

УДК 531.384

## РАЗГОН ВОЛЧКА ЧАПЛЫГИНА ПРИ ПОМОЩИ РОТОРОВ

А. В. Борисов<sup>1,2</sup>, А. А. Килин<sup>1,3</sup>, Е. Н. Пивоварова<sup>2,3,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 20.09.2018 г.

Поступило 27.09.2018 г.

Рассматривается управление движением динамически несимметричного неуравновешенного шара (волчка Чаплыгина) при помощи двух перпендикулярных роторов. Предложен механизм управления при помощи периодического изменения гиросtatического момента системы, приводящий к неограниченному разгону. Сформулирована общая гипотеза о механизме разгона тел сферической формы по плоскости за счёт периодического изменения параметров системы.

*Ключевые слова:* неголономная связь, разгон, волчок Чаплыгина, периодическое возмущение.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524853285-289>

Ускорение в неголономных системах, которое достигается с помощью изменения различных массо-динамических параметров, играет важную роль не только с точки зрения фундаментальных исследований, но и в различных приложениях. В частности, его изучение является одной из задач управления различными роботами. Недавно был получен ряд новых результатов в связи с ускорением саней Чаплыгина (являющихся простейшим примером колёсного робота), которое достигается с помощью изменения положения центра масс или гиросtatического момента [1–3].

Задача об ускорении шара (сфероробота) является существенно более сложной и до сих пор не была решена. Она имеет бóльшую размерность и больше возможностей изменения различных параметров. В данной работе мы начинаем исследование этой задачи. Нами предложен механизм ускорения шара с помощью изменения его гиросtatического момента, а также высказана гипотеза насчёт общего механизма ускорения шаров. Кроме того, сформулированы дальнейшие более сложные задачи об описании этого механизма ускорения и его теоретического исследования. К сожалению, эти вопросы до сих пор не решены, поскольку результаты работы имеют в основном численный характер.

<sup>1</sup> Удмуртский государственный университет, Ижевск

<sup>2</sup> Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис, Республика Татарстан

<sup>3</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.

\*E-mail: [archive@rcd.ru](mailto:archive@rcd.ru)

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим качение динамически несимметричного неуравновешенного шара по горизонтальной плоскости в рамках модели резинового тела [4–7] (рис. 1), т.е. будем полагать, что отсутствует проскальзывание в точке контакта, а вертикальная составляющая угловой скорости равна нулю. Обозначим  $R$  и  $m$  радиус и массу шара,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  — вектор смещения центра масс шара относительно геометрического центра,  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — центральный тензор инерции шара. Будем полагать, что внутри шара установлены некопланарные роторы, создающие переменный гиросtatический момент  $\mathbf{K}(t)$ , но не влияющие на распределение масс в системе.

Для описания динамики волчка введём две системы координат: неподвижная система  $OXYZ$  с ортами  $\alpha, \beta, \gamma$ ; подвижная система  $Cxyz$  с ортами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ,

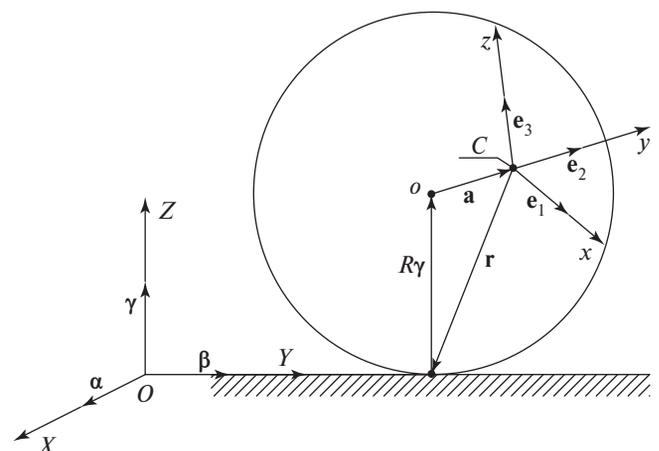


Рис. 1. Схематическая модель волчка Чаплыгина на плоскости.

жёстко связанная с телом, начало координат которой совпадает с центром масс тела. В дальнейшем полагаем, что все векторы записаны в проекциях на оси подвижной системы координат  $S_{\text{хуз}}$ .

Условия отсутствия проскальзывания в точке контакта и верчения вокруг вертикали описываются соответственно следующими уравнениями связей:

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — скорость центра масс и угловая скорость шара,  $\boldsymbol{\gamma}$  — вектор нормали к опорной плоскости,  $\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}$  — радиус-вектор точки контакта.

