ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 1, с. 20–23

МАТЕМАТИКА

УДК 517.926.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРРОНУ И ЕЁ ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

И. Н. Сергеев

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 29.12.2018 г.

Поступило 23.01.2019 г.

Введены естественные понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и полной неустойчивости по Перрону нулевого решения дифференциальной системы. Указаны их особенности и связи с показателями Перрона и с аналогичными ляпуновскими понятиями. Обнаружено абсолютное и уникальное совпадение возможностей исследования перроновской и ляпуновской устойчивости и асимптотической устойчивости по первому приближению.

Ключевые слова: дифференциальная система, теория устойчивости, показатели Ляпунова, показатели Перрона.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652486120-23

Работа посвящена понятию устойчивости по Перрону, возникшему в результате попытки строго определить, за какие именно свойства дифференциальной системы отвечают её показатели Перрона (см. [1] и обширную библиографию в [2]).

Отрицательность и положительность показателей Перрона сразу всех ненулевых решений автономной системы до настоящего времени ассоциировалась (причём не совсем правомерно) с устойчивостью по Пуассону [3, гл. IV, § 4] и соответственно с полной неустойчивостью [3, гл. IV, § 9], т.е. с блуждаемостью всех точек [3, гл. IV, § 5].

Вводимые же ниже различные перроновские свойства устойчивости имеют абсолютно такую же связь со знаками показателей Перрона, какая наблюдается между соответствующими ляпуновскими свойствами устойчивости [4, гл. I] и знаками показателей Ляпунова [5, гл. I]. Именно этой связью и обусловлено использование имени О. Перрона в определении перроновской устойчивости.

В настоящей работе:

а) описаны все логические связи между перроновскими и ляпуновскими свойствами устойчивости (теорема 1);

б) в случае линейных систем выявлена некоторая специфика рассматриваемых свойств устойчивости (теоремы 2, 3 и 4) и указаны особенности, характеризующие связи этих свойств с показателями Перрона и Ляпунова (теоремы 5 и 6);

в) установлено, что классы линейных приближений, пригодных для исследования перроновской и ляпуновской устойчивости и асимптотической устойчивости по первому приближению, полностью совпадают друг с другом (теорема 7), однако ни для каких других классов линейных приближений никаких совпадений подобного рода уже не наблюдается (теоремы 8 и 9).

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРРОНУ И ПО ЛЯПУНОВУ

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times G, \qquad (1)$$

где $\mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty)$ — временна́я полуось, G — фазовая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, обязательно содержащая точку ноль, а правая часть $f(t,x)$ (допускающая нулевое решение) удовлетворяет условиям $f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G)$. Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f)$ — его подмножество, задаваемое начальным условием $|x(0)| < \delta$. Дадим основное

Определение 1. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение) обладает следующим перроновским свойством устойчивости:

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: igniserg@gmail.com

1) устойчивость по Перрону, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varlimsup_{t\to\infty} |x(t)| < \varepsilon; \tag{2}$$

2) асимптотическая устойчивость по Перрону, если существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varlimsup_{t\to\infty} |x(t)| = 0; \tag{3}$$

3) неустойчивость по Перрону, если она не устойчива по Перрону, т.е. если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2) (и в частности, определено не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$);

4) полная неустойчивость по Перрону, если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что ни одно из решений $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2).

Замечание 1. Каждое из чётырех перроновских свойств устойчивости, данных в определении 1:

а) носит локальный характер, т.е. зависит от поведения только тех решений, которые начинаются вблизи нуля;

б) характеризует поведение решений с точки зрения их сколь угодно позднего сближения с нулевым решением или, наоборот, окончательного удаления от него;

в) стандартным образом (сдвигом начала координат) распространяется с нулевого решения на любое другое, причём не только на неподвижную точку (упомянутый сдвиг может зависеть от времени).

Для сравнения введённых выше понятий с классическими ляпуновскими свойствами устойчивости напомним [6, гл. II, §1] следующее

Определение 2. Каждому из четырёх перроновских свойств устойчивости, введённых в определении 1, поставим в соответствие его ляпуновский аналог:

1) устойчивость, неустойчивость и полная неустойчивость (последний термин не является общепринятым) по Ляпунову получаются заменой требования (2) в первом, третьем и соответственно четвёртом пунктах определения 1 требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| < \varepsilon;$$

2) асимптотическая устойчивость по Ляпунову получается заменой требования (3) во втором пункте определения 1 требованием

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0, \tag{4}$$

правда, при дополнительном условии устойчивости по Ляпунову.

