ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 3, с. 269–271

МАТЕМАТИКА

УДК 519

О ЧИСЛАХ НЕЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ С ВЕРШИНАМИ В $\{-1, 0, 1\}^n$

А. М. Райгородский[1,2,3,4,*], Е. Д. Шишунов[2]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 02.11.2018 г.

Поступило 14.11.2018 г.

Получены новые оценки чисел независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}$.

Ключевые слова: число независимости, дистанционный граф.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524853269-271

Одной из классических проблем на стыке экстремальной комбинаторики и теории кодирования является задача отыскания максимальных мощностей совокупностей векторов с заданными ограничениями на величины попарных скалярных произведений (хэмминговых расстояний). Такую задачу зачастую удобно выражать в терминах так называемых дистанционных графов и их чисел независимости. Под дистанционным графом в $\mathbb{R}^n$ мы понимаем граф, у которого вершины — точки n-мерного евклидова пространства, а рёбра — пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние из некоторого множества $\mathcal{A}$ положительных чисел. Числом независимости графа G называется максимальная мощность $\alpha(G)$ независимого множества вершин, т.е. такого множества, в котором вершины попарно не соединены рёбрами. Например, в таких терминах задача о равновесных двоичных кодах, исправляющих ошибки, — это задача о числе независимости графа с вершинами из $\{0, 1\}^n$, в каждой из которых одно и то же число r единиц, и рёбрами, возникающими тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов, отвечающих вершинам, принадлежит множеству $\mathcal{B} = \{s, s+1, \dots, r-1\}$ с некоторым s, определяемым по числу исправляемых ошибок. Скажем, классическая теорема Эрдёша—Ко—Радо (см. [1]) в этих обозначениях говорит о числе независимости так называемого кнезеровского графа, у которого в точности такие же вершины, как в примере с кодами, исправляющими ошибки, а рёбра возникают тогда и только тогда, когда скалярные произведения вершин-векторов равны нулю.

В недавних работах [2, 3] найдены числа независимости графов $G_n = (V_n, E_n)$, у которых $V_n \subset \{-1, 0, 1\}^n$, причём длина каждой вершины-вектора равна $\sqrt{3}$ (в каждой вершине три ненулевых координаты), а рёбра задаются скалярным произведением единицы. В настоящей работе нам удалось получить асимптотическое решение аналогичной задачи для случая, когда вместо $\sqrt{3}$ рассматривается $\sqrt{r}$ с произвольным $r \geq 5$. Справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть $r \geq 5$. Положим*

$$\left[\frac{n-3}{3}\right]^3 = \begin{cases} \left(\dfrac{n-3}{3}\right)^3, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ \left(\dfrac{n-4}{3}\right)^2\left(\dfrac{n-1}{3}\right), & n \equiv 1 \pmod 3, \\ \left(\dfrac{n-2}{3}\right)^2\left(\dfrac{n-5}{3}\right), & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

При $n \to \infty$ выполнены неравенства

$$2C_{n-2}^{r-2} \leq \alpha(G_n) \leq 2C_{n-2}^{r-2} + O(n^{r-3}), \quad \text{при } r > 5,$$

$$2C_{n-3}^{3} + \left[\frac{n-3}{3}\right]^3 \leq \alpha(G_n) \leq 2C_{n-3}^{3} + \left[\frac{n-3}{3}\right]^3 + O(n^2), \quad \text{при } r = 5.$$

Отметим, что рассматриваемая проблематика тесно связана с классической задачей Нелсона—Хадвигера о раскраске пространства (см. [4]). Стоит также отметить недавние близкие работы [5–15].

