ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 1, с. 7–11

МАТЕМАТИКА

УДК 519.45+512.7+512.81

О КЛАССИФИКАЦИИ УСТОЙЧИВО РЕФЛЕКТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-РЕШЁТОК РАНГА 4

Н. В. Богачев

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым 24.01.2019 г.

Поступило 30.01.2019 г.

В данной работе доказывается, что фундаментальный многогранник $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-арифметической группы отражений в трёхмерном пространстве Лобачевского обладает таким ребром, что расстояние между обрамляющими гранями этого ребра достаточно мало. С помощью этого результата получена классификация устойчиво рефлективных гиперболических $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-решёток ранга 4.

Ключевые слова: устойчиво рефлективные гиперболические решётки, группы отражений, многогранник Кокстера, алгоритм Винберга.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-565248617-11

Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ — вполне вещественное поле алгебраических чисел, A — кольцо его целых элементов. Для простоты будем считать, что оно является кольцом главных идеалов.

Свободный конечно-порождённый A-модуль L, снабжённый скалярным умножением $(\cdot\,,\cdot)$ сигнатуры $(n, 1)$ со значениями в A, называется гиперболической решёткой, если для всякого нетождественного вложения σ: $\mathbb{F} \to \mathbb{R}$ квадратичное пространство $L \underset{\sigma(A)}{\otimes} \mathbb{R}$ положительно определено.

Пусть L — гиперболическая решётка. Тогда векторное пространство

$$\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_A \mathbb{R}$$

является $(n+1)$-мерным вещественным пространством Минковского. Группа $\Gamma = \mathcal{O}'(L)$ целочисленных (т.е. с коэффициентами из A) линейных преобразований, сохраняющих решётку L и отображающих на себя каждую связную компоненту конуса

$$\mathfrak{C} = \{v \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, (v, v) < 0\} = \mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^-,$$

является дискретной группой движений пространства Лобачевского. Здесь подразумевается векторная модель пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$, заданная как множество точек гиперболоида

$$\{v \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, (v, v) = -1\},$$

лежащих внутри конуса $\mathfrak{C}^+$. Группа движений $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}'_{\{n,1\}}(\mathbb{R})$ есть группа псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^{n,1}$, оставляющих на месте конус $\mathfrak{C}^+$.

Из общей теории арифметических групп известно, что если решётка L изотропна (т.е. ассоциированная с ней квадратичная форма представляет нуль; заметим, что это может быть выполнено только для решёток над $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$), то факторпространство $\mathbb{H}^n / \Gamma$ некомпактно, но имеет конечный объём, а во всех остальных случаях оно компактно (тогда группа Γ называется кокомпактной).

Определение 1. Группы Γ, полученные указанным выше способом, и все соизмеримые[1] с ними дискретные подгруппы группы $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ называются *арифметическими дискретными подгруппами простейшего типа*. Поле $\mathbb{F}$ называется *полем определения* (или *основным полем*) группы Γ (и всех групп, соизмеримых с ней).

Примитивный вектор $e \in L$ называется корнем или, более точно, k-*корнем*, где $k = (e, e) > 0$, если $2(e, x) \in kA$ для всех $x \in L$. Всякий корень e опреде-

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.

Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп

E-mail: nvbogach@mail.ru

[1]Две подгруппы Γ_1 и Γ_2 какой-либо группы называются соизмеримыми, если группа $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ является подгруппой конечного индекса в каждой из них.

ляет ортогональное отражение (называемое k-отражением, где $k=(e,e)$) в пространстве $\mathbb{E}^{n,1}=L\otimes_A\mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_e:\ x\mapsto x-\frac{2(e,x)}{(e,e)}e,$$

которое сохраняет решётку L. Отражение $\mathcal{R}_e$ определяет отражение в пространстве $\mathbb{H}^n$ относительно гиперплоскости $H_e=\{x\in\mathbb{H}^n \mid (x,e)=0\}$, называемой зеркалом отражения $\mathcal{R}_e$.

Отражение $\mathcal{R}_e$ называется устойчивым, если $(e,e)|2$ в кольце A. Например, при $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$, $A=\mathbb{Z}$, это выполняется при $(e,e)=1$ и $(e,e)=2$, т.е. только 1- и 2-отражения являются устойчивыми, а при $\mathbb{F}=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и $A=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ устойчивыми будут 1-, 2- и $(2+\sqrt{2})$-отражения. Всякий примитивный вектор $e\in L$, для которого $(e,e)|2$, автоматически является корнем решётки L и всякого её конечного расширения.

Пусть L — гиперболическая решётка над кольцом A (в дальнейшем мы будем говорить “A-решётка”). Обозначим через $\mathcal{S}(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую устойчивыми отражениями, и через $\mathcal{O}_r(L)$ — подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую всеми содержащимися в ней отражениями.

Определение 2. Гиперболическая решётка L называется рефлективной, если индекс $[\mathcal{O}'(L):\mathcal{O}_r(L)]$ конечен, и устойчиво рефлективной[2], если индекс $[\mathcal{O}'(L):\mathcal{S}(L)]$ конечен.

Очевидно, что конечное расширение всякой устойчиво рефлективной гиперболической решётки также является устойчиво рефлективной решёткой.

Систематическое изучение групп отражений и, в частности, арифметических групп отражений в пространствах Лобачевского было начато в 1967 г. Э.Б. Винбергом (см. [7]). Известно, что кокомпактные дискретные группы отражений, так же как и арифметические группы отражений, отсутствуют в пространствах Лобачевского размерности ≥ 30 (Э.Б. Винберг, 1984, см. [9]).

В 2007 г. В.В. Никулин (см. [13]) и независимо И. Агол, М.В. Белолипецкий, П. Сторм и К. Уайт (см. [1]) доказали, для каждого $n\geq 2$ существует с точностью до подобия лишь конечное число рефлективных гиперболических решёток сигнатуры $(n, 1)$.

Наибольшее продвижение на данный момент достигнуто в классификации рефлективных гиперболических решёток над $\mathbb{Z}$. Эти результаты хорошо освещены в недавнем обзоре М. Белолипецкого (см. [2]), а также в более новых работах автора данного сообщения, где классифицированы все устойчиво рефлективные анизотропные гиперболические $\mathbb{Z}$-решётки ранга 4 (2016—2019, см. [3, 4]).

Для решёток над кольцами, отличными от $\mathbb{Z}$, продвижений совсем мало. В.О. Бугаенко (1984—1992, см. [6]) классифицировал рефлективные унимодулярные гиперболические решётки над кольцами $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ и $\mathbb{Z}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right]$, а в 2015 г. А. Марк [10] классифицировала рефлективные гиперболические $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-решётки ранга 3, дискриминанты которых свободны от квадратов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть P — компактный остроугольный многогранник в $\mathbb{H}^3$, и E — некоторое его ребро. Обозначим через F_1 и F_2 грани многогранника P, содержащие ребро E, а через u_3 и u_4 — единичные внешние нормали к граням F_3 и F_4, содержащим вершины ребра E, но не само ребро.

Определение 3. Грани F_3 и F_4 будем называть обрамляющими гранями ребра E, а число $|(u_3,u_4)|$ — его шириной.

Заметим, что $|(u_3,u_4)|=\operatorname{ch}\rho(F_3,F_4)$, когда плоскости граней F_3 и F_4 расходятся, а иначе $|(u_3,u_4)|\leq 1$.

Поставим в соответствие ребру E набор $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{14},\alpha_{24})$, где α_{ij} — угол между гранями F_i и F_j.

Теорема 1. *Фундаментальный многогранник всякой $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-арифметической группы отражений в $\mathbb{H}^3$ имеет ребро ширины меньше, чем* $4{,}14$.

На самом деле получен более сильный результат. А именно, доказано, что существует ребро ширины меньше $t_{\boldsymbol{\alpha}}$, где $t_{\boldsymbol{\alpha}}\leq 4{,}14$ — число, зависящее от набора $\boldsymbol{\alpha}$ двугранных углов вокруг этого ребра.

Введём некоторые обозначения:

$[C]$ — квадратичная решётка, скалярное умножение в которой в некотором базисе задаётся симметричной матрицей C;

$d(L):=\det C$ — дискриминант решётки $L=[C]$;

$L\oplus M$ — ортогональная сумма решёток L и M;

[2]В статьях [3] и [4] устойчиво рефлективные решётки над $\mathbb{Z}$ называются (1, 2)-рефлективными.

граней — количество граней фундаментального многогранника группы $\mathcal{O}_r(L)$.

Теорема 2. *Всякая максимальная устойчиво рефлективная гиперболическая решётка ранга* 4 *над* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *изоморфна одной из следующих семи решёток*:

№	L	# граней	$d(L)$
1	$[-1-\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	5	$-1-\sqrt{2}$
2	$[-1-2\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	6	$-1-2\sqrt{2}$
3	$[-5-4\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	5	$-5-4\sqrt{2}$
4	$[-11-8\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	17	$-11-8\sqrt{2}$
5	$[-\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	6	$-\sqrt{2}$
6	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 2 & \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}\oplus[1]$	6	$-\sqrt{2}$
7	$[-7-5\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	6	$-7-5\sqrt{2}$

Автор надеется, что применённый в этой работе метод наиболее удалённого ребра применим для классификации рефлективных гиперболических решёток любого ранга.

