ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 1, с. 24–29

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ ШИРОКО ПОНИМАЕМЫХ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ

Член-корреспондент РАН А. Г. Ченцов

Поступило 11.04.2018 г.

Исследуются ультрафильтры (максимальные фильтры) пространства, измеримая структура которого задаётся семейством множеств, замкнутым относительно конечных пересечений и содержащим пустое и объемлющее множество (единицу пространства). Получены необходимые и достаточные условия максимальности фильтров упомянутого пространства, формулируемые в терминах множеств — элементов двойственного семейства, именуемых квазиокрестностями. Эти условия согласуются с известными в теории пространств Стоуна, но охватывают целый ряд других случаев, касающихся, в частности, оснащения исходного множества топологией (случай открытых ультрафильтров) и семейством замкнутых множеств топологического пространства (т.е. замкнутой топологией в смысле П.С. Александрова). Определяющую роль в этих построениях играет топология на пространстве ультрафильтров, определяемая по аналогии со случаем пространства Стоуна. Рассматривается также оснащение упомянутого пространства топологией, допускающей идейную аналогию с используемой при построении расширения Волмэна. В результате реализуется битопологическое пространство (БТП) со сравнимыми топологиями, одна из которых хаусдорфова, а другая реализует компактное T_1-пространство. Указаны условия, обеспечивающие совпадение топологий и как следствие реализацию (нульмерного) компакта, а также условия, при которых упомянутые топологии различаются, определяя невырожденное БТП. В случае, когда семейство множеств, задающее измеримую структуру, обладает свойством отделимости, установлено, что исходное объемлющее множество допускает погружение в упомянутое БТП в виде всюду плотного подмножества.

Ключевые слова: битопологическое пространство, квазиокрестность, расширение, ультрафильтр.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652486124-29

Рассматриваются фильтры и ультрафильтры (максимальные фильтры) на π-системе с “нулём” и “единицей”, т.е. на π-системе, содержащей объёмлющее и пустое множества (здесь π-система — суть непустое семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Исследуются характеристические свойства ультрафильтров, получаемые на основе специальных представлений для баз двух характерных топологий, связываемых идейно с построением расширения Волмэна и компактов Стоуна. Введена топология волмэновского типа на множестве ультрафильтров произвольной π-системы с “нулём” и “единицей”. При этом исходное множество превращается в компактное T_1-пространство, элементами которого являются ультрафильтры упомянутой π-системы. При оснащении же получающегося множества ультрафильтров двумя топологиями, по смыслу “стоуновской” и “волмэновской”, получается битопологическое пространство со сравнимыми топологиями, для которого указываются условия вырожденности (в смысле совпадения упомянутых топологий) и невырожденности. Исходное множество погружается в упомянутое битопологическое пространство в виде всюду плотного подмножества. Получающаяся конструкция ориентирована на применение в расширениях абстракных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (имеется в виду возможное использование ультрафильтров в качестве обобщённых элементов).

1. В связи с применением ультрафильтров (УФ) в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости (см. [1–3] и др.) стали возникать вопросы, связанные со структурой самих УФ на нестандартных измеримых пространствах (ИП). Такие УФ в ряде случаев допускают исчерпывающее описание (см. [1]), в отличие от УФ-семейства всех подмно-

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

E-mail: chentsov@imm.uran.ru

жеств (ПