ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 2, с. 149–152

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СУММАМИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ И ГЛОБАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТКИ

С. Г. Мерзляков*, С. В. Попенов**

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым 15.10.2018 г.

Поступило 15.10.2018 г.

Изучается проблема кратной интерполяции на бесконечном множестве узлов с помощью сумм абсолютно сходящихся рядов экспонент с заданным множеством показателей. Для целых функций найдены условия на узлы и показатели, при которых эта проблема разрешима. Найден новый подход к проблеме интерполяции, позволяющий для функций, голоморфных в области, получать критерии разрешимости для некоторых классов множеств показателей и специального класса множеств узлов. При этом необходимость доказана в большой общности для произвольных множеств узлов и в ситуации интерполяции функциями, представимыми в виде преобразования Лапласа мер Радона на множестве показателей. Получена разрешимость глобальной задачи Коши для оператора свёртки с данными на множестве узлов в области в виде рядов экспонент, показатели которых принадлежат разреженному подмножеству нулей характеристической функции этого оператора. Это даёт существенное усиление известных результатов по теме.

Ключевые слова: ряд экспонент, кратная интерполяция, оператор свёртки.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524852149-152

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА

Пусть $M = \{\mu_k\} \subset \mathbb{C}$ — счётное множество узлов, дискретное в $\mathbb{C}$; $m_k \in \mathbb{N}$ — кратности узлов μ_k, а $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — некоторое неограниченное множество показателей. Обозначим

$$\Sigma(\Lambda,\ \mathbb{C}) = \left\{U\colon U(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ \lambda_n \in \Lambda\right\},$$

ряды абсолютно сходятся для $z \in \mathbb{C}$. Известно, что такие ряды сходятся равномерно на всех компактных подмножествах в $\mathbb{C}$, так что все $U \in \Sigma(\Lambda,\ \mathbb{C})$ — это целые функции; $\Sigma(\Lambda,\ \mathbb{C})$ — это линейное подпространство $H(\mathbb{C})$, вообще говоря, не замкнутое.

Наша цель — описать классы множеств M и Λ, которые дают разрешимость следующей проблемы: для любых интерполяционных данных $b_k^j \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_k - 1$, существует такая сумма ряда $U \in \Sigma(\Lambda,\ \mathbb{C})$, что $U^{(j)}(\mu_k) = b_k^j$.

Контрпример. В случае $\Lambda = \{2\pi n,\ n \in \mathbb{N}\}$ все целые функции вида $U(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi nz}$ удовлетворяют разностному уравнению $U(z) = U(z + i)$. Видим, что для любых двух узлов вида $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu + i$, $\mu \in \mathbb{C}$, простая интерполяция $U(\mu_k) = b_k$ невозможна для интерполяционных данных $b_1 \neq b_2$.

Представления для $H(\mathbb{C})$. Классический результат об интерполяции в пространстве $H(\mathbb{C})$ позволяет сделать следующее. Пусть $\psi_M \in H(\mathbb{C})$ — функция с нулевым множеством $M = \{\mu_k\}$ с учётом кратностей m_k. Обозначим через $(\psi_M) = \{h \in H(\mathbb{C})\colon h = r\psi_M,\ r \in H(\mathbb{C})\}$ идеал в $H(\mathbb{C})$, порождаемый ψ_M. Для заданного множества узлов M разрешимость проблемы интерполяции рядами экспонент равносильна существованию представления $H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda,\ \mathbb{C}) + (\psi_M)$.

Определение. Обозначим $\mathbb{S} = \{s \in \mathbb{C}\colon |s| = 1\}$. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ — неограниченное множество. Множество $P(X) \subset \mathbb{S}$ предельных направлений в бесконечности состоит из всех таких $s \in S$, что $s = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_k}{|x_k|}$ для некоторой последовательности $\{x_k\} \subset X$, $x_k \to \infty$.

Выберем произвольно разреженную последовательность $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, такую что $|\lambda_{n+1}| > 2|\lambda_n|$ и $P(\{\lambda_n\}) = P(\Lambda)$. Она имеет нулевую плотность, а целая функция $G_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$ имеет минимальный тип при порядке роста 1.

