ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 3, с. 295–299

МЕХАНИКА

УДК 531.45:531.46

О ТРЕНИИ КАЧЕНИЯ

А. П. Иванов

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 20.09.2018 г.

Поступило 02.10.2018 г.

Обсуждается характер зависимости трения качения от скорости для различных условий контакта. Принципиальное отличие качения от других видов относительного движения — скольжения и верчения — состоит в том, что точки тела, контактирующие с опорой, меняются со временем. Вследствие деформаций имеется малая область контакта, и при вступлении в контакт точки тела имеют нормальную скорость, пропорциональную диаметру этой области. Для описания зависимости коэффициента трения от угловой скорости при “чистом” качении предлагается линейная зависимость, что допускает логическое объяснение и экспериментальную проверку. При комбинированном движении трение качения сохраняет свои свойства, причём трение скольжения и верчения приобретают свойства вязкого трения.

Ключевые слова: трение качения, комбинированное трение, вязкоупругие деформации.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524853295-299

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение твёрдого тела по шероховатой поверхности сопровождается рядом физических процессов, объединяемых понятием “трение”. Ввиду их многообразия создание общей модели трения не представляется возможным, а отыскание отдельных закономерностей происходит по мере решения практических задач. Первые систематические эксперименты по трению скольжения, верчения и качения были проведены Кулоном в связи с проблемой спуска кораблей со стапеля в 1789 г. Для описания трения скольжения сейчас используют упрощённый (без учёта адгезионной составляющей) закон Кулона вида

$$F = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v}, \tag{1}$$

где N — нормальная реакция, F — сила трения, $\mathbf{v}$ — относительная скорость, μ — коэффициент трения. Согласно данной формуле при постоянном коэффициенте μ сила трения не зависит от модуля скорости.

Позднее при исследовании тормозных систем была установлена более сложная зависимость трения от скорости при качении (так называемый штрибек-эффект). Формула, аналогичная (1), описывает трение качения (по Кулону):

$$M = -\mu_0 N \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \tag{2}$$

где M — момент трения качения, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, μ_0 — коэффициент трения, имеет размерность длины. Таким образом, момент M не зависит от модуля угловой скорости.

В связи с развитием колёсного транспорта выполнялись исследования зависимости коэффициента μ_0 от угловой скорости [1]. Поскольку непосредственные измерения затруднены ввиду наличия существенных аэродинамических сил, эта зависимость определялась на основе следующей математической модели:

$$\mu_0 = \alpha_0 + \alpha_2\omega^2, \tag{3}$$

где α_0, α_2 — постоянные величины.

Также проводились высокоточные измерения в более сложной системе: диск Эйлера в завершающей фазе движения [2], но здесь использовалась модель так называемого контурного трения, зависящего от перемещения точки контакта по окружности диска. Для его описания применялись гипотезы кулонова и вязкого трения, причём обе они оказались пригодны на определённых стадиях движения. В то же время гипотеза классического вязкого трения качения позволила объяснить попятное движение диска [3].

Цель данной работы — определение характера зависимости трения качения от угловой скорости для простых тел (цилиндр или шар) на основе модели контактных деформаций общего вида.

2. ХАРАКТЕР ДИССИПАЦИИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ТРЕНИЯ

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы описывается формулой

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.

**E-mail*: *a-p-ivanov@inbox.ru*

$$dT = dA^e + dA^i, \tag{4}$$

где T — кинетическая энергия, A^e и A^i — работа внешних и внутренних сил соответственно. Для исследования закономерностей трения целесообразно включить в систему движущееся тело и опору: тогда силы трения будут внутренними. В соответствии с общей схемой составления уравнений Лагранжа в обобщённых координатах $q \in R^n$ представим работу сил трения dA^f на виртуальном перемещении δq в виде

$$dA^f = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j, \tag{5}$$

где Q_j — обобщённые силы, n — количество обобщённых координат. Формулы (4), (5) можно записать и с использованием мощностей:

$$\frac{dT}{dt} = W^e + W^i, \quad W^f = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta \dot{q}_j. \tag{6}$$

Заметим, что в частном случае силы трения, пропорциональной скорости, сумму в формуле (6) можно интерпретировать как дифференциал диссипативной функции Рэлея, квадратичной по скоростям. В общем случае $Q_j \neq \dfrac{\partial A^f}{\partial q_j}$, $Q_j \neq \dfrac{\partial W^f}{\partial \dot{q}_j}$, и для вычисления обобщённых сил необходимо непосредственно вычислять dA^f.

2.1. Закон Кулона. Допустим, что трение скольжения описывается формулой (1), коэффициент трения не зависит от скоростей точек движущегося тела.

Физический смысл этого свойства при $n = 1$ следующий: с ростом пути, которое прошло тело, пропорционально возрастают необратимые деформации и диссипация в формуле (5), откуда $Q = \text{const}$. Иными словами, если отрезок пути фиксирован, то деформации, энергетические потери и сила трения не будут зависеть от скорости движения. Наблюдаемая в действительности зависимость коэффициента трения скольжения от относительной скорости объясняется изменением физических свойств контакта, вследствие чего сопротивление движению приобретает гидродинамические свойства.

Отметим, что кулоново трение можно задать при помощи обобщённой функции Рэлея вида

$$R = \sum_{j=1}^{k} \mu_j N_j |\upsilon_j|,$$

где υ_j — скорость точки контакта, μ_j — соответствующие коэффициенты трения, N_j — нормальные реакции. Данное описание применимо лишь при условии, что N_j заданы (не зависят от скоростей).

В работах [4, 5] предложена идея описания диссипации в общем случае относительного движения на основе закона (1). При этом учёт качения основывался на асимметрии нормальных напряжений либо на проскальзывании в (неплоской) области контакта. Для “чистого” качения эти модели приводят к формуле (2).

Поскольку в основе перечисленных моделей лежит формула (1), они наследуют свойство независимости коэффициента трения от скорости или угловой скорости. Физической интерпретацией этого свойства может служить жёсткое колесо, катящееся по песку. Как показано в [6], гипотеза $\mu_0 = \text{const}$ не подтверждается на практике: в простом эксперименте круглый карандаш скатывается с наклонной плоскости с постоянной скоростью, при этом аэродинамическое сопротивление ничтожно. Единственно возможный механизм стабилизации — возрастание коэффициента μ_0 с ростом угловой скорости.

2.2. Ударное сопротивление качению. При качении шестерёнок или гранёных тел возникают ударные взаимодействия в точках тела, вступающих в контакт с опорой с ненулевой скоростью [6, 7]. Практическими примерами являются дисковая борона-мотыга или система “звёздочка” [7]. Движение состоит из опорной (консервативной) фазы и ударов при смене “ног”. Диссипация возникает при неупругих ударах. Система со сходной динамикой — шестигранный карандаш — рассмотрена в [6].

Заметим, что, указав на ударный характер диссипации и произведя расчёты ударных импульсов, авторы [6] не использовали полученные результаты для определения зависимости трения качения от угловой скорости, выдвинув вместо этого для последующего исследования гипотезу, согласно которой

$$\mu_0 = k\omega^p, \tag{7}$$

где k — некоторый коэффициент, $p = 2$ [7] или $p \in [1, 2]$ [6].

Проведём анализ этих предположений на основе исследования динамики “звёздочки”. В контактной фазе тело движется как перевёрнутый маятник. При этом возникают нормальная реакция и деформации опоры.

Пусть r — расстояние от точки опоры до центра масс, m — масса тела, ρ — радиус инерции, g — ускорение свободного падения, φ — угол между опорной ногой и вертикалью. Уравнение движения маятника

$$\rho^2\ddot{\varphi} = gr\sin\varphi \tag{8}$$

допускает первый интеграл

$$\frac{1}{2}\rho^2\omega^2 + gr\cos\varphi = C = \frac{1}{2}\rho^2\omega_0^2 + gr, \quad \omega = \dot{\varphi}, \tag{9}$$

где ω_0 — угловая скорость в верхней точке. Нормальную и касательную составляющие реакции опоры R_n и R_t находим из общих теорем динамики:

$$R_n = P - r\omega^2\cos\varphi, \quad R_t = mr(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi), \tag{10}$$