Уравнения движения системы могут быть получены из принципа Даламбера—Лагранжа и записаны в квазискоростях с неопределёнными множителями в виде (подробный вывод уравнений см. в [4]):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{K}} &= (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \\ &+ m\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) + \lambda_0\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T$  — тензор инерции шара относительно точки контакта,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения. Неопределённый множитель  $\lambda_0$  соответствует связи отсутствия верчения и имеет вид

$$\lambda_0 = - \frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + m\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) - \dot{\mathbf{K}})}{(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}.$$

Для полного описания движения шара в абсолютном пространстве уравнения (1) необходимо дополнить квадратурами, описывающими ориентацию шара в пространстве и траекторию точки контакта:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{X} &= R(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}), \quad \dot{Y} = -R(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

Здесь  $X$  и  $Y$  — координаты точки контакта (или геометрического центра шара) в неподвижной системе координат.

Так как в общем случае вектор гиростатического момента  $\mathbf{K}$  является заданной функцией времени, система (1) является неавтономной системой шести дифференциальных уравнений первого порядка.

Система (1) допускает два первых интеграла: геометрический

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1; \quad (2)$$

связь отсутствия верчения относительно вертикали

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (3)$$

Таким образом, на заданном уровне интегралов движения она сводится к неавтономной системе четырёх дифференциальных уравнений.

В случае если гиростатический момент  $\mathbf{K}$  является постоянным, система допускает также интеграл энергии

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) - m\mathbf{g}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}).$$

В общем случае переменного гиростатического момента энергия начинает зависеть от времени. Рассмотрим далее вопрос о возможности неограниченного роста энергии при качении шара.

## РАЗГОН

1. Сформулируем основной вопрос о возможности разгона рассматриваемой системы следующим образом: можно ли подобрать массо-геометрические параметры шара и закон изменения гиростатического момента так, чтобы ограниченные изменения гиростатического момента приводили к неограниченному росту энергии (и скорости) шара?

Для ответа на данный вопрос мы рассмотрим исходную систему, не зависящую от времени, и попытаемся сделать выводы о наличии или отсутствии разгона в системе, пользуясь какими-либо её свойствами. Для этого мы введём понятие замороженной системы. Под замороженной мы понимаем систему, в которой гиростатический момент  $\mathbf{K}$  является постоянной величиной и равен величине гиростатического момента исходной задачи в различные моменты времени.

Уравнения движения замороженной системы при  $\mathbf{K} = \text{const}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \\ &+ m\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) + \lambda_0\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\lambda_0 = - \frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + m\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}))}{(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}.$$

Уравнения (4) допускают три интеграла движения:

геометрический

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1; \quad (5)$$

связь отсутствия верчения относительно вертикали

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0; \quad (6)$$

энергия

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\omega, \tilde{\mathbf{I}}\omega) - mg(\mathbf{r}, \gamma). \quad (7)$$

Данная система может быть редуцирована на фиксированный уровень первых интегралов движения (5), (6). В результате редукиции мы получим автономную систему четырёх дифференциальных уравнений, которые сохраняют интеграл энергии (7).

Зафиксировав уровень интеграла энергии  $\mathcal{E}$ , мы можем стандартным образом [8] построить для этой системы отображение Пуанкаре.

Сформулируем следующую гипотезу.

*Гипотеза. Разгон в неавтономных системах при помощи периодического изменения параметров от времени возможен в случае, если в соответствующей замороженной в произвольный момент времени системе существуют простые аттракторы (репеллеры), причём при периодическом изменении параметров происходит периодическое чередование аттрактора и репеллера на фазовой плоскости.*

Численные эксперименты показали, что для рассматриваемой системы такой разгон, удовлетворяющий гипотезе, возможен при одновременном выполнении следующих условий:

- 1) центр масс шара смещён в одной из главных плоскостей инерции;
- 2) главные моменты инерции, соответствующие плоскости, в которой смещён центр масс, не равны между собой;
- 3) вектор гиросtatического момента равномерно вращается в той же главной плоскости инерции, в которой смещён центр масс шара.

В качестве примера рассмотрим разгон шара с массо-геометрическими параметрами

$$\begin{aligned} m = 1, \quad R = 3, \quad \mathbf{I} = \text{diag}(2, 6, 5), \\ \mathbf{a} = (-1, 0, 1, 5), \quad \mathbf{g} = 9,8 \end{aligned} \quad (8)$$

с помощью управляющих воздействий вида

$$\mathbf{K} = k(-\sin \Omega t, 0, \cos \Omega t), \quad k = 1, \quad \Omega = 0,1, \quad (9)$$

где  $k, \Omega$  — постоянные параметры. Таким образом, в системе координат, связанной с шаром, вектор гиросtatического момента совершает вращение по окружности радиуса  $k$  в плоскости  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$  (рис. 1).

