \int_a^t e^{\tau^{-\varepsilon}}d\tau, \quad 0 < \varepsilon < \delta,$$

будем иметь решение как неравенства (12), так и неравенства (15) на промежутке $[a_*, \infty)$ для некоторого $a_* \in [a, \infty)$. Тем самым, заменяя в случае необходимости a на a_*, получим согласно теоремам 4 и 5 следующее

Следствие 1. *Пусть* $\lambda > 1$, *выполнено* (16) *и при этом*

$$\int_a^\infty t^{\lambda(m-1)}q(t)\mu^{\frac{1}{\lambda(m-2)+2}-1}(t)dt = \infty,$$

где

$$\mu(t) = 1 + t^{\lambda(m-1)+1} \operatorname*{ess\,sup}_{(t/\sigma, t\sigma)\cap[a,\infty)} q.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет быстро растущих решений.*

Теорема 6. *Предположим, что* $m = 2$, $\lambda > 1$, *и пусть найдутся положительное решение неравенства* (12) *и неотрицательные измеримые функции* ρ *и* ψ *такие, что выполнены* (13) *и* (14), *и при этом*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^2\rho^\lambda(t)\psi(t)}{\int_a^t \tau\rho^\lambda(\tau)\psi(\tau)d\tau} < \infty$$

и

$$\int_a^\infty t\rho^\lambda(t)\psi(t)dt = \infty.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет решений таких, что* $|w|$ *— положительная монотонно не убывающая функция в окрестности бесконечности.*

Теорема 7. *Предположим, что* $m \ge 3$, $\lambda > 1$, *и пусть найдутся положительное решение неравенства* (15) *и неотрицательные измеримые функции* ρ *и* ψ *такие, что выполнены* (13) *и* (14), *и при этом*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^{\lambda(m-2)+2}\rho^\lambda(t)\psi(t)}{\int_a^t \tau^{\lambda(m-2)+1}\rho^\lambda(\tau)\psi(\tau)d\tau} < \infty$$

и

$$\int_a^\infty t^{\lambda(m-2)+1}\rho^\lambda(t)\psi(t)dt = \infty.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет быстро растущих решений.*

Следствие 2. *Пусть* $\lambda > 1$, *выполнено* (16) *и при этом*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^{\lambda(m-1)+1}q(t)}{\int_a^t \tau^{\lambda(m-1)}q(\tau)d\tau} < \infty$$

и

$$\int_a^\infty t^{\lambda(m-1)}q(t)dt = \infty.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет быстро растущих решений*.

Замечание 2. В случае $m = 2$ выполнение условий любого из следствий 1 или 2 гарантирует также, что уравнение (2) не имеет решений, для которых $|w|$ — положительная монотонно неубывающая функция в окрестности бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изобов Н.А.* // Мат. заметки. 1984. Т. 35. № 6. С. 829–839.
2. *Kiguradze I.T.*, *Kvinikadze G.G.* // Ann. Mat. Pure and Appl. 1982. V. 130. P. 67–87.
3. *Кигурадзе И.Т.*, *Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
4. *Коньков А.А.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65. № 2. С. 81–126.
5. *Коньков А.А.* // Тр. семинара имени И.Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 193–222.

ON RAPIDLY GROWING SOLUTIONS OF A CLASS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. A. Kon'kov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov November 20, 2018

Received November 30, 2018

For high-order ordinary differential equations containing terms with lower order derivatives, sufficient conditions for the absence of rapidly growing solutions are obtained.

Keywords: nonlinear ordinary differential equations, rapidly growing solutions, blow-up.