где значения $\ddot{\varphi}$ и ω определяются из формул (5), (6). Несложный анализ выражений (10) показывает, что величина R_n минимальна в верхней точке траектории при $\varphi = 0$. Это накладывает следующее ограничение на величину угловой скорости, гарантирующее безотрывное движение:

$$r\omega_0^2 \le P. \tag{11}$$

По соображениям симметрии суммарный момент реакции опоры относительно центра масс при движении на одной "ноге" равен нулю. Ненулевой момент возникает при ударной смене "ног". Считая удар неупругим, определим компоненты ударного импульса I_n и I_t из условия мгновенной остановки новой точки контакта. Уравнения Ньютона—Эйлера для импульсивного движения принимают вид

$$m\Delta v_t = I_t, \quad m\Delta v_n = I_n,$$
$$m\rho^2\Delta\omega = r(I_t\cos\alpha + I_n\sin\alpha), \tag{12}$$

где α — половина угла между соседними "ногами", v_n и v_t — нормальная и касательная составляющие скорости центра масс. Скорость в точке удара (u_n, u_t) определяем по формуле Эйлера

$$u_n = v_n + \omega r\sin\alpha, \quad u_t = v_t + \omega r\cos\alpha. \tag{13}$$

В начале удара $u_n = 2\omega r\sin\alpha$, $u_t = 0$, а в конце $u_n = u_t = 0$. Выражая компоненты ударного импульса из системы (12), (13), приходим к выражениям

$$I_n = -2mr\omega\sin\alpha\frac{1 + \chi\cos^2\alpha}{1 + \chi + 2\chi^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha},$$
$$I_t = \frac{\chi\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \chi\cos^2\alpha}I_n, \quad \chi = \frac{r^2}{\rho^2}. \tag{14}$$

Как следует из формулы (14), момент, пропорциональный ω, создаётся не только нормальной, но и касательной составляющими ударного импульса:

$$M = r(I_t\cos\alpha + I_n\sin\alpha). \tag{15}$$

Далее отметим, что согласно теореме Кельвина изменение кинетической энергии при неупругом ударе равно

$$\Delta T = a\omega I_n = -O(\omega^2). \tag{16}$$

Кроме того, деформации и диссипация сопровождают также опорную (безударную) фазу, причём вследствие (10) потери складываются из константы и слагаемого $O(\omega^2)$. Следовательно, для трения качения в ударной модели справедлива формула (3).

К аналогичному выводу приводит рассмотрение (обобщённой) функции Рэлея (6), при этом $W = c_1\omega + c_2\omega^3$, поскольку фиксированный путь (между двумя последовательными ударами) проходится за время, обратно пропорциональное скорости.

Доказано следующее

Утверждение 1. *Для ударной модели трения зависимость коэффициента трения качения от угловой скорости в некотором интервале определяется формулой* (3). *Область применимости этой формулы ограничена интервалом* $\omega_0 \in (\omega_1, \omega_2)$, *где значение* ω_1 *определяется равенством* $\omega_0 = 0$ *в формуле* (9), *а значение* ω_2 — *формулой* (11). *Иными словами, колесо должно перекатиться через верхнюю точку и не потерять контакт с опорой.*

2.3. Случай непрерывного контакта. Природа сопротивления качению круглых тел (шара или цилиндра) существенно зависит от упругих свойств тела и поверхности. В частности, при движении автомобиля по шоссе это сопротивление главным образом обусловлено гистерезисом при деформации шин [9]. Для описания зависимости коэффициента трения от угловой скорости предлагается использовать эмпирическую формулу, идентичную (3). Кроме того, на большой скорости движения в шине может возникнуть стоячая волна в виде бугорка в передней нижней части, что ведёт к существенному увеличению трения качения.

При движении катка по песку диссипация обусловлена деформацией поверхности, при этом общие энергетические потери пропорциональны весу и углу поворота. Следовательно, коэффициент трения не зависит от угловой скорости.

Задача о качении вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала была рассмотрена в [10]. Получено точное выражение для коэффициента трения качения в терминах модифицированных функций Бесселя. Не выписывая громоздкой формулы, отметим лишь, что при малых скоростях качения этот коэффициент выражается многочленом первой степени от угловой скорости. Случай, когда цилиндр жёсткий, а основание вязкоупругое, исследован аналогичным методом в [11]; показано, в частности, что коэффициент трения стремится к нулю как для бесконечно малой, так и для бесконечно большой угловой скорости.