Замечание 2. Между введёнными в определениях 1 и 2 свойствами устойчивости действуют следующие естественные логические связи:

а) система (1) либо устойчива (по Перрону или соответственно по Ляпунову), либо неустойчива, если же она асимптотически устойчива, то и устойчива, а если вполне неустойчива, то и неустойчива;

б) если система (1) устойчива (асимптотически) по Ляпунову, то она устойчива (соответственно асимптотически) и по Перрону, а если неустойчива (вполне) по Перрону, то неустойчива (соответственно вполне) и по Ляпунову.

Замечание 3. Все ляпуновские свойства устойчивости из определения 2, а также свойства неустойчивости и полной неустойчивости по Перрону из определения 1 инвариантны относительно операции сужения системы (точнее, её правой части) на меньшую фазовую область.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейные системы вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \quad (G \equiv \mathbb{R}^n),$$

задаваемые каждая своей непрерывной функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (в случае её ограниченности называем ограниченной также и саму систему). Будем обозначать через $\mathcal{S}_A^\delta$ множество решений x системы (5), удовлетворяющих начальному условию $|x(0)| = \delta$.

Приведённый в замечании 2 список естественных логических связей оказывается исчерпывающим, о чём и говорит

Теорема 1. *Любое сочетание каких-либо перроновских и ляпуновских свойств устойчивости, логически не противоречащее замечанию* 2, *реализуется на некоторой ограниченной линейной системе* (5).

В противовес замечанию 3, устойчивость (даже асимптотическая) по Перрону при сужении фазовой области системы может обернуться неустойчивостью (даже полной) по Перрону, как показывает

Теорема 2. *Существует асимптотически устойчивая по Перрону ограниченная линейная система* (5) *с фазовой областью $\mathbb{R}^n$, сужение которой на любую ограниченную фазовую область $G \subset \mathbb{R}^n$ приводит к полной неустойчивости по Перрону.*

Каждое из перроновских свойств устойчивости для линейной системы полностью определяется свойствами решений, начинающихся на некоторой (например, единичной) сфере, что и утверждает

Теорема 3. *Для любой линейной системы* (5) *устойчивость* (*неустойчивость*) *по Перрону равносильна выполнению* (*соответственно невыполнению*) *требования*

$$\sup_{x\in\mathcal{S}_A^1}\varliminf_{t\to\infty}|x(t)|<\infty,$$

а асимптотическая устойчивость и полная неустойчивость по Перрону равносильны выполнению для любого решения $x\in\mathcal{S}_A^1$ требований (3) *и соответственно*

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)|=\infty. \tag{6}$$

Замечание 4. В простейшем случае линейной автономной системы исследование на устойчивость и по Перрону, и по Ляпунову приводит к совершенно одинаковому результату (см. [6, гл. II, §8]).

Утверждение из замечания 4 не переносится с автономных линейных систем на чуть более широкий класс линейных систем — правильных по Ляпунову [6, гл. III, §11], что и подтверждает

Теорема 4. *Существует правильная ограниченная линейная система* (5), *асимптотически устойчивая по Перрону, но вполне неустойчивая по Ляпунову.*

ПОКАЗАТЕЛИ ПЕРРОНА И ЛЯПУНОВА

Особую роль в исследовании на устойчивость играют характеристические показатели решений — верхний [5, гл. I] и нижний [2, §2], которым посвящено

Определение 3. Назовём показателями Ляпунова и Перрона решения $x\in\mathcal{S}_*(f)$ системы (1) соответственно величины

$$\lambda(x)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)| \quad \text{и} \quad \pi(x)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)|. \tag{7}$$

Замечание 5. Для показателей (7) любого решения $x\in\mathcal{S}_*(f)$ справедливо неравенство $\lambda(x)\ge\pi(x)$, а кроме того:

а) неравенства $\pi(x)<0$ и $\lambda(x)<0$ влекут за собой соответственно требования (3) и (4), поэтому если для некоторого $\delta>0$ показатели Перрона (Ляпунова) всех решений $x\in\mathcal{S}_\delta(f)$ системы (1) отрицательны, то она асимптотически устойчива по Перрону (соответственно по Ляпунову, но при условии её устойчивости по Ляпунову);

б) неравенства $\pi(x)>0$ и $\lambda(x)>0$ влекут за собой требования (6) или соответственно

$$\varlimsup_{t\to\infty}|x(t)|=\infty,$$

поэтому если для некоторого $\delta>0$ показатели Перрона (Ляпунова) всех решений $x\in\mathcal{S}_\delta(f)$ системы (1) положительны, то она вполне неустойчива по Перрону (соответственно по Ляпунову).