Обоснуем нижние оценки в теореме. Верхние оценки требуют более сложного анализа, который

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.*
[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
[3] *Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп*
[4] *Институт математики и информатики Бурятского государственного университета, Улан-Удэ*
**E-mail*: mraigor@yandex.ru

в настоящем сообщении нет возможности провести.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НИЖНИХ ОЦЕНОК

1. Случай $r > 5$

Возьмём множество векторов, у которых на первых двух позициях стоят единицы и все остальные ненулевые координаты равны единице. Количество таких векторов равняется C_{n-2}^{r-2}. Очевидно, что скалярное произведение любых двух таких векторов не меньше двух. Теперь возьмём второе множество векторов, у которых на первых двух позициях стоит по -1 и все остальные ненулевые координаты равны -1. Количество таких векторов тоже равняется C_{n-2}^{r-2}, и скалярное произведение любых двух векторов из второго множества не меньше двух. Векторы из разных множеств дают в скалярном произведении меньше -1, т.е. множество векторов, состоящее из этих двух множеств, является независимым, а его мощность равна $2C_{n-2}^{r-2}$.

2. Случай $r = 5$

Разобьём множество координат (кроме первых трёх) на три почти равные (отличающиеся не более чем на единицу) части $\left(\text{если } n \equiv 0 \pmod 3, \text{ то все три части содержат по } \frac{n-3}{3} \text{ координаты; если } n \equiv 1 \pmod 3, \text{ то части содержат } \frac{n-4}{3}, \frac{n-4}{3}, \frac{n-1}{3} \text{ координаты соответственно; в оставшемся случае координаты распределяются так: } \frac{n-5}{3}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-2}{3}\right)$. Обозначим части буквами A, B и C. Будем говорить, что ненулевая координата вектора лежит в X^+, где $X \in \{A, B, C\}$, если её номер находится в X и сама она положительна. Аналогично с X^-.

Возьмём всевозможные векторы, у которых на первых трёх позициях стоят $\{1, -1, 0\}$, а остальные три ненулевые координаты распределены так: либо все три лежат в $A^+ \cup B^+$, либо две лежат в $A^+ \cup B^+$, а третья — в C^+. Назовём это множество векторов первым.

Теперь возьмём всевозможные векторы, у которых на первых трёх позициях стоят $\{-1, 0, 1\}$, а остальные три ненулевые координаты расположены следующим образом: либо все три лежат в $B^- \cup C^+$, либо две лежат в $B^- \cup C^+$, а третья — в A^-. Это множество векторов назовём вторым.

Наконец построим третье множество векторов. На первых трёх координатах поставим $\{0, 1, -1\}$, а остальные три ненулевые координаты расположим так: либо все три в $A^- \cup C^-$, либо две в $A^- \cup C^-$, а третья — в B^+.

Заметим, что векторы из одного множества имеют скалярное произведение, не меньшее двух (за счёт первых трёх позиций), а у векторов из разных множеств первые три координаты в скалярном произведении дают -1, тогда как на остальных позициях у них не больше одной общей координаты одного и того же знака, т.е. их скалярные произведения не превосходят нуля.

Таким образом, множество векторов, состоящее из первого, второго и третьего множеств, является независимым, а его мощность как раз равна $2C_{n-3}^{3} + \left[\frac{n-3}{3}\right]^3$.

Источники финансирования. Работа выполнена за счёт гранта РФФИ (проект 18–01–00355) и гранта Президента РФ НШ-6760.2018.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdös P.*, *Ko Ch.*, *Rado R.* Intersection Theorems for Systems of Finite Sets // J. Math. Oxford. Sec. 1961. V. 12. P. 313–320.
2. *Cherkashin D.*, *Kulikov A.*, *Raigorodskii A.* On the Chromatic Numbers of Small-Dimensional Euclidean Spaces // Discrete and Appl. Math. 2018. V. 243. P. 125–131.
3. *Черкашин Д.Д.*, *Райгородский А.М.* О хроматических числах пространств малой размерности // ДАН. 2017. Т. 472. № 1. С. 11–12.
4. *Raigorodskii A.M.* Combinatorial Geometry and Coding Theory // Fundamenta Informatica. 2016. V. 145. P. 359–369.
5. *Райгородский А.М.*, *Сагдеев А.А.* Об одной оценке в экстремальной комбинаторике // ДАН. 2018. Т. 478. № 3. С. 271–273.
6. *Frankl P.*, *Kupavskii A.* Erdös–Ko–Rado Theorem for {0, ±1}-Vectors // J. Combin. Theory Ser. A. 2018. V. 155. P. 157–179.
7. *Просанов Р.И.*, *Сагдеев А.А.*, *Райгородский А.М.* Улучшения теоремы Франкла–Рёдля и геометрические следствия // ДАН. 2017. Т. 475. № 2. С. 137–139.
8. *Бобу А.В.*, *Куприянов А.Э.*, *Райгородский А.М.* О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечений // ДАН. 2017. Т. 475. № 4. С. 365–368.
9. *Бобу А.В.*, *Куприянов А.Э.*, *Райгородский А.М.* Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним за-