Заметим, что эти выводы сделаны для сильно деформируемых материалов (например, резины). При анализе экспериментов по трению качения стальных шариков в [12, 13] показано, что коэффициент трения пропорционален угловой скорости. Для неоднородного шара (Чаплыгина) в [14] показано, что учёт только трения скольжения (сухого или вязкого) не даёт удовлетворительного согласия с экспериментом, более существенное влияние оказывает трение качения.

Воспользуемся для описания локальных деформаций твёрдых тел простейшей моделью Кельвина—Фойгта вида

$$\sigma = 2b\dot{\delta} + c^2\delta, \tag{17}$$

где δ — деформация, σ — напряжение, b и c — коэффициенты вязкости и жёсткости. Начальные условия для точки, вступающей в контакт: $\delta_0 = 0$, $\dot{\delta}_0 = \omega\varepsilon$, где ε — радиус области контакта. В соответствии с общим правилом нахождения обобщённых сил (в данном случае момента трения качения) оценим диссипацию при изменении угла поворота цилиндра на величину $d\varphi = R\varepsilon$. Траектория каждой из точек поверхности цилиндра — циклоида, параметр которой равен R. Потеря энергии происходит лишь за счёт вязкой составляющей в формуле (17), так как изменения общего объёма упругих деформаций не происходит. Следовательно, вновь приходим к выводу о пропорциональности коэффициента трения угловой скорости.

Проведённые рассуждения можно объединить следующим утверждением.

Утверждение 2. *Трение при качении твёрдых тел описывается формулой* (2), *где*

$$\mu_0 = \alpha_0 + \alpha_1\omega, \tag{18}$$

а коэффициенты α_0 *и* α_1 *подлежат экспериментальному определению в каждом конкретном случае. Наличие первого слагаемого в этой формуле обусловлено, в частности, адгезией, роль которой при малых скоростях качения может быть заметной.*

3. ТРЕНИЕ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ШАРА

Динамика волчка Флерие (секстан) обусловлена комбинацией его верчения и скольжения точки опоры. Это устройство использовалось с конца XIX в., но сопутствующая теория была создана лишь в середине XX в. [8]. Эти виды относительного движения объединяет горизонтальность относительной скорости в точках области контакта, что позволяет локально применять закон Кулона на основе некоторой гипотезы о распределении нормальных напряжений.

Для учёта качения было предложено [4] модифицировать эту теорию, считая распределение асимметричным. В двухпараметрической модели [5] учитывались деформации шара и основания, причём также локально применялась формула (1). Перечисленные подходы приводят к выводу о неизменности силы и момента трения при пропорциональном увеличении скорости и угловой скорости.

Принципиальное отличие качения от верчения и скольжения состоит в наличии нормальной составляющей скорости точек тела, вступающих в контакт с опорой. Было предложено [4, 15] учитывать влияние качения на распределение нормальной нагрузки $n(A)$ в круговом пятне контакта (радиуса R) посредством формулы

$$n(A) = n_0(A)\left(1 + \frac{k}{R\Omega}(r(A)\times\Omega,\ N)\right),\quad r(A) = OA, \tag{19}$$

где O — центр круга, A — одна из точек пятна контакта, $n_0(A)$ — симметричное распределение в статике, Ω — вектор угловой скорости качения, k — некоторый безразмерный коэффициент. Последний подбирался из соображений соответствия эксперимента данным, причём для различных опытных данных получены значения $k \in (-0{,}5,\ 1)$ [15]. Рассмотрены свойства комбинированного трения для $k = \mathrm{const} > 0$ [4]. При этом закономерности трения качения не обсуждались.