Пусть M_{G_1} — оператор свёртки в $H(\mathbb{C})$, порождаемый G_1. Результаты А.Ф. Леонтьева [1]

Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук

**E-mail*: *msg2000@mail.ru*

***E-mail*: *spopenov@gmail.com*

(и О.А. и А.С. Кривошеевых [2–4]) дают фундаментальный принцип для M_{G_1}, т.е. $\operatorname{Ker} M_{G_1} = \Sigma(\{\lambda_n\}, \mathbb{C})$. Итак, следует изучать представления $H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_{G_1} + (\psi_M)$, так как $\operatorname{Ker} M_{G_1} = \Sigma(\{\lambda_n\}, \mathbb{C}) \subset \Sigma(\Lambda, \mathbb{C})$.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТКИ

Когда M есть дискретное подмножество в угле, В.В. Напалков [5–7] впервые нашёл достаточные условия для существования представлений

$$H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_G + (\psi_M), \tag{1}$$

где M_G — оператор свёртки, порождаемый целой функцией G экспоненциального типа. Любой элемент $\operatorname{Ker} M_G$ есть предел квазиполиномов с показателями из нулевого множества $\Lambda = Z_G$ функции G, но, вообще говоря, он не представляется в виде какого-либо ряда экспонент. Выше указано, в (1) можно заменить $\operatorname{Ker} M_G$ на $\operatorname{Ker} M_{G_1} = \Sigma(\{\lambda_n\}, \mathbb{C})$, где $\{\lambda_n\} \subset Z_G$, и $\{\lambda_n\}$ — разреженная последовательность.

Вводится класс специальных множеств M, включающий в себя все M, которые изучались ранее. Используется обычная двойственность, порождаемая преобразованием Лапласа в сильно сопряжённом пространстве, и найден метод для изучения естественных двойственных проблем в пространстве целых функций экспоненциального типа. Удалось найти условия разрешимости проблемы интерполяции и, как следствие, разрешимости глобальной задачи Коши с данными на специальных M в виде рядов экспонент, причём мы можем рассматривать голоморфные функции в области. Это усиливает часть результатов В.В. Напалкова и учеников (см., например, [5–8], а также наши результаты в [9–11]).

Оказалось, что для некоторых Λ эти условия необходимы для произвольных M для общей проблемы интерполяции функциями вида $U(z) = \int\limits_{\Lambda} e^{\lambda z} d\sigma$, где $d\sigma$ — произвольная мера Радона на Λ. При этом нахождение необходимых условий для задачи Коши (1) — открытая непростая проблема.

ДЕФЕКТ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Далее мы используем обозначения $s_\tau = e^{i\tau}$ и $s_\omega = e^{i\omega}$, $\omega, \tau \in [0, 2\pi)$, для элементов $P(M)$ и $P(\Lambda)$ соответственно.

Условия. Для каждого элемента $s_\tau \in P(M)$ выполнено одно из двух условий:

(A) Существуют такой элемент $s_\omega \in P(\Lambda)$, что $\operatorname{Re}(s_\omega s_\tau) > 0$, и число $\kappa(s_\omega) \in \mathbb{R}$, что для всех $c > \kappa(s_\omega)$ каждая прямая $l(s_\omega, c) = \{\operatorname{Re}(s_\omega z) = c\}$ содержит не более одного узла $\mu_k \in M$;

(B) Существуют такой элемент $s_\omega \in P(\Lambda)$, что $\operatorname{Re}(s_\omega s_\tau) = 0$, и число $\kappa(s_\omega) \in \mathbb{R}$, что для всех $c > \kappa(s_\omega)$ каждая прямая $l(s_\omega, c)$ содержит не более одного узла $\mu_k \in M$; для каждой подпоследовательности $\{\mu_{k_l}\} \subset M$, такой что $|\mu_{k_l}| \to \infty$ и $s_\tau = \lim\limits_{k_l \to \infty} \frac{\mu_{k_l}}{|\mu_{k_l}|}$, существует предел $\lim\limits_{k_l \to \infty} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_{k_l}) = +\infty$.

Обозначим через $P_M(\Lambda) \subset P(\Lambda)$ множество всех тех предельных направлений $s_\omega \in P(\Lambda)$, которые связаны с $s_\tau \in P(M)$ в (A) и (B). Из этих условий следует, что множество $D_M = \bigcap\limits_{s_\omega \in P_M(\Lambda)} \{\mu_k \in M\colon \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) \le \kappa(s_\omega)\}$ конечное или пустое.

Рассмотрим квазиполиномы $q(z)$, порождаемые мономами $z^j \exp(\mu_k z)$, где $\mu_k \in D_M$, $j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$. Пусть $d_M \in \mathbb{Z}_+$ — размерность подпространства всех q, обращающихся в нуль на $\{\lambda_n\}$. В некоторых случаях $d_M = 0$; если $D_M \ne \phi$, это условие означает, что $\{\lambda_n\}$ является множеством единственности для таких q.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются условия* (A) *и* (B), *тогда для любой последовательности* $\{\lambda_n\} \in \Lambda\colon |\lambda_{n+1}| > 2|\lambda_n|$, $P(\{\lambda_n\}) = P_M(\Lambda)$,

1) *подпространство* $\operatorname{Ker} M_{G_1} + (\psi_M)$ *замкнутое*; *если* $d_M > 0$, *оно имеет конечную коразмерность* d_M *в* $H(\mathbb{C})$; *существуют такие* $\xi_1, \ldots, \xi_{d_M} \in \mathbb{C}$, *что* $H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_{G_1} + (\psi_M) + \operatorname{span}\{\exp(\xi_l z)\}_{l=1}^{d_M}$;

2) *если* $d_M = 0$, *тогда* $H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_{G_1} + (\psi_M)$;

3) *подпространство* $\operatorname{Ker} M_{G_1} \cap (\psi_M)$ *имеет бесконечную размерность*.

Утверждение 2) даёт разрешимость рассматриваемой проблемы интерполяции в области (как в следствии ниже) и задачи Коши (1) для общего оператора свёртки M_G (в этом случае $\{\lambda_n\} \subset Z_G$, $\operatorname{Ker} M_{G_1} = \Sigma(\{\lambda_n\}, \mathbb{C}) \subset \operatorname{Ker} M_G$) в случае, когда $D_M = \phi$. Если $D_M \ne \phi$, несложно привести легко проверяемые признаки для $d_M = 0$. Например, $d_M = 0$, если существует такое направление s_ω, что каждая прямая $l(s_\omega, z) = \{\operatorname{Re}(s_\omega z) = c\}$ содержит не более одного узла $\mu_k \in M$. Утверждение 3) указывает на неединственность интерполяции.

Используя известные результаты (например, [12]) об асимптотическом расположении и локализации нулей квазиполиномов, можно привести более общие признаки как для замкнутости суммы, так и для условия $d_M = 0$.

БОЛЕЕ ОБЩИЙ ПОДХОД К ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Покажем, что можно привлекать более общие объекты при изучении проблемы интерполяции. В качестве иллюстрации предположим, что Λ имеет только одно предельное направление s_ω в бесконечности.

Изменим класс рассматриваемых множеств узлов: далее счётные множества $M \subset \mathbb{C}$ могут иметь конечные предельные точки, но не содержат их. Кроме того, расширим определение рядов экспонент, используемых для интерполяции, на основе аналога теоремы Абеля для степенных рядов [13].

Теорема Абеля. *Если ряд экспонент с показателями, имеющими только одно предельное направление s_ω, абсолютно сходится в окрестности $z = \mu_k$, он сходится абсолютно в полуплоскости $\Pi(s_\omega, \mu_k) = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s_\omega z) < \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k)\}$.*

Эта теорема позволяет предполагать, что ряды экспонент, привлекаемые для интерполяции, абсолютно сходятся всего лишь в окрестностях $\mu_k \in M$, так что их суммы — это локально аналитические функции на множестве M. Но любой такой ряд сходится абсолютно в области $\Pi = \Pi_{\omega,M} = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, M) = \sup\limits_{\mu_k \in M} (s_\omega \mu_k)\}$, а его сумма является голоморфной в ней.

Если $d(s_\omega, M) = +\infty$, область Π есть вся плоскость $\mathbb{C}$, и, как и ранее, для интерполяции используются суммы рядов из $\Sigma(\Lambda, \mathbb{C})$. Это целые функции. Если $d(s_\omega, M) < \infty$, область Π — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, M)\}$ и используются согласно новому определению суммы рядов из $\Sigma(\Lambda, \Pi)$, абсолютно сходящихся в Π; это функции, голоморфные в Π. Далее следует изучать представления $H(\Pi) = \Sigma(\Lambda, \Pi) + (\psi_M)_\Pi$, где $\psi_M \in H(\Pi)$, $Z_{\psi_M} = M$.

КРИТЕРИИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА МНОЖЕСТВ УЗЛОВ

Далее, помимо указанных изменений в постановке проблемы, множества узлов удовлетворяют более сильному условию, чем в (А) и (В) выше: каждая прямая $l(s_\omega, c) = \{\operatorname{Re}(s_\omega z) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, содержит не более одного узла $\mu_k \in M$.