**З а м е ч а н и е.** В общем случае направление вектора гиросtatического момента в начальный момент времени задаётся дополнительным параметром  $\alpha_0$

$$\mathbf{K} = k(-\sin(\Omega t + \alpha_0), 0, \cos(\Omega t + \alpha_0)),$$

но в численных экспериментах мы будем полагать  $\alpha_0 = 0$ , поскольку при исследовании динамики сис-

темы на больших временах начальное положение вектора  $\mathbf{K}$  влияния на результаты не оказывает.

2. Для исследования и визуализации динамики системы выполним редукицию уравнений движения (1) на уровень интегралов (2), (3) с помощью перехода к переменным, аналогичным переменным Андуайе—Депри [8]:

$$\begin{aligned} \omega_1 = G\sqrt{1-y^2} \sin l, \quad \gamma_1 = y \cos g \sin l + \sin g \cos l, \\ \omega_2 = G\sqrt{1-y^2} \cos l, \quad \gamma_2 = y \cos g \cos l - \sin g \sin l, \quad (10) \\ \omega_3 = Gy, \quad \gamma_3 = -\sqrt{1-y^2} \cos g. \end{aligned}$$

Уравнения движения в новых переменных (10) представляют собой систему четырёх дифференциальных уравнений с периодическими по времени коэффициентами. В четырёхмерном фазовом пространстве  $\mathcal{G}^4 = \{(l, y, g, G)\}$  фазовый поток редуцированной системы генерирует четырёхмерное отображение через период  $T = 2\pi/\Omega$ :

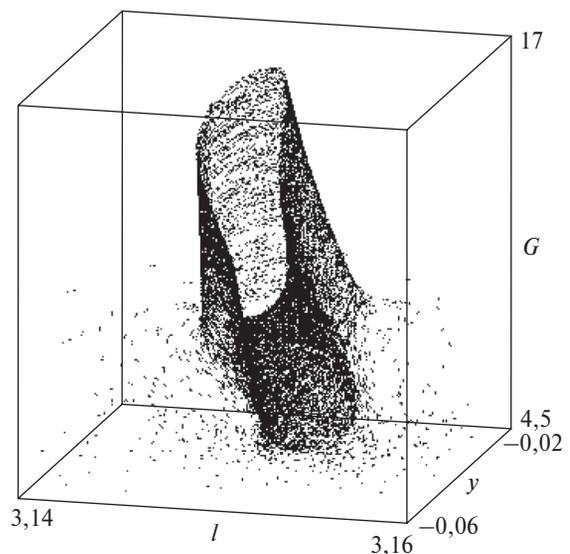
$$\Pi_4^t: \mathcal{G}^4 \rightarrow \mathcal{G}^4. \quad (11)$$

Для визуализации данного отображения мы будем приводить его проекцию в пространство  $\mathcal{G}^3 = \{(l, y, G)\}$ .

Рассмотрим пример движения шара с параметрами (8) и управлениями (9), при которых наблюдается разгон. Начальные условия зададим следующим образом:

$$l = \pi, \quad y = 0,5, \quad g = \pi, \quad G = 5. \quad (12)$$

На рис. 2 приведена проекция отображения (11) в пространство  $\mathcal{G}^3$  при указанных начальных усло-



**Рис. 2.** Проекция отображения через период  $T = 2\pi/\Omega$  при начальных условиях (12).

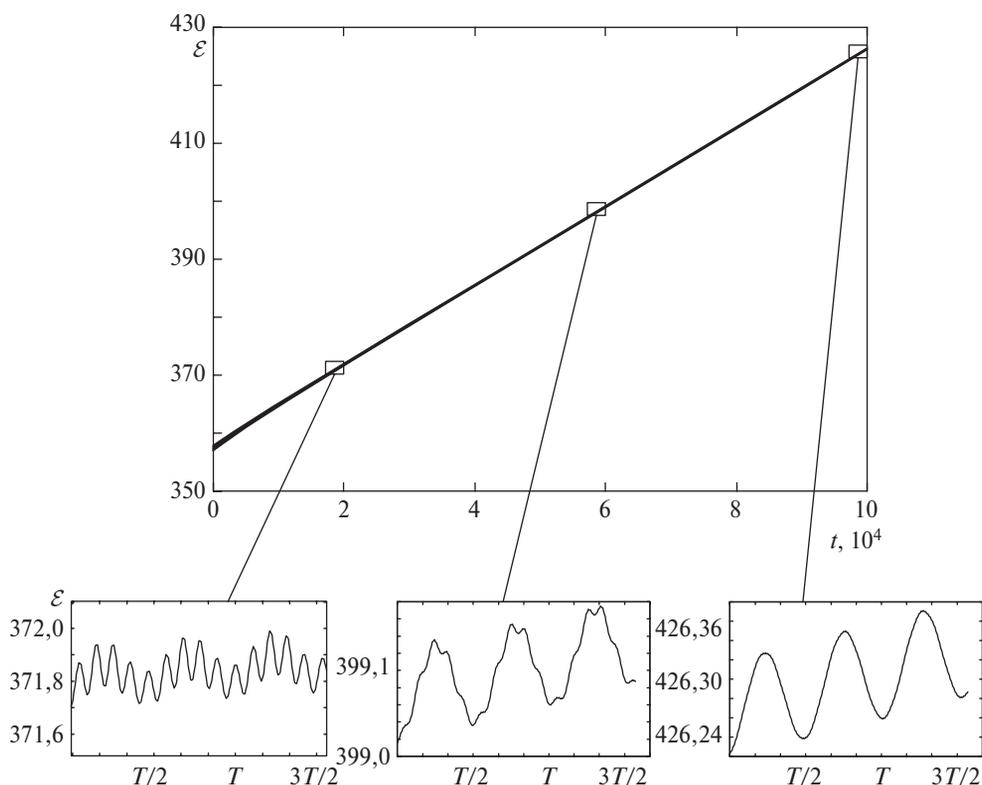


Рис. 3. Энергия системы в зависимости от времени и её увеличенные фрагменты.

виях. Рисунок демонстрирует рост модуля угловой скорости волчка  $G$  и уменьшения амплитуды колебаний проекций  $\omega_1, \omega_3$  (т.е. ширины “трубки”).

Зависимость энергии системы для траектории с начальными условиями (12) изображена на рис. 3. Видно, что энергия растёт линейно по времени, следовательно, угловая скорость должна иметь рост как  $t^{1/2}$ .

**З а м е ч а н и е.** Интересно, что в другой негोलонномной задаче о разгоне саней за счёт периодических колебаний движущейся массы [2, 3] или вращения гиригата [1] скорость системы растёт как  $t^{1/3}$ .

Численные эксперименты показывают, что амплитуда колебаний угловых скоростей  $\omega_1, \omega_3$  уменьшается со временем. Однако вопрос об асимптотике данных амплитуд при  $t \rightarrow \infty$  остаётся открытым, а его решение требует применения асимптотических методов анализа.

При указанных массо-геометрических параметрах (8), управлении (9) и начальных условиях (12) в абсолютном пространстве шар совершает вращения, близкие к перманентным, и катится в среднем вдоль прямой. Траектория точки контакта шара на плоскости  $(X, Y)$  приведена на рис. 4.

**З а м е ч а н и е.** При параметрах системы, не удовлетворяющих предложенной гипотезе, разгона

в рассматриваемой системе нам обнаружить не удалось. Например, в случае если выбрать параметры (8), но задать смещение центра масс в виде  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 5)$ , либо также взять параметры (8), а тензор инерции выбрать осесимметричным  $\mathbf{I} = \text{diag}(5, 6, 5)$ . В обоих этих случаях у замороженной системы

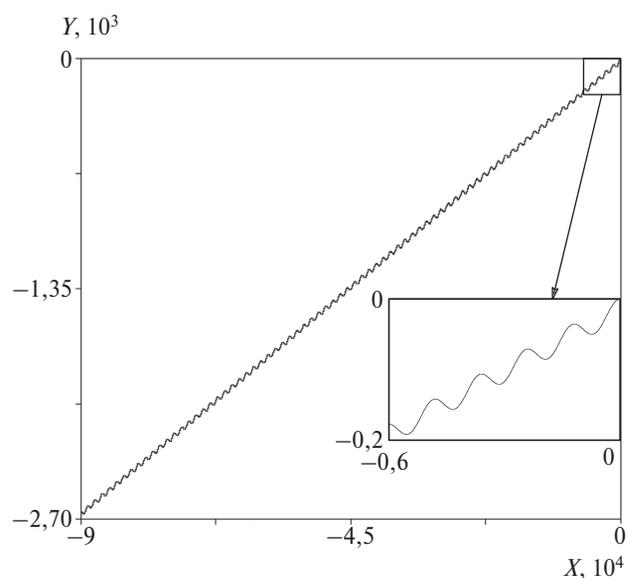


Рис. 4. Траектория точки контакта шара на плоскости  $(X, Y)$ .

с  $\mathbf{a} \perp \mathbf{K}$  или  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{K}$  отсутствуют простые аттракторы (репеллеры) и эффекта разгона не наблюдается.

В заключение отметим, что природа разгона в неголономных системах существенно отличается от случая гамильтоновых систем [9–12]. Он обусловлен в первую очередь наличием асимптотических решений замороженной системы. Однако механизм этого разгона до конца не ясен. Интересным вопросом также является определение связи (или её отсутствия) между гамильтоновым и неголономным механизмами разгона в случае, когда неголономная система допускает гамильтоново представление [13, 14].

Дальнейшее исследование зависимости разгона от параметров системы, а также изучение различных модельных задач позволят прояснить природу разгона в неголономных системах.

**Источники финансирования.** Работа А.В. Борисова (раздел 1) поддержана грантом РФФ № 15–12–20035. Работа А.А. Килина выполнена в МФТИ в рамках проекта 5–100 государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации и поддержана грантом РФФИ № 18–08–00999-а. Работа Е.Н. Пивоваровой поддержана грантом РФФИ № 18–29–10051-мк.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kozlov V.V., Mamaev I.S.* Fermi-Like Acceleration and Power-Law Energy Growth in Nonholonomic Systems // *Nonlinearity*. In press.
2. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kuznetsov S.P.* Chaplygin Sleigh with Periodically Oscillating Internal Mass // *EPL*. 2017. V. 119. № 6. 60008. 7 p.
3. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* The Chaplygin Sleigh with Parametric Excitation: Chaotic Dynamics and Nonholonomic Acceleration // *Regul. Chaotic Dyn.* 2017. V. 22. № 8. P. 955–975.
4. *Borisov A.V., Mamaev I.S., Bizyaev I.A.* The Hierarchy of Dynamics of a Rigid Body Rolling without Slipping and Spinning on a Plane and a Sphere // *Regul. Chaotic Dyn.* 2013. V. 18. № 3. P. 277–328.
5. *Cendra H., Etchehoury M.* Rolling of a Symmetric Sphere on a Horizontal Plane without Sliding or Slipping // *Rept. Math. Phys.* 2006. V. 57. № 3. P. 367–374.
6. *Ehlers K.M., Koiller J.* Rubber Rolling: Geometry and Dynamics of 2–3–5 Distributions. In: *Proc. IUTAM Symp. 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence*. Moscow, 25–30 August 2006. M., 2006. P. 469–480.
7. *Koiller J., Ehlers K.M.* Rubber Rolling over a Sphere // *Regul. Chaotic Dyn.* 2007. V. 12. № 2. P. 127–152.
8. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Ижевск: НИЦ “РХД” / Ин-т компьют. исслед., 2005.
9. *Bolotin S., Treschev D.* Unbounded Growth of Energy in Nonautonomous Hamiltonian Systems // *Nonlinearity*. 1999. V. 12. P. 365–388.
10. *Gelfreich V., Rom-Kedar V., Turaev D.* Fermi Acceleration and Adiabatic Invariants for Non-Autonomous Billiards // *Chaos*. 2012. V. 22. 033116.
11. *Lenz F., Diakonov F.K., Schmelcher P.* Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 100. 014103.
12. *Pereira T., Turaev D.* Exponential Energy Growth in Adiabatically Changing Hamiltonian Systems // *Phys. Rev. E*. 2015. V. 91. 010901.
13. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Isomorphism and Hamilton Representation of Some Nonholonomic Systems // *Sib. Math. J.* 2007. V. 48. № 1. P. 26–36.
14. *Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* Hamiltonicity and Integrability of the Suslov Problem // *Regul. Chaotic Dyn.* 2011. V. 16. № 1/2. P. 104–116.

## SPEEDUP OF A CHAPLYGIN TOP BY MEANS OF ROTORS

A. V. Borisov<sup>1,2</sup>, A. A. Kilin<sup>1,3</sup>, E. N. Pivovarova<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Udmurt State University, Izhevsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Research Robotics Development Center, Kazan, Russian Federation

<sup>3</sup> Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudni, Moscow Region, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov September 20, 2018

Received September 27, 2018

In this paper we consider the control of the motion of a dynamically asymmetric unbalanced ball (Chaplygin top) by means of two perpendicular rotors. We propose a mechanism for control by periodically changing the gyrostatic momentum of the system, which leads to an unbounded speedup. We then formulate a general hypothesis of the mechanism for speeding up spherical bodies on a plane by periodically changing the system parameters.

*Keywords:* nonholonomic constraint, speedup, Chaplygin top, periodic oscillations.