МЕТОД НАИБОЛЕЕ УДАЛЁННОГО РЕБРА

Отметим, что метод наиболее удалённого ребра является модификацией метода узких частей многогранников, применявшегося В.В. Никулиным в работах [11, 12].

Схема доказательства теоремы 1. Пусть P — компактный остроугольный многогранник в пространстве $\mathbb{H}^3$ и O — некоторая фиксированная точка внутри многогранника P.

Пусть E — ребро многогранника P, наиболее удалённое от точки O. Обозначим вершины ребра E через V_1 и V_2. Грани, содержащие это ребро, обозначим через F_1 и F_2, а обрамляющие грани — через F_3 и F_4. Двугранные углы между гранями F_i и F_j обозначим через α_{ij}. Пусть E_1 и E_3 — рёбра многогранника P, выходящие из вершины V_1, а ребра E_2 и E_4 — из V_2, причём рёбра E_1 и E_2 лежат в грани F_1. Длину ребра E обозначим через a, а плоские углы между рёбрами E_j и E — через α_j.

Теорема 3 (Н.В. Богачев, см. [4]). *Длина наиболее удалённого ребра удовлетворяет неравенству*

$$a < \operatorname{arsh}\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)}\right) + \operatorname{arsh}\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_4}{2}\right)}\right).$$

Пусть теперь многогранник P является фундаментальным многогранником $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-арифметической группы отражений в пространстве $\mathbb{H}^3$. Система единичных внешних нормалей (u_1, u_2, u_3, u_4) к граням F_1, F_2, F_3, F_4 линейно независима. Её матрица Грама имеет вид

$$G(u_1, u_2, u_3, u_4) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha_{12} & -\cos\alpha_{13} & -\cos\alpha_{14} \\ -\cos\alpha_{12} & 1 & -\cos\alpha_{23} & -\cos\alpha_{24} \\ -\cos\alpha_{13} & -\cos\alpha_{23} & 1 & -T \\ -\cos\alpha_{14} & -\cos\alpha_{24} & -T & 1 \end{pmatrix},$$

где $T = |(u_3, u_4)| = \operatorname{ch}\rho(F_3, F_4)$ в случае, если грани F_3 и F_4 расходятся, и $T \le 1$ иначе.

Легко убедиться, что

$$\operatorname{ch} a = \frac{G_{34}}{\sqrt{G_{33}G_{44}}}, \qquad (1)$$

где G_{ij} — алгебраические дополнения матрицы $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Пусть $F(\alpha)$ обозначает правую часть неравенства из теоремы 3, $\alpha = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{14}, \alpha_{24})$. Тогда

$$\frac{G_{34}}{\sqrt{G_{33}G_{44}}} < \operatorname{ch} F(\alpha).$$

Нетрудно убедиться, что двугранные углы многогранника P могут быть равны только $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{\pi}{8}$. Имеется всего несколько десятков различных (с точностью до нумерации углов) наборов α. Для каждого такого набора α неравенство (1) даёт какую-то оценку $T < t_\alpha$ (поскольку G_{34} линейно зависит от T), причём

$$\max_\alpha\{t_\alpha\} = t_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)} = 4{,}14.$$

Это завершает доказательство теоремы 1.

Схема доказательства теоремы 2. Пусть теперь P является фундаментальным многогранником группы $\mathcal{S}(L)$ для гиперболической $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-решётки L ранга 4. Решётка L рефлективна тогда и только тогда, когда многогранник P компактен (т.е. ограничен).

Пусть E — ребро (многогранника P) ширины меньше t. В силу теоремы 1 мы можем обеспечить $t \le 4{,}14$ (если возьмём наиболее удалённое ребро от некоторой фиксированной точки O внутри многогранника P). Пусть u_1, u_2 (соответственно u_3, u_4) — корни решётки L, ортогональные граням, в которых лежит ребро E (соответственно обрамляющим граням), и являющиеся внешними нормалями этих граней. Обозначим эти грани через F_1, F_2, F_3, F_4 соответственно. Если $(u_3, u_3) = k$, $(u_4, u_4) = l$, то