Теорема 2. *Предположим, что $P(\Lambda) = \{s_\omega\}$ и пусть $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ — это любая разреженная последовательность.*

1. *Пусть $d(s_\omega, M) = +\infty$, так что $\Pi = \mathbb{C}$. Проблема интерполяции суммами рядов из $\Sigma(\{\lambda_n\}, \mathbb{C})$ разрешима в $H(\mathbb{C})$ для всех специальных счётных $M \subset \mathbb{C}$, описанных выше, тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) = +\infty$.*

2. *Пусть $d(s_\omega, M) < \infty$, так что Π — это полуплоскость. Проблема интерполяции суммами рядов из $\Sigma(\{\lambda_n\}, \Pi)$ разрешима в $H(\Pi)$ для всех специальных счётных $M \subset \mathbb{C}$, описанных выше, тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) < d(s_\omega, M)$ для всех $\mu_k \in M$, и существует предел $\lim\limits_{k_l\to\infty} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_{k_l}) = d(s_\omega, M)$.*

Следствие. *Пусть $P(\Lambda) = \{s_\omega\}$, D — произвольная область, а $M \subset D$ — любое специальное множество, дискретное в D. Проблема интерполяции суммами рядов экспонент, абсолютно сходящихся в окрестностях всех $\mu_k \in M$, разрешима в $H(D)$ тогда и только тогда, когда все конечные предельные точки M принадлежат $\partial D \cap \Pi$ и выполнены условия на M в утверж-дениях* 1 *и* 2 *теоремы* 2. *Интерполяция осуществляется суммами рядов из $\Sigma(\{\lambda_n\}, \Pi) \subset H(D)$ для произвольной разреженной последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$.*

Важно, что необходимость удалось доказать для упомянутой проблемы интерполяции образами преобразования Лапласа мер Радона на Λ и для произвольных множеств узлов. Для сокращения обозначений здесь рассмотрены только множества Λ с единственным предельным направлением и специальные множества M. Наши методы позволяют изучать и более общие множества M и Λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
2. *Кривошеев А.С.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68. № 2. С. 71–136.
3. *Кривошеева О.А., Кривошеев А.С.* // Функцион. анализ и прил. 2012. Т. 46. № 4. С. 14–30.
4. *Кривошеев А.С., Кривошеева О.А.* // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5. № 3. С. 96–120.
5. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
6. *Напалков В.В., Попенов С.В.* // ДАН. 2001. Т. 381. № 2. С. 164–166.
7. *Напалков В.В., Нуятов А.А.* // Мат. сб. 2012. Т. 203. № 2. С. 77–86.
8. *Напалков В.В., Нуятов А.А.* // ТМФ. 2014. Т. 180. № 2. С. 264–271.
9. *Зименс К.Р., Напалков В.В.* // ДАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 387–389.
10. *Мерзляков С.Г., Попенов С.В.* // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5. № 3. С. 130–143.

11. *Мерзляков С.Г.*, *Попенов С.В.* // Уфим. мат. журн. 2015. Т. 7. № 1. С. 46–58.
12. *Мерзляков С.Г.*, *Попенов С.В.* Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и ее прил. М.: ВИНИТИ РАН, 2017. Т. 143. С. 48–62.
13. *Мерзляков С.Г.* // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 57–80.

INTERPOLATION BY SUMS OF SERIES OF EXPONENTIALS AND GLOBAL CAUCHY PROBLEM FOR CONVOLUTION OPERATORS

S. G. Merzlyakov, S. V. Popenov

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov October 15, 2018

Received October 15, 2018

The study is made of the problem of multiple interpolation on an infinite nodes set by the sums of absolutely convergent series of exponentials whose exponents are from a given set. For entire function conditions on nodes and exponents are obtained that give solubility of the problem. A new approach is demonstrated that enable us, for the case of holomorphic function in a domain, to obtain criteria of solubility of the problem for some class of exponents set and for a special class of nodes set. Moreover the necessity of the conditions is proved in great generality namely for arbitrary nodes sets and in the setting of interpolation by functions that are represented as the Laplace transforms of the Radon measures over the exponents set. Solubility is obtained of the global Cauchy problem for convolution operator with data on the nodes set in domain, in the form of the series of exponentials whose exponents belong to a sparse subset of zero set of characteristic function of the operator. The results substantially strengthen the known results on the theme.

Keywords: series of exponentials, multiple interpolation, convolution operator.