

УДК 517.984.5

ВЫРОЖДЕННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Академик РАН В. А. Садовничий^{1,*}, Я. Т. Султанаев^{2,3,**}, А. М. Ахтямов^{2,4}

Поступило 19.10.2018 г.

Изучаются краевые условия задачи Штурма—Лиувилля, заданной на звездообразном геометрическом графе из трёх рёбер. Показано, что в случае если длины рёбер различны, то задача Штурма—Лиувилля не имеет вырожденных краевых условий. Если же длины рёбер и потенциалы одинаковы, то характеристический определитель задачи Штурма—Лиувилля не может быть равен константе, отличной от нуля. А вот множество задач Штурма—Лиувилля, для которых характеристический определитель тождественно равен нулю, является бесконечным (континуумом). Таким образом, в отличие от задачи Штурма—Лиувилля, заданной на отрезке, множество краевых задач на звездообразном графе, спектр которых полностью заполняет всю плоскость, гораздо богаче. В частном случае, когда минор A_{124} матрицы коэффициентов отличен от нуля, оно состоит не из двух задач, как в случае задачи Штурма—Лиувилля, заданной на отрезке, а из 18 классов, каждый из которых содержит от двух до четырёх произвольных констант.

Ключевые слова: вырожденные краевые условия, задача Штурма—Лиувилля, геометрический звездообразный граф.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524853272-275>

Вырожденными краевыми условиями спектральной задачи называют такие краевые условия, для которых характеристический определитель тождественно равен константе [1, с. 35]. Прямые и обратные задачи с невырожденными краевыми условиями достаточно хорошо изучены (см., например, [2, 3]). Вырожденные краевые условия исследованы меньше. Хорошо известен, пожалуй, лишь пример М.Х. Стоуна дифференциального оператора второго порядка, для которого спектр заполняет всю комплексную плоскость [4]. В 1927 г. Стоуном было показано, что если потенциальная функция $q(x)$ является симметрической (т.е. $q(x) = q(\pi - x)$) и $a = 1$, то любое комплексное число является точкой спектра краевой задачи

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad y(0) \pm ay(\pi) = 0, \\ y'(0) \mp ay'(\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, спектр этой краевой задачи полностью заполняет всю плоскость.

Первые результаты для дифференциальных операторов произвольного чётного порядка n были получены в 1982 г. в работе В.А. Садовниченко и Б.Е. Кан-

гужина [5] (см. также работу Джона Локкера [6]). В [5] было показано, что для любого чётного порядка существуют дифференциальные операторы, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Эти краевые условия имели вид

$$\begin{aligned} U_j(y) &= y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1} y^{(j-1)}(1) = 0, \\ j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

В статье А.С. Макина [7], вышедшей в 2018 г., показано, что для дифференциальных уравнений чётного порядка n при $d \neq \pm 1$ краевые условия

$$\begin{aligned} U_j(y) &= y^{(j-1)}(0) + d \cdot (-1)^{j-1} y^{(j-1)}(1) = 0, \\ j &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

также являются вырожденными, но в этом случае соответствующая краевая задача не имеет спектра ($\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const} \neq 0$).

В [8] показано, что вырожденные краевые условия существуют и для краевых задач с дифференциальным уравнением любого нечётного порядка. Некоторые вопросы, связанные с вырожденными краевыми условиями, рассмотрены также в работах [9–11].

В [12] описаны все вырожденные краевые условия для задачи Штурма—Лиувилля. Точнее, показано следующее: если $q(x) \neq q(\pi - x)$ на некотором интервале из отрезка $[0, \pi]$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможен, и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши $y(0) = y'(0) = 0$ и $y(\pi) = y'(\pi) = 0$. Если $q(x) = q(\pi - x)$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ реализуется тогда

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

² Институт механики Уфимского научного центра Российской Академии наук

³ Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

⁴ Башкирский государственный университет, Уфа

*E-mail: rector@msu.ru

**E-mail: akhtyamovam@mail.ru

и только тогда, когда краевые условия (1) при $n = 2$ являются ложнопериодическими краевыми условиями (1) с $a = 1$, а случай $\Delta(\lambda) \equiv C \neq 0$ — тогда и только тогда, когда краевые условия (1) при $n = 2$ являются обобщёнными условиями Коши (1) с $a \neq 1$.

