ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 3, с. 276–280

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 531.19+523

УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА—ПУАССОНА—ПУАССОНА, КРИТИЧЕСКАЯ МАССА И ОБЛАКА КОРДЫЛЕВСКОГО

В. В. Веденяпин[1,2,*], Т. В. Сальникова[3,], С. Я. Степанов[4,***]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 19.11.2018 г.

Поступило 30.11.2018 г.

Предлагается вывод уравнения Власова—Пуассона—Пуассона для изучения стационарных решений системы гравитирующих заряженных частиц в окрестности треугольных точек либрации (облака Кордылевского). Стационарные решения ищутся в виде функций от интегралов, что приводит к эллиптическим нелинейным уравнениям для потенциалов гравитационного и электростатического полей. Это даёт критическую массу: для тел с большими массами доминирует гравитация, с меньшими — электростатика.

Ключевые слова: гравитирующие заряженные частицы, граничная задача, облака Кордылевского.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524853276-280

1. УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА—ПУАССОНА—ПУАССОНА

Динамика электрически заряженных космических пылевых облаков [1] изучается с использованием уравнения Власова для плотности распределения частиц [2] в форме уравнения Власова—Пуассона—Пуассона [3]. Движение частиц рассматривается в неинерциальной системе координат в ограниченной плоской круговой постановке задачи четырёх тел [4–6]. Начало O системы координат находится в центре масс системы Земля—Луна, ось Ox направлена от Земли к Луне, ось Oy перпендикулярна Ox и лежит в плоскости круговых относительно центра масс орбит Земли и Луны. Ось Oz дополняет систему координат до правой тройки. Система координат вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega \mathbf{e}_z$. В качестве единиц массы и длины выберем (как обычно) суммарную массу Земли и Луны и расстояние между ними. Пусть μ — масса Луны (M), $(1-\mu)$ — масса Земли (E). Координаты точек $E(-\mu, 0, 0)$, $M((1-\mu), 0, 0)$. В ограниченной круговой задаче трёх тел треугольные точки либрации имеют координаты $L_4\left(\frac{1}{2}-\mu;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$; $L_5\left(\frac{1}{2}-\mu;\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$. В этих точках под действием сил притяжения к Земле и Луне и сил инерции гравитирующая точка бесконечно малой массы находится в устойчивом относительном равновесии во вращающейся системе координат, если выполнено условие $\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}$, что имеет место для системы Земля—Луна. Мы будем изучать движение в окрестности точки либрации точечных масс m_α с координатами $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, обладающих зарядами e_α. Эти частицы индуцируют самосогласованные гравитационное и электрическое поля. На каждую частицу действуют силы притяжения к Земле и к Луне, а также силы инерции от переносного и кориолисого ускорений. Внешний гравитационный потенциал точки с индексом α

$$V_\alpha = -\frac{\gamma(1-\mu)m_\alpha}{R_{1\alpha}} - \frac{\gamma\mu m_\alpha}{R_{2\alpha}},$$

где

$$R_{1\alpha} = \sqrt{(x_\alpha+\mu)^2 + y_\alpha{}^2 + z_\alpha{}^2},$$
$$R_{2\alpha} = \sqrt{(x_\alpha+1-\mu)^2 + y_\alpha{}^2 + z_\alpha{}^2}$$

суть расстояния от точки до Земли и Луны, γ — гравитационная постоянная. Электростатический потенциал точки с индексом α обозначим φ_α, а гравитационный потенциал обозначим u_α.

[1] *Федеральный исследовательский центр прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва*

[2] *Российский университет дружбы народов, Москва*

[3] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[4] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской Академии наук, Москва*

**E-mail*: vicveden@yahoo.com

***E-mail*: tatiana.salnikova@gmail.com

****E-mail*: stepsj@ya.ru

Рассмотрим функцию Лагранжа частиц

$$L = \sum_{i=1}^{N} (T_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha(t), \mathbf{r}_\alpha(t)) - V_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(t)) - \\ - m_\alpha u_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(t)) - e_\alpha \varphi_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(t))),$$

где кинетическая энергия точки с массой m_α

$$T_\alpha = \frac{m_\alpha}{2}(\dot{x}_\alpha{}^2 + \dot{y}_\alpha{}^2 + \dot{z}_\alpha{}^2) + m_\alpha \omega (x_\alpha \dot{y}_\alpha - y_\alpha \dot{x}_\alpha) + \\ + \frac{m_\alpha}{2}\omega^2 (x_\alpha{}^2 + x_\alpha{}^2).$$

Для вывода уравнений Власова—Пуассона—Пуассона самогравитирующих заряженных частиц к действию частиц добавляют поля и варьируют специальным способом: сначала по частицам, получая уравнения движения частиц в заданных полях и переходя к уравнению Лиувилля, потом по полям, переписывая действие частиц через функцию распределения [3, 7–9]. Рассмотрим действие

$$S = \sum_{\alpha=1}^{N} \int T_\alpha dt - \sum_{\alpha=1}^{N} \int V_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(t)) dt - \\ - \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \int u_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(t)) dt - \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \int \varphi_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(t)) dt - \\ - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla_r u)^2 d\mathbf{r} dt + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int (\nabla_r \varphi)^2 d\mathbf{r} dt.$$

Здесь ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Переходя к каноническим импульсам $\mathbf{p}_\alpha = \dfrac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$, $\mathbf{p}_\alpha = (p_{x_\alpha}, p_{y_\alpha}, p_{z_\alpha})$, запишем функцию Гамильтона

$$H = \sum_\alpha \left(\frac{1}{2m_\alpha} \mathbf{p}_\alpha^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) + V_\alpha + m_\alpha u_\alpha + e_\alpha \varphi_\alpha \right).$$

Перепишем функцию действия, переходя к функции распределения $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — плотности распределения частиц массы m_α, заряда e_α в фазовом пространстве $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$:

$$S = \sum_{\alpha=1}^{N} \int \left(\frac{1}{2m_\alpha} \mathbf{p}^2 + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}) \right) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} dt - \\ - \sum_{\alpha=1}^{N} \int ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \mathbf{r}) + V_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} dt - \\ - \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \int u(\mathbf{r}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} dt - \\ - \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \int \varphi(\mathbf{r}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} dt - \\ - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla_r u)^2 d\mathbf{r} dt + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int (\nabla_r \varphi)^2 d\mathbf{r} dt.$$

Варьируя это по u и φ, получим систему уравнений Власова—Пуассона—Пуассона в неинерциальной системе координат для плазмы с гравитацией во внешнем гравитационном поле:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{p}}{m_\alpha} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \right), \nabla_r f_\alpha) + \\ + ((\mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega} - m_\alpha \nabla_r V_\alpha - m_\alpha \nabla_r u - e_\alpha \nabla_r \varphi), \nabla_p f_\alpha) = 0,$$

$$\Delta u = 4\pi\gamma \sum_\alpha m_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p},$$

$$\Delta \varphi = -4\pi\varepsilon_0 \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}.$$

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Стационарные решения уравнения Власова ищутся в виде функции от интегралов движения. Пусть функции распределения есть функции от обобщённой энергии и имеют вид

$$f_\alpha = g_\alpha \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}) + V_\alpha + m_\alpha u + e_\alpha \varphi \right),$$

где g_α — произвольные неотрицательные функции. В этом случае первое уравнение системы Власова—Пуассона—Пуассона удовлетворяется. В итоге получаем систему нелинейных эллиптических уравнений на потенциалы u и φ:

$$\Delta u = U(u, \varphi),$$
$$U(u, \varphi) = 4\pi\gamma \sum_\alpha m_\alpha \int g_\alpha d\mathbf{p};$$
$$\Delta \varphi = \Phi(u, \varphi),$$
$$\Phi(u, \varphi) = -4\pi\varepsilon_0 \sum_\alpha e_\alpha \int g_\alpha d\mathbf{p}.$$