прещенным пересечением // Мат. сб. 2016. Т. 207. № 5. С. 17–42.
10. *Cherkashin D.* Coloring Cross-Intersecting Families // Electron. J. Combin. 2018. V. 25. № 1. P. 1.47.
11. *Kupavskii A.* Diversity of Uniform Intersecting Families // Eur. J. Combin. 2018. V. 74. P. 39–47.
12. *Frankl P.*, *Kupavskii A.* Counting Intersecting and Pairs of Cross-Intersecting Families // Combin. Probab. Comput. 2018. V. 27. № 1. P. 60–68.
13. *Frankl P.*, *Kupavskii A.* Families of Sets with no Matching of Sizes 3 and 4 // Eur. J. Combin. 2019. V. 75. P. 123–135.
14. *Frankl P.*, *Kupavskii A.* New Inequalities for Families without *k* Pairwise Disjoint Members // J. Combin. Th. Ser. A. 2018. V. 157. P. 427–434.
15. *Kupavskii A.*, *Zakharov D.* Regular Bipartite Graphs and Intersecting Families // J. Combin. Theory. Ser. A. 2018. V. 155. P. 180–189.

ON THE INDEPENDENCE NUMBERS OF SOME DISTANCE GRAPHS WITH VERTICES IN $\{-1, 0, 1\}^n$

A. M. Raigorodskii[1,2,3,4], E. D. Shishunov[2]

[1] Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation
[2] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
[3] Adygya State University, Maikop, Russian Federation
[4] Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov November 2, 2018

Received November 14, 2018

New estimates for the independence numbers of distance graphs with vertices in $\{-1, 0, 1\}^n$ are obtained.

Keywords: independence number, distance graph.

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 3, с. 272–275

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

ВЫРОЖДЕННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Академик РАН В. А. Садовничий[1,*], Я. Т. Султанаев[2,3,], А. М. Ахтямов[2,4]**

Поступило 19.10.2018 г.

Изучаются краевые условия задачи Штурма—Лиувилля, заданной на звездообразном геометрическом графе из трёх рёбер. Показано, что в случае если длины рёбер различны, то задача Штурма—Лиувилля не имеет вырожденных краевых условий. Если же длины рёбер и потенциалы одинаковы, то характеристический определитель задачи Штурма—Лиувилля не может быть равен константе, отличной от нуля. А вот множество задач Штурма—Лиувилля, для которых характеристический определитель тождественно равен нулю, является бесконечным (континуумом). Таким образом, в отличие от задачи Штурма—Лиувилля, заданной на отрезке, множество краевых задач на звездообразном графе, спектр которых полностью заполняет всю плоскость, гораздо богаче. В частном случае, когда минор A_{124} матрицы коэффициентов отличен от нуля, оно состоит не из двух задач, как в случае задачи Штурма—Лиувилля, заданной на отрезке, а из 18 классов, каждый из которых содержит от двух до четырёх произвольных констант.

Ключевые слова: вырожденные краевые условия, задача Штурма—Лиувилля, геометрический звездообразный граф.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524853272-275

Вырожденными краевыми условиями спектральной задачи называют такие краевые условия, для которых характеристический определитель тождественно равен константе [1, с. 35]. Прямые и обратные задачи с невырожденными краевыми условиями достаточно хорошо изучены (см., например, [2, 3]). Вырожденные краевые условия исследованы меньше. Хорошо известен, пожалуй, лишь пример М.Х. Стоуна дифференциального оператора второго порядка, для которого спектр заполняет всю комплексную плоскость [4]. В 1927 г. Стоуном было показано, что если потенциальная функция $q(x)$ является симметрической (т.е. $q(x) = q(\pi - x)$) и $a = 1$, то любое комплексное число является точкой спектра краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) \pm ay(\pi) = 0,$$
$$y'(0) \mp ay'(\pi) = 0. \tag{1}$$

Таким образом, спектр этой краевой задачи полностью заполняет всю плоскость.

Первые результаты для дифференциальных операторов произвольного чётного порядка n были получены в 1982 г. в работе В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина [5] (см. также работу Джона Локкера [6]). В [5] было показано, что для любого чётного порядка существуют дифференциальные операторы, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Эти краевые условия имели вид

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1} y^{(j-1)}(1) = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

В статье А.С. Макина [7], вышедшей в 2018 г., показано, что для дифференциальных уравнений чётного порядка n при $d \neq \pm 1$ краевые условия

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + d \cdot (-1)^{j-1} y^{(j-1)}(1) = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

также являются вырожденными, но в этом случае соответствующая краевая задача не имеет спектра ($\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const} \neq 0$).

В [8] показано, что вырожденные краевые условия существуют и для краевых задач с дифференциальным уравнением любого нечётного порядка. Некоторые вопросы, связанные с вырожденными краевыми условиями, рассмотрены также в работах [9–11].

В [12] описаны все вырожденные краевые условия для задачи Штурма—Лиувилля. Точнее, показано следующее: если $q(x) \neq q(\pi - x)$ на некотором интервале из отрезка $[0, \pi]$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможен, и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши $y(0) = y'(0) = 0$ и $y(\pi) = y'(\pi) = 0$. Если $q(x) = q(\pi - x)$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ реализуется тогда

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
[2] *Институт механики Уфимского научного центра Российской Академии наук*
[3] *Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа*
[4] *Башкирский государственный университет, Уфа*
**E-mail*: *rector@msu.ru*
***E-mail*: *akhtyamovam@mail.ru*

и только тогда, когда краевые условия (1) при $n = 2$ являются ложнопериодическими краевыми условиями (1) с $a = 1$, а случай $\Delta(\lambda) \equiv C \neq 0$ — тогда и только тогда, когда краевые условия (1) при $n = 2$ являются обобщёнными условиями Коши (1) с $a \neq 1$.

В настоящей работе показано, что если рассматривать задачу Штурма—Лиувиля не на отрезке, а на звездообразном графе с рёбрами одинаковой длины, то множество краевых задач, спектр которых заполняет всю плоскость, не ограничивается двумя примерами. Это множество на звездообразном графе гораздо богаче. Оно является бесконечным (континуумом). Только для одного из частных случаев множество краевых задач, спектр которых заполняет всю плоскость, состоит из 18 классов, каждый из которых содержит от двух до четырёх произвольных констант.

Обозначим через L следующую задачу Штурма—Лиувилля на звездообразном геометрическом графе из трёх рёбер с общей точкой в нуле:

$$ly = -y_i'' + q_i(x)y_i = \lambda y_i = s^2 y_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} a_{i1}y_1(l_1) + a_{i2}y_2(l_2) + a_{i3}y_3(l_3) + a_{i4}y_1'(l_1) + \\ + a_{i5}y_2'(l_2) + a_{i6}y_3'(l_3) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где вещественная функция $q_i(x) \in L_1(0, \pi)$, a_{ij} ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \ldots, 6$) — комплексные постоянные.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} краевых условий (4) через A; её миноры, составленные из l-го, m-го и n-го столбцов, — через A_{klm}:

$$\begin{gathered} A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{Vmatrix}, \\ A_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{1l} & a_{1m} & a_{1n} \\ a_{2l} & a_{2m} & a_{2n} \\ a_{3l} & a_{3m} & a_{3n} \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{5}$$

На протяжении всей работы будем считать, что выполняется условие

$$\operatorname{rank} A = 3. \tag{6}$$

Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты a_{ij} вырожденных краевых условий (4).