В настоящей работе показано, что если рассматривать задачу Штурма—Лиувилля не на отрезке, а на звездообразном графе с рёбрами одинаковой длины, то множество краевых задач, спектр которых заполняет всю плоскость, не ограничивается двумя примерами. Это множество на звездообразном графе гораздо богаче. Оно является бесконечным (континуумом). Только для одного из частных случаев множество краевых задач, спектр которых заполняет всю плоскость, состоит из 18 классов, каждый из которых содержит от двух до четырёх произвольных констант.

Обозначим через L следующую задачу Штурма—Лиувилля на звездообразном геометрическом графе из трёх рёбер с общей точкой в нуле:

$$ly = -y'' + q_i(x)y_i = \lambda y_i = s^2 y_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0, \quad (3)$$

$$a_{1l}y_1(l_1) + a_{2l}y_2(l_2) + a_{3l}y_3(l_3) + a_{4l}y_1'(l_1) + a_{5l}y_2'(l_2) + a_{6l}y_3'(l_3) = 0, \quad (4)$$

где вещественная функция $q_i(x) \in L_1(0, \pi)$, a_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 6$) — комплексные постоянные.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} краевых условий (4) через A ; её миноры, составленные из l -го, m -го и n -го столбцов, — через A_{klm} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$A_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{1l} & a_{1m} & a_{1n} \\ a_{2l} & a_{2m} & a_{2n} \\ a_{3l} & a_{3m} & a_{3n} \end{vmatrix}.$$

На протяжении всей работы будем считать, что выполняется условие

$$\text{rank } A = 3. \quad (6)$$

Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты a_{ij} вырожденных краевых условий (4).

Характеристическим определителем задачи L является функция

$$\Delta(\lambda) = \sum_{l < m < n} A_{lmn} Z_{lmn}, \quad (7)$$

где Z_{lmn} — это некоторые функции от λ , связанные с линейно независимыми решениями уравнения (2).

Если l_i ($i = 1, 2, 3$) различны, то из асимптотических соотношений для линейно независимых решений уравнения (2) [13, с. 62–65] следует линейная независимость функций $Z_{124} = Z_{236}$, $Z_{125} = -Z_{136}$, $Z_{134} = -Z_{235}$, $Z_{145} = Z_{356}$, $Z_{146} = -Z_{256}$, $Z_{245} = -Z_{346}$, Z_{126} , Z_{135} , Z_{234} , Z_{126} , Z_{135} , Z_{234} , Z_{156} , Z_{246} , Z_{345} .

Из этих же асимптотических соотношений следует, что тождество

$$\Delta(\lambda) \equiv \sum_{l < m < n} A_{lmn} Z_{lmn} \equiv C \neq 0 \quad (8)$$

невозможно, а тождество

$$\Delta(\lambda) \equiv \sum_{l < m < n} A_{lmn} Z_{lmn} \equiv 0 \quad (9)$$

возможно только тогда, когда

$$\begin{aligned} A_{124} + A_{236} &= A_{125} - A_{136} = A_{134} - A_{235} = 0, \\ A_{123} &= 0, \quad A_{456} = 0, \\ A_{145} + A_{356} &= A_{146} - A_{256} = A_{245} - A_{346} = 0, \\ A_{126} &= A_{135} = A_{234} = A_{126} = A_{135} = A_{234} = \\ &= A_{156} = A_{246} = A_{345} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Известно, что числа $A_{i_1 i_2 i_3}$ являются минорами матрицы A тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера [14], где даются обобщения правила Крамера на случай матриц $m \times n$. Для матрицы A размера 3×6 эти соотношения таковы:

$$\begin{aligned} A_{i_1 i_4 i_5} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} + A_{i_1 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} &= 0, \\ A_{i_1 i_4 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_1 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} &= 0, \\ A_{i_1 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_1 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} &= 0, \\ A_{i_2 i_4 i_5} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} + A_{i_2 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} &= 0, \\ A_{i_2 i_4 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} &= 0, \\ A_{i_2 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} &= 0, \\ A_{i_3 i_4 i_5} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_3 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} + A_{i_3 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} &= 0, \\ A_{i_3 i_4 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_3 i_4 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_3 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_4} &= 0, \\ A_{i_3 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_3 i_5 i_3} A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_3 i_6 i_3} A_{i_1 i_2 i_5} &= 0, \\ A_{i_4 i_5 i_6} A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_4 i_2 i_4} A_{i_3 i_5 i_6} + A_{i_4 i_2 i_5} A_{i_3 i_4 i_6} - A_{i_4 i_2 i_6} A_{i_3 i_4 i_5} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ — такая перестановка, что $A_{i_1 i_2 i_3} \neq 0$.