Корректность граничной задачи Дирихле или Неймана для нелинейного эллиптического уравнения $\Delta w = \psi(w)$, где $\psi(w)$ — действительная функция от w, зависит от знака производной $\dfrac{d\psi}{dw}$. При неотрицательной производной эта задача корректна. В противном случае существуют глобальные решения. Для определения знака производной $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ проведём вычисления аналогично [3, 10, 11], предварительно произведём каноническую замену переменных к новым импульсам $\mathbf{b} = \mathbf{p} + m_\alpha(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$. Тогда производная

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 8\pi\varepsilon_0 S_3 \sum_\alpha e_\alpha^2 m_\alpha \times \\ \times \int_0^\infty g_\alpha \left(\frac{\mathbf{b}^2}{2m_\alpha} - \frac{m_\alpha}{2} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})^2 + V_\alpha + m_\alpha u + e_\alpha \varphi \right) d\mathbf{b} > 0,$$

где S_3 — это площадь двумерной сферы. Аналогичное вычисление производной $\frac{\partial U}{\partial u}$ даёт противоположный знак. Поэтому граничная задача некорректна.

Рассмотрим простейший случай $N = 1$. Тогда $m_\alpha = m_1 = m$, $e_\alpha = e_1 = e$. Уравнения Пуассона принимают вид

$$\Delta u = 4\pi\gamma m \int g\left(\frac{\mathbf{b}^2}{2m} - \frac{m}{2}(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})^2 + V + mu + e\varphi\right)d\mathbf{b},$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon_0 e \int g\left(\frac{\mathbf{b}^2}{2m} - \frac{m}{2}(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})^2 + V + mu + e\varphi\right)d\mathbf{b}.$$

Перепишем их в следующем виде:

$$\Delta(\varepsilon_0 eu + \gamma m\varphi) = 0,$$

$$\Delta(mu + e\varphi) = (\gamma m^2 - \varepsilon_0 e^2)\int g d\mathbf{b}.$$

Проводя аналогичное исследование, получим, что условия разрешимости последнего уравнения зависят от знака величины $(\gamma m^2 - \varepsilon_0 e^2)$. Граничная задача корректна, если $m^2\gamma < \varepsilon_0 e^2$ [12]. Это случай, когда силы тяготения меньше электростатических сил отталкивания, т.е. если масса меньше критической массы

$$m_{\mathrm{crit}} = \sqrt{\frac{e^2\varepsilon_0}{\gamma}}.$$

Нас интересует более общая ситуация, когда $N > 1$. Если массы частиц достаточно малы, скажем,

$$m_\alpha \ll \sqrt{\frac{e_\alpha^2\varepsilon_0}{\gamma}},$$

тогда гравитационным полем u можно пренебречь и рассматривать задачу о существовании стационарных решений в неинерциальной системе координат для заряженных частиц под действием внешнего гравитационного и самосогласованного электростатического поля. Для этого случая мы показали корректность граничной задачи. Итак, оказалось, что критическая масса имеет смысл фазового перехода. Для тел, скажем, в десять раз больших этой массы можно пренебрегать электростатикой. Для тел в десять раз меньших этой массы можно пренебрегать гравитацией. И только в диапазоне промежуточных масс необходимо рассматривать обе силы совместно.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для $N = 2$ исследуем поведение совокупности заряженных частиц с нормальным распределением по координатам и по скоростям в начальный момент. В первом случае рассматриваются частицы одинаковой массы и противоположных зарядов: $m_1 = m_2$, $e_1 = -e_2$ (рис. 1). Во втором случае масса положительно заряженных частиц в 1000 раз больше массы отрицательно заряженных частиц: $m_1 = 1000m_2$,

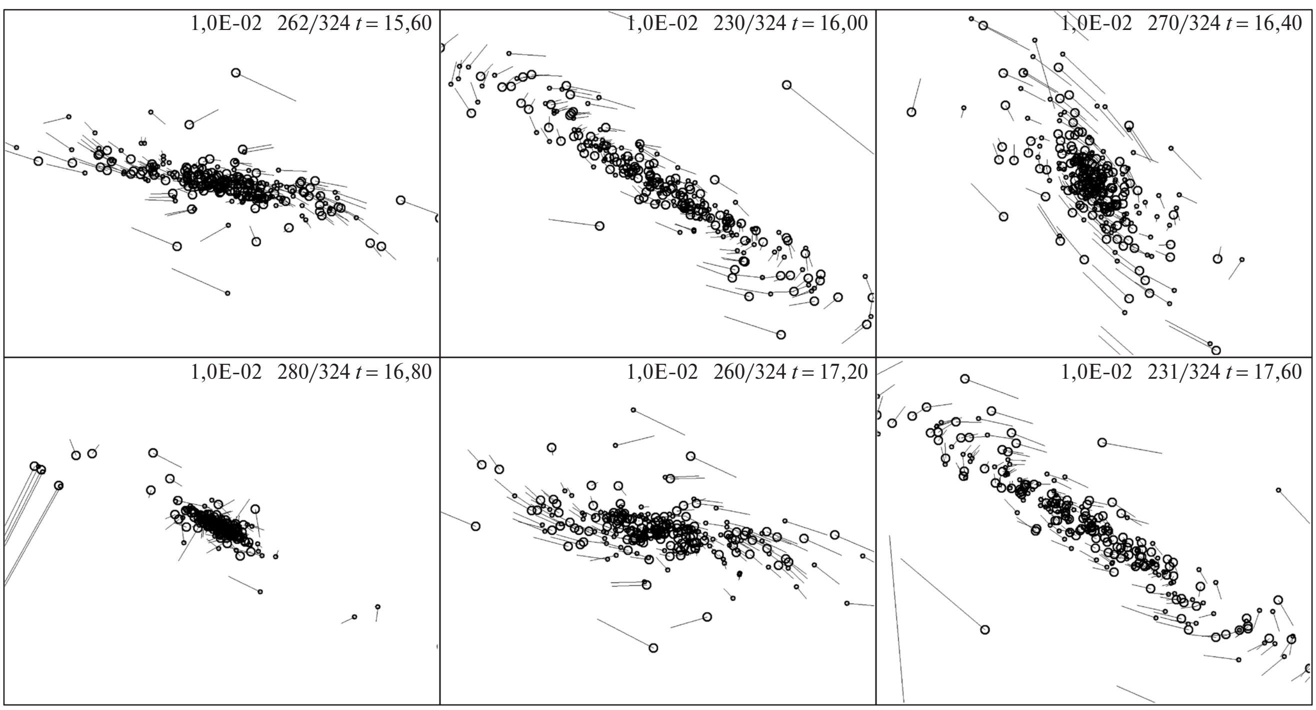

Рис. 1.

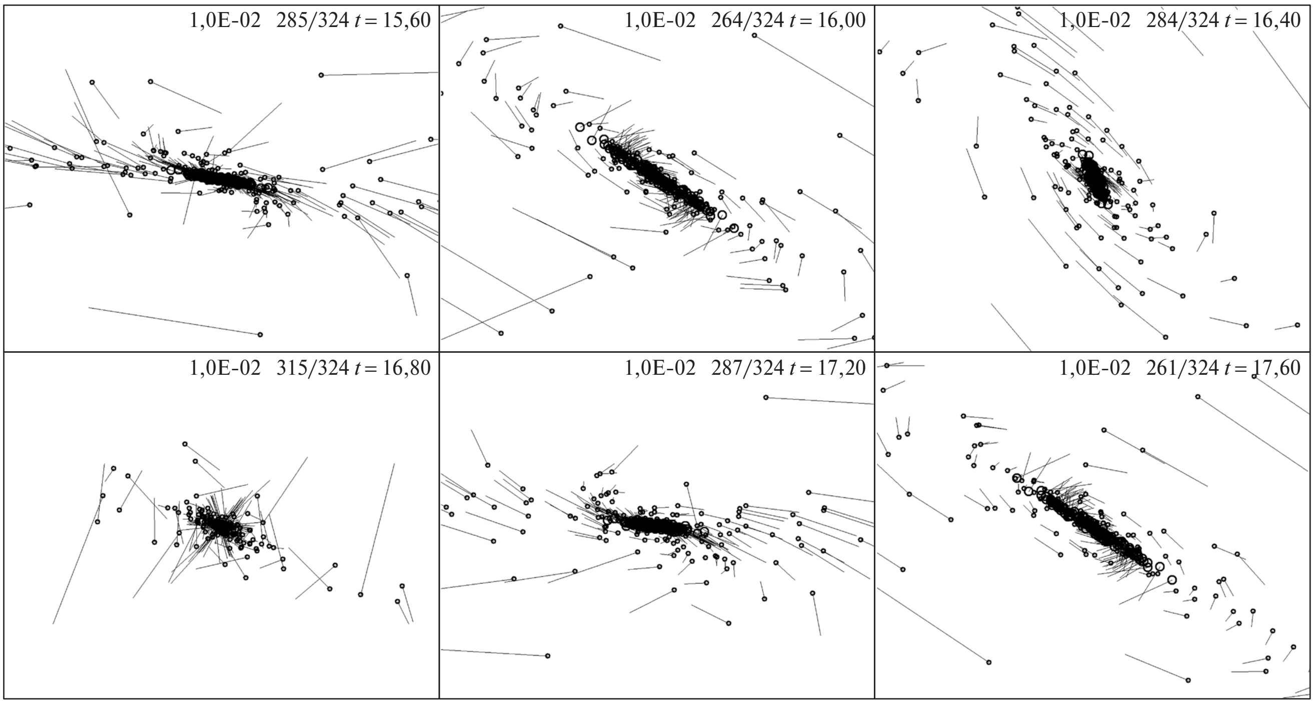

Рис. 2.

$e_1 = +e$, $e_2 = -e$ (рис. 2). В обоих случаях образуется периодически изменяющееся множество заряженных частиц в ограниченной окрестности точки либрации. При этом во втором примере более тяжёлые положительно заряженные частицы скапливаются в малой окрестности точки либрации, а более лёгкие — отрицательно заряженные — разлетаются достаточно далеко. Это исследование дополняет объяснение проблемы существования облаков Кордылевского.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности РУДН 5–100 среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kordylewski K.* Photographische Untersuchungen des Librationspunktes im System Erde-Mond // Acta Astron. 1961. V. 11. P. 165–169.
2. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
3. *Веденяпин В.В.*, *Негматов М.А.*, *Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. Сер. мат. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
4. *Сальникова Т.В.*, *Степанов С.Я.* Математическая модель образования космических пылевых облаков Кордылевского // ДАН. 2015. Т. 463. № 2. С. 164–167.
5. *Сальникова Т.В.*, *Степанов С.Я.*, *Шувалова А.И.* Вероятностная модель облаков Кордылевского // ДАН. 2016. Т. 468. № 3. С. 276–279.
6. *Salnikova T.*, *Stepanov S.*, *Shuvalova A.* Probabilistic Model of the Kordylewski Dust Clouds Formation // Acta Astron. 2018. V. 150. P. 85–91.
7. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
8. *Козлов В.В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. 2008. Т. 63. № 4 (382). С. 93–130.
9. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
10. *Веденяпин В.В.* Краевая задача для стационарных уравнений Власова // ДАН. 1986. Т. 290. № 4. С. 777–780.
11. *Веденяпин В.В.* О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача // ДАН. 1992. Т. 323. № 6. С. 1004–1006.
12. *Веденяпин В.В.*, *Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.

VLASOV—POISSON—POISSON EQUATIONS, CRITICAL MASS AND KORDYLEWSKI CLOUDS

V. V. Vedenyapin[1,2], T. V. Salnikova[3], S. Ya. Stepanov[4]

[1] Institute for Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
[2] Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation
[3] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
[4] Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov November 19, 2018

Received November 30, 2018

A derivation of the Vlasov—Poisson—Poisson equation is proposed for studying stationary solutions of a system of gravitating charged particles in vicinity of triangular libration points (Kordylevsky cloud). Stationary solutions are sought as functions of integrals, which leads to elliptic nonlinear equations for the potentials of the gravitational and electrostatic fields. This gives a critical mass: for bodies with large masses dominates gravitation forces, and for bodies with smaller masses — electrostatic forces.

Keywords: gravitating charged particles, boundary problem, Kordylevsky clouds.