Согласно формуле (19) при постоянном значении коэффициента k распределение нормальной нагрузки не зависит от модуля угловой скорости, что приводит к сингулярности в точке $\Omega = 0$. Более удобную и правдоподобную модель можно построить, исходя из формулы (18) для нормальных напряжений: ввиду симметрии упругой составляющей в этой формуле к асимметрии приводит вязкая часть, пропорциональная угловой скорости качения. Вместо формулы (19) получаем

$$n(A) = n_0(A)\left(1 + \frac{k}{R}(r(A)\times\Omega,\ N)\right),\quad r(A) = OA. \tag{20}$$

Отметим, что формула (20) приводит к допустимым значениям $n(A)$ при условии $k|\Omega| \le 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Принципиальное отличие качения от других видов относительного движения — скольжения и верчения — состоит в том, что точки тела, контактирующие с опорой, меняются со временем. Вследствие деформаций имеется малая область контакта, и при вступлении в контакт точки тела имеют нормальную скорость, пропорциональную диаметру этой области. Для описания коэффициента трения при “чистом” качении предлагается формула (18), которая допускает логическое объяснение и экспериментальную проверку.

При комбинированном движении трение качения сохраняет свои свойства, причём трение скольжения и верчения можно рассчитать на основе закона Кулона в локальной форме при учёте формулы (20) для изменённого распределения нормальной нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wong J.Y.* Theory of Ground Vehicles. 3 ed. N.Y.: Wiley, 2001.
2. *Leine R.I.* Experimental and Theoretical Investigation of the Energy Dissipation of a Rolling Disk During Its Final Stage of Motion // Arch. Appl. Mech. 2009. V. 79. № 11. P. 1063–1082.
3. *Борисов А.В.*, *Килин А.А.*, *Караваев Ю.Л.* О попятном движении катящегося диска // УФН. 2017. Т. 187. № 9. С. 1003–1006.
4. *Киреенков А.А.* Связанные модели трения качения и скольжения // ДАН. 2008. Т. 419. № 6. С. 759–762.
5. *Карапетян А.В.* Двухпараметрическая модель трения // ПММ. 2009. Т. 73. В. 4. С. 515–519.
6. *McDonald K.T.* Hexagonal Pencil Rolling on an Inclined Plane // RCD. 2008. V. 13. № 4. P. 332–343.
7. *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982.
8. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
9. *Ma D.*, *Liu C.*, *Zhao Z.*, *Zhang H.* Rolling Friction and Energy Dissipation in a Spinning Disk // Proc. Rog. Soc. London. A. 2014. V. 470. 20140191.
10. *Горячева И.Г.* Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // ПММ. 1973. Т. 37. № 5. С. 877–885.
11. *Hunter S.C.* The Rolling Contact of a Rigid Cylinder with a Viscoelastic Half Space // J. Appl. Mech. 1961. V. 28. № 4. P. 611–617.
12. *Persson B.N.J.* Rolling Friction for Hard Cylinder and Sphere on Viscoelastic Solid // The Europ. Phys. J. E. 2010. V. 33. № 4. P. 327–333.
13. *Borisov A.V.*, *Ivanova T.B.*, *Karavaev Y.L.*, *Mamaev I.S.* Theoretical and Experimental Investigations of the Rolling of a Ball on a Rotating Plane (Turntable) // Europ. J. Phys. 2018. V. 39. № 6. 065001. 13 p.
14. *Borisov A.V.*, *Kilin A.A.*, *Mamaev I.S.* How to Control the Chaplygin Ball Using Rotors. II // Reg. and Chaot. Dyn. 2013. V. 18. № 1/2. P. 144–158.
15. *Svendenius J.* Tire Models for Use in Braking Application. Lund: Dept. Autom. Control / Lund Inst. Technol., 2003.

ON ROLLING FRICTION

A. P. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov September 20, 2018

Received October 2, 2018

The dependence of rolling friction on velocity for various contact conditions is discussed. The principal difference between rolling and other types of relative motion (sliding and spinning) is that the points of the body in contact with the support change over time. Due to deformations, there is a small contact area and, entering into contact, the body points have a normal velocity proportional to the diameter of this area. For describing the dependence of the friction coefficient on the angular velocity in the case of “pure” rolling, a linear dependence is proposed that admits a logical explanation and experimental verification. Under the combined motion, the rolling friction retains its properties, the sliding and spinning friction acquiring the properties of viscous friction.

Keywords: rolling friction, combined friction, viscous-elastic deformations.