Предположим, что $A_{124} = 1 \neq 0$, тогда из пятого равенства (11) и (10) следует, что $A_{236} A_{124} = 0$, $A_{124} + A_{236} = 0$. Отсюда $A_{124} = 0$. Получили противоречие.

Аналогично предположив, что какое-нибудь из $A_{ijk} \neq 0$, из равенств (10) и (11) получим, что $A_{ijk} = 0$. Отсюда следует, что в случае когда l_i различны, все миноры третьего порядка матрицы A обращаются в нуль, что противоречит условию (6). Следова-

тельно, тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможно и справедлива следующая

Теорема 1. Если l_i ($i = 1, 2, 3$) различны, то краевая задача (2)–(4) не имеет вырожденных краевых условий.

Если $l_i = l$ и $q_i(x) = q(x)$ ($i = 1, 2, 3$), то линейно независимыми будут функции $Z_{126} = -Z_{135} = Z_{234}$, $Z_{156} = Z_{246} = Z_{345}$, $Z_{124} = Z_{356} = Z_{256} = Z_{245} = -Z_{146} = -Z_{346}$, $Z_{145} = Z_{356} = Z_{256} = Z_{245} = -Z_{146} = -Z_{346}$. Отсюда следует, что тождество (8) невозможно, а тождество (9) возможно только тогда, когда выполняются равенства (11) и

$$\begin{aligned} A_{124} + A_{236} + A_{125} + A_{235} - A_{136} - A_{134} &= 0, \\ A_{123} &= 0, \quad A_{126} - A_{135} + A_{234} = 0, \\ A_{145} + A_{356} + A_{256} + A_{245} - A_{146} - A_{346} &= 0, \\ A_{456} &= 0, \quad A_{156} - A_{246} + A_{345} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) образуют систему уравнений на миноры матрицы A , для которых выполняется тождество (9). Уравнения (11) зависят от того, какой из миноров A_{ijk} отличен от нуля.

Если $A_{124} = 1 \neq 0$, то получим 18 решений системы уравнений (11), (12), одним из которых является следующее:

$$\begin{aligned} A_{125} &= -C_1, \quad A_{126} = 1, \quad A_{134} = 0, \quad A_{135} = 0, \\ A_{136} &= 0, \quad A_{145} = C_3, \quad A_{146} = 0, \quad A_{156} = -C_3, \\ A_{234} &= -1, \quad A_{235} = C_1, \quad A_{236} = -1, \quad A_{245} = C_2, \\ A_{246} &= 0, \quad A_{256} = -C_2, \quad A_{345} = C_3, \quad A_{346} = 0, \\ A_{356} &= -C_3. \end{aligned}$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — произвольные константы.

По найденным минорам можно найти матрицу коэффициентов краевых условий и сами краевые условия (см. [14]).

Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ — произвольная строчка искомой матрицы A , то она должна удовлетворять условию (6):

$$\text{rank} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix} = 3.$$

Поскольку $A_{124} \neq 0$, то окаймляющие его миноры четвёртого порядка должны быть равны нулю. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} &= \\ = -x_1 \cdot A_{234} + x_2 \cdot A_{134} - x_3 \cdot A_{124} + x_4 \cdot A_{123} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} &= \\ = -x_1 \cdot A_{245} + x_2 \cdot A_{145} - x_4 \cdot A_{125} + x_5 \cdot A_{124} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{36} \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_6 \end{vmatrix} &= \\ = -x_1 \cdot A_{246} + x_2 \cdot A_{146} - x_4 \cdot A_{126} + x_6 \cdot A_{124} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку $A_{124} \neq 0$, то можно считать, что $A_{124} = 1$. Кроме того, $A_{123} = 0$. Подставив эти значения миноров и решение 2 в уравнения (13)–(15), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0, \\ -x_1 C_2 + x_2 \cdot C_3 + x_4 \cdot C_1 + x_5 &= 0, \\ -x_4 + x_6 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая равенства (16) и то, что $A_{124} = 1$, в качестве линейно независимых строк можно выбрать строки с элементами