Характеристическим определителем задачи L является функция

$$\Delta(\lambda) = \sum_{l<m<n} A_{lmn} Z_{lmn}, \tag{7}$$

где Z_{lmn} — это некоторые функции от λ, связанные с линейно независимыми решениями уравнения (2).

Если l_i ($i = 1, 2, 3$) различны, то из асимптотических соотношений для линейно независимых решений уравнения (2) [13, с. 62–65] следует линейная независимость функций $Z_{124} = Z_{236}$, $Z_{125} = -Z_{136}$, $Z_{134} = -Z_{235}$, $Z_{145} = Z_{356}$, $Z_{146} = -Z_{256}$, $Z_{245} = -Z_{346}$, Z_{126}, Z_{135}, Z_{234}, Z_{126}, Z_{135}, Z_{234}, Z_{156}, Z_{246}, Z_{345}.

Из этих же асимптотических соотношений следует, что тождество

$$\Delta(\lambda) \equiv \sum_{l<m<n} A_{lmn} Z_{lmn} \equiv C \neq 0 \tag{8}$$

невозможно, а тождество

$$\Delta(\lambda) \equiv \sum_{l<m<n} A_{lmn} Z_{lmn} \equiv 0 \tag{9}$$

возможно только тогда, когда

$$\begin{gathered} A_{124} + A_{236} = A_{125} - A_{136} = A_{134} - A_{235} = 0, \\ A_{123} = 0, \quad A_{456} = 0, \\ A_{145} + A_{356} = A_{146} - A_{256} = A_{245} - A_{346} = 0, \\ A_{126} = A_{135} = A_{234} = A_{126} = A_{135} = A_{234} = \\ = A_{156} = A_{246} = A_{345} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Известно, что числа $A_{i_1 i_2 i_3}$ являются минорами матрицы A тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера [14], где даются обобщения правила Крамера на случай матриц $m \times n$. Для матрицы A размера 3×6 эти соотношения таковы:

$$\begin{gathered} A_{i_1 i_4 i_5} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} + A_{i_1 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\ A_{i_1 i_4 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_1 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\ A_{i_1 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_1 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} = 0, \\ A_{i_2 i_4 i_5} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} + A_{i_2 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\ A_{i_2 i_4 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\ A_{i_2 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} = 0, \\ A_{i_3 i_4 i_5} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3} A_{i_1 i_3 i_5} + A_{i_2 i_5 i_3} A_{i_1 i_3 i_4} = 0, \\ A_{i_3 i_4 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3} A_{i_1 i_3 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3} A_{i_1 i_3 i_4} = 0, \\ A_{i_3 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_5 i_3} A_{i_1 i_3 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3} A_{i_1 i_3 i_5} = 0, \\ A_{i_4 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_2 i_4} A_{i_3 i_5 i_6} + A_{i_1 i_2 i_5} A_{i_3 i_4 i_6} - A_{i_1 i_2 i_6} A_{i_3 i_4 i_5} = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) — такая перестановка, что $A_{i_1 i_2 i_3} \neq 0$.

Предположим, что $A_{124} = 1 \neq 0$, тогда из пятого равенства (11) и (10) следует, что $A_{236}A_{124} = 0$, $A_{124} + A_{236} = 0$. Отсюда $A_{124} = 0$. Получили противоречие.