Теорему 1 несколько дополняет

Теорема 5. *Существует ограниченная линейная система* (5), *вполне неустойчивая по Ляпунову и даже с положительными показателями Ляпунова* (*всех ненулевых решений*), *но асимптотически устойчивая по Перрону и даже с отрицательными показателями Перрона.*

Замечание 6. Выполнение требования (4) для всех решений линейной системы, образующих её фундаментальную систему, является достаточным для асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Утверждения, аналогичные сделанному в замечании 6, но относящиеся к асимптотической устойчивости по Перрону и к полной неустойчивости по Перрону или Ляпунову, будут уже не верны, что и подтверждает

Теорема 6. *Существует ограниченная линейная система* (5) *с отрицательными* (*положительными*) *показателями Перрона всех решений из некоторой фундаментальной системы, которая однако не является устойчивой по Перрону* (*соответственно не является вполне неустойчивой по Перрону и даже по Ляпунову*).

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Пусть теперь система (1) представлена в виде

$$\dot{x}=A(t)x+h(t,x)\equiv f(t,x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times G, \tag{8}$$

с оператор-функцией

$$A(t)\equiv f'_x(t,0)\in\operatorname{End}\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{9}$$

и равномерно (по времени) малой нелинейностью

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|h(t,x)|=o(x),\quad x\to 0. \tag{10}$$

Определение 4. Если для системы (8) выполнены условия (9) и (10), то правую часть соответствующей ей линейной системы (5) назовём **линейным (первым) приближением**, а саму систему (7) — **системой первого приближения**. Скажем, что данное линейное приближение (или сама линейная система) **обеспечивает** заданное перроновское или ляпуновское свойство устойчивости (из определения 1 или 2), если им обладает всякая система (8) с этим линейным приближением.

Исследованию асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть первого метода Ляпунова, посвящено огромное число работ (см. [2, §11]).

Замечание 7. При исследовании свойств устойчивости по первому приближению условие именно равномерной (а не поточечной) малости (10) оказывается существенным: если его в определении 4 просто отбросить, то никакое линейное приближение не сможет обеспечить ни одного из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости.

И устойчивость, и асимптотическая устойчивость, и по Перрону, и по Ляпунову — все эти свойства сразу, равно как и каждое из них в отдельности, обеспечиваются в точности одними и теми же линейными приближениями, о чём и говорит

Теорема 7. *Если линейное приближение обеспечивает хотя бы одно из следующих четырёх свойств:*

1) *устойчивость по Перрону,*

2) *устойчивость по Ляпунову,*

3) *асимптотическую устойчивость по Перрону,*

4) *асимптотическую устойчивость по Ляпунову,*

то оно обеспечивает и все остальные свойства.

Аналогичного совпадения для множеств линейных приближений, обеспечивающих неустойчивость (пусть даже и полную) по Перрону и по Ляпунову, ожидать не приходится, несмотря на действующее между ними включение (замечание 2), так как верна

Теорема 8. *Существует асимптотически устойчивая по Перрону ограниченная линейная система* (5), *обеспечивающая полную неустойчивость по Ляпунову.*

Не совпадают также и множества линейных приближений, обеспечивающих неустойчивость и полную неустойчивость, как показывает

Теорема 9. *Существует линейное приближение, которое обеспечивает неустойчивость и по Ляпунову, и по Перрону, но не обеспечивает полной неустойчивости ни по Ляпунову, ни по Перрону.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perron O.* Die Ordnungszahlen Linearer Differentialglei Chungssysteme // Math. Z. 1930. Bd 31. P. 748–766.
2. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
3. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

PERRON STABILITY AND ITS STUDY AT THE FIRST APPROXIMATION

I. N. Sergeev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov December 29, 2018

Received January 23, 2019

Natural concepts of Perron stability, asymptotic stability, and complete instability of the trivial solution to a differential system are introduced. Their features and relationships with Perron exponents and similar Lyapunov ones are indicated. An absolute and unique coincidence of research opportunities for Perron and Lyapunov stability and asymptotic stability at the first approximation is found.

Keywords: differential system, stability theory, Lyapunov exponents, Perron exponents, first approximation.