$$\begin{aligned} x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_5 = C_2, \quad x_6 = 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_5 = -C_3, \quad x_6 = 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_5 = -C_1, \quad x_6 = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, искомые вырожденные краевые условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} y_1(l) + y_3(l) + C_2 y_2'(l) &= 0, \\ y_2(l) - C_3 y_2'(l) &= 0, \\ y_1'(l) - C_1 y_2'(l) + y_3'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаются остальные 17 классов решений.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Если $l_i = l$ ($i = 1, 2, 3$) и $q_i(x) = q(x)$, то для краевой задачи (2)–(4) тождество (8) невозможно, а тождество (9) возможно для бесконечного числа задач (2)–(4). В частности, при $A_{124} = 1 \neq 0$ множество вырожденных краевых условий на звездобразном графе состоит не из двух задач, как в случае задачи Штурма—Лиувилля, заданной на отрезке, а из 18 классов, каждый из которых содержит от двух до четырёх произвольных констант.

Источники финансирования. Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан (проекты 18–51–06002-Аз_а, 18–01–00250-а, 17–41–020230-р_а), а также Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (проект 1-го Азербайджанско-Российского международного конкурса грантов (EIF-BGM-4-RFTF-1/2017)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 332 с.
2. Ширяев Е.А., Шкалик А.А. // Мат. заметки. 2007. Т. 81. № 4. С. 636–640.
3. Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. // Azerbaijan J. Math. 2015. V. 5. № 2. P. 96–108.
4. Stone M.H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1927. V. 29. № 1. P. 23–53.
5. Садовнический В.А., Кангуужин Б.Е. // ДАН. 1982. Т. 267. № 2. С. 310–313.
6. Locker J. Eigenvalues and Completeness for Regular and Simply Irregular Two-Point Differential Operators. Providence: Amer. Math. Soc. 2008. 177 p. // Mem. Amer. Math. Soc. V. 195. № 911.
7. Makin A. // Electronic J. Different. Equat. 2018. № 95. P. 1–7.
8. Ахтямов А.М. // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 5. С. 643–646.
9. Джумабаев С.А., Кангуужин Б.Е. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1988. № 1. С. 14–18.
10. Макин А.С. // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1408–1411.
11. Маламуд М.М. // Функцион. анализ. 2008. Т. 42. № 3. С. 45–52.
12. Ахтямов А.М. // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1121–1123.
13. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
14. Akhtyamov A., Amrat M., Mouftakhov A. // Int. J. Math. Education in Sci. and Technol. 2018. V. 49. № 2. P. 268–321.

DEGENERATE BOUNDARY CONDITIONS ON A GEOMETRIC GRAPH

Academician of the RAS V. A. Sadovnichy¹, Ya. T. Sultanaev^{2,3}, A. M. Akhtyamov^{2,4}¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation² Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation³ Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russian Federation⁴ Bashkiria State University, Ufa, Russian Federation

Received October 19, 2018

The boundary conditions of the Sturm—Liouville problem defined on a star-shaped geometric graph of three edges are studied. It is shown that if the lengths of the edges are different, then the Sturm—Liouville problem does not have degenerate boundary conditions. If the lengths of the edges and the potentials are the same, then the characteristic determinant of the Sturm—Liouville problem can not be equal to a constant different from zero. But the set of Sturm—Liouville problems for which the characteristic determinant is identically equal to zero is an infinite (continuum). In this way, in contrast to the Sturm—Liouville problem defined on an interval, the set of boundary-value problems on a star-shaped graph whose spectrum completely fills the entire plane is much richer. In the particular case when the minor A_{124} for matrix of coefficients is nonzero, it does not consist of two problems, as in the case of the Sturm—Liouville problem given on an interval, but of 18 classes, each containing two to four arbitrary constants.

Keywords: degenerate boundary conditions, Sturm—Liouville problem, geometric star-shaped graph.