Аналогично предположив, что какое-нибудь из $A_{ijk} \neq 0$, из равенств (10) и (11) получим, что $A_{ijk} = 0$. Отсюда следует, что в случае когда l_i различны, все миноры третьего порядка матрицы A обращаются в нуль, что противоречит условию (6). Следовательно, тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможно и справедлива следующая

Теорема 1. *Если* l_i $(i = 1, 2, 3)$ *различны, то краевая задача* (2)–(4) *не имеет вырожденных краевых условий.*

Если $l_i = l$ и $q_i(x) = q(x)$ $(i = 1, 2, 3)$, то линейно независимыми будут функции $Z_{126} = -Z_{135} = Z_{234}$, $Z_{156} = Z_{246} = Z_{345}$, $Z_{124} = Z_{356} = Z_{256} = Z_{245} = -Z_{146} = -Z_{346}$, $Z_{145} = Z_{356} = Z_{256} = Z_{245} = -Z_{146} = -Z_{346}$. Отсюда следует, что тождество (8) невозможно, а тождество (9) возможно только тогда, когда выполняются равенства (11) и

$$\begin{gathered} A_{124} + A_{236} + A_{125} + A_{235} - A_{136} - A_{134} = 0, \\ A_{123} = 0, \;\; A_{126} - A_{135} + A_{234} = 0, \\ A_{145} + A_{356} + A_{256} + A_{245} - A_{146} - A_{346} = 0, \\ A_{456} = 0, \;\; A_{156} - A_{246} + A_{345} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) образуют систему уравнений на миноры матрицы A, для которых выполняется тождество (9). Уравнения (11) зависят от того, какой из миноров A_{ijk} отличен от нуля.

Если $A_{124} = 1 \neq 0,$ то получим 18 решений системы уравнений (11), (12), одним из которых является следующее:

$$\begin{gathered} A_{125} = -C_1, \;\; A_{126} = 1, \;\; A_{134} = 0, \;\; A_{135} = 0, \\ A_{136} = 0, \;\; A_{145} = C_3, \;\; A_{146} = 0, \;\; A_{156} = -C_3, \\ A_{234} = -1, \;\; A_{235} = C_1, \;\; A_{236} = -1, \;\; A_{245} = C_2, \\ A_{246} = 0, \;\; A_{256} = -C_2, \;\; A_{345} = C_3, \;\; A_{346} = 0, \\ A_{356} = -C_3. \end{gathered}$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — произвольные константы.

По найденным минорам можно найти матрицу коэффициентов краевых условий и сами краевые условия (см. [14]).

Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ — произвольная строчка искомой матрицы A, то она должна удовлетворять условию (6):

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{Vmatrix} = 3.$$

Поскольку $A_{124} \neq 0,$ то окаймляющие его миноры четвёртого порядка должны быть равны нулю. Отсюда получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} =$$
$$= -x_1 \cdot A_{234} + x_2 \cdot A_{134} - x_3 \cdot A_{124} + x_4 \cdot A_{123} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} =$$
$$= -x_1 \cdot A_{245} + x_2 \cdot A_{145} - x_4 \cdot A_{125} + x_5 \cdot A_{124} = 0, \tag{14}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{36} \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_6 \end{vmatrix} =$$
$$= -x_1 \cdot A_{246} + x_2 \cdot A_{146} - x_4 \cdot A_{126} + x_6 \cdot A_{124} = 0. \tag{15}$$

Поскольку $A_{124} \neq 0,$ то можно считать, что $A_{124} = 1$. Кроме того, $A_{123} = 0$. Подставив эти значения миноров и решение 2 в уравнения (13)–(15), получим систему уравнений

$$\begin{gathered} x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 C_2 + x_2 \cdot C_3 + x_4 \cdot C_1 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Учитывая равенства (16) и то, что $A_{124} = 1$, в качестве линейно независимых строк можно выбрать строки с элементами

$$\begin{gathered} x_1 = 1, \;\; x_2 = 0, \;\; x_4 = 0, \;\; x_3 = 1, \;\; x_5 = C_2, \;\; x_6 = 0, \\ x_1 = 0, \;\; x_2 = 1, \;\; x_4 = 0, \;\; x_3 = 0, \;\; x_5 = -C_3, \;\; x_6 = 0, \\ x_1 = 0, \;\; x_2 = 0, \;\; x_4 = 1, \;\; x_3 = 0, \;\; x_5 = -C_1, \;\; x_6 = 1. \end{gathered}$$