$$|(u_3, u_4)| \le t\sqrt{kl} \le 4{,}14\sqrt{kl}. \qquad (2)$$

Поскольку мы решаем задачу классификации устойчиво рефлективных решёток, то нам надо рассматривать фундаментальные многогранники арифметических групп, порождённых 1-, 2- и $(2+\sqrt{2})$-отражениями. В таком случае нам известны ограничения на все элементы матрицы $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$, так как все грани F_i попарно пересекаются кроме, быть может, пары граней F_3 и F_4. Но в случае, если F_3 и F_4 не пересекаются, расстояние между этими гранями ограничено благодаря неравенству (2). Таким образом, все элементы матрицы $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$ целочисленны и ограничены, значит, имеется лишь конечное число возможных матриц Грама $G(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Векторы u_1, u_2, u_3, u_4 порождают некоторую подрешётку L' конечного индекса решётки L. Более точно, решётка L лежит между решётками L' и $(L')^*$, причём

$$[(L')^* : L']^2 = |d(L')|.$$

Отсюда вытекает, что $|d(L')|$ делится на $[L : L']^2$. Пользуясь этим, можно найти в каждом случае всевозможные расширения решётки L'.

Полученный список решёток-кандидатов исследуется на рефлективность с помощью алгоритма Винберга (1972 г., см. [8]). Для этого используется программа, написанная автором для решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ [14].

Отметим, что в 2017 г. автор совместно с А.Ю. Перепечко написал программу для произвольных решёток над $\mathbb{Z}$ [15], её подробное описание см. в [5].

Благодарности. Автор благодарит Э.Б. Винберга за ценные обсуждения и внимание к работе.

Источник финансирования. Работа поддержана грантом РФФИ (проект 18–31–00427) и фондом Саймонса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agol I., Belolipetsky M., Storm P., Whyte K.* Finiteness of Arithmetic Hyperbolic Reflection Groups // Groups Geom. Dyn. 2008. V. 2. № 4. P. 481–498.
2. *BelolipetskyM.* Arithmetic Hyperbolic Reflection Groups // Bull. New Ser. Amer. Math. Soc. 2016. V. 53. № 3. P. 437–475.
3. *Богачев Н.В.* Рефлективные анизотропные гиперболические решётки ранга 4 // УМН. 2017. Т. 72. В. 1. С. 193–194.
4. *Богачев Н.В.* Классификация (1, 2)-рефлективных анизотропных гиперболических решёток ранга 4 // Изв. РАН. Сер. мат. 2019. Т. 83. В. 1. С. 3–24.
5. *Богачев Н.В., Перепечко А.Ю.* Алгоритм Винберга для гиперболических решёток // Мат. заметки. 2018. Т. 103. В. 5. С. 769–773.
6. *Bugaenko V.O.* Arithmetic Crystallographic Groups Generated by Reflections, and Reflective Hyperbolic Lattices // Adv. Sov. Math. 1992. V. 8. P. 33–55.
7. *Винберг Э.Б.* Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского // Мат. сб. 1967. Т. 72(114). № 3. С. 471–488.
8. *Винберг Э.Б.* О группах единиц некоторых квадратичных форм // Мат. сб. 1972. Т. 87. С. 18–36.
9. *Винберг Э.Б.* Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности // Тр. ММО. 1984. Т. 47. С. 68–102.
10. *Mark A.* The Classification of Rank 3 Reflective Hyperbolic Lattices over $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ // Mat. Proc. Cambridge. Phil. Soc. 2016. V. 12. P. 1–37.
11. *Никулин В.В.* Поверхности типа $K3$ с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга 3 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1984. Т. 65. С. 119–142.
12. *Никулин В.В.* О классификации гиперболических систем корней ранга 3 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 2000. Т. 230. С. 1–255.
13. *Никулин В.В.* Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского // Изв. РАН. Сер. мат. 2007. Т. 71. В. 1. С. 55–60.
14. https://github.com/nvbogachev/VinAlg-Z-sqrt-2-
15. *Bogachev N., Perepechko A.* Vinberg's Algorithm. DOI:10.5281/zenodo.1098448, https://github.com/aperep/vinberg-algorithm. 2017.

ON THE CLASSIFICATION OF STABLY REFLECTIVE HYPERBOLIC $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-LATTICES OF RANK 4

N. V. Bogachev

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

Adygya State University, Maikop, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.A. Vasilyev January 24, 2019

Received January 30, 2019

In this paper we prove that the fundamental polyhedron of a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-arithmetic reflection group in the three-dimensional Lobachevsky space contains an edge such that the distance between its framing faces is small enough. Using this fact we obtain a classification of stably reflective hyperbolic $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-lattices of rank 4.

Keywords: stably reflective hyperbolic lattices, reflection groups, Coxeter polyhedron, Vinberg's algorithm.