Следовательно, искомые вырожденные краевые условия имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} y_1(l) + y_3(l) + C_2 y_2'(l) = 0, \\ y_2(l) - C_3 y_2'(l) = 0, \\ y_1'(l) - C_1 y_2'(l) + y_3'(l) = 0. \end{gathered}$$

Аналогично получаются остальные 17 классов решений.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Если* $l_i = l$ $(i = 1, 2, 3)$ *и* $q_i(x) = q(x)$, *то для краевой задачи* (2)–(4) *тождество* (8) *невозможно, а тождество* (9) *возможно для бесконечного числа задач* (2)–(4). *В частности, при* $A_{124} = 1 \neq 0$ *множество вырожденных краевых условий на звездообразном графе состоит не из двух задач, как в случае задачи Штурма—Лиувилля, заданной на отрезке, а из 18 классов, каждый из которых содержит от двух до четырёх произвольных констант.*

Источники финансирования. Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан (проекты 18–51–06002-Аз_а, 18–01–00250-а, 17–41–020230-р_а), а также Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (проект 1-го Азербайджанско-Российского международного конкурса грантов (EIF-BGM-4-RFTF-1/2017)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 332 с.
2. *Ширяев Е.А.*, *Шкаликов А.А.* // Мат. заметки. 2007. Т. 81. № 4. С. 636–640.
3. *Sadovnichii V.A.*, *Sultanaev Ya.T.*, *Akhtyamov A.M.* // Azerbaijan J. Math. 2015. V. 5. № 2. P. 96–108.
4. *Stone M.H.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1927. V. 29. № 1. P. 23–53.
5. *Садовничий В.А.*, *Кангужин Б.Е.* // ДАН. 1982. Т. 267. № 2. С. 310–313.
6. *Locker J.* Eigenvalues and Completeness for Regular and Simply Irregular Two-Point Differential Operators. Providence: Amer. Math. Soc. 2008. 177 p. // Mem. Amer. Math. 2008. Soc. V. 195. № 911.
7. *Makin A.* // Electronic J. Different. Equat. 2018. № 95. P. 1–7.
8. *Ахтямов А.М.* // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 5. С. 643–646.
9. *Джумабаев С.А.*, *Кангужин Б.Е.* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1988. № 1. С. 14–18.
10. *Макин А.С.* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1408–1411.
11. *Маламуд М.М.* // Функцион. анализ. 2008. Т. 42. № 3. С. 45–52.
12. *Ахтямов А.М.* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1121–1123.
13. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
14. *Akhtyamov A.*, *Amram M.*, *Mouftakhov A.* // Int. J. Math. Education in Sci. and Technol. 2018. V. 49. № 2. P. 268–321.

DEGENERATE BOUNDARY CONDITIONS ON A GEOMETRIC GRAPH

Academician of the RAS V. A. Sadovnichy[1], Ya. T. Sultanaev[2,3], A. M. Akhtyamov[2,4]

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
[2] Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation
[3] Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russian Federation
[4] Bashkiria State University, Ufa, Russian Federation

Received October 19, 2018

The boundary conditions of the Sturm—Liouville problem defined on a star-shaped geometric graph of three edges are studied. It is shown that if the lengths of the edges are different, then the Sturm—Liouville problem does not have degenerate boundary conditions. If the lengths of the edges and the potentials are the same, then the characteristic determinant of the Sturm—Liouville problem can not be equal to a constant different from zero. But the set of Sturm—Liouville problems for which the characteristic determinant is identically equal to zero is an infinite (continuum). In this way, in contrast to the Sturm—Liouville problem defined on an interval, the set of boundary-value problems on a star-shaped graph whose spectrum completely fills the entire plane is much richer. In the particular case when the minor A_{124} for matrix of coefficients is nonzero, it does not consist of two problems, as in the case of the Sturm—Liouville problem given on an interval, but of 18 classes, each containing two to four arbitrary constants.

Keywords: degenerate boundary conditions, Sturm—Liouville problem, geometric star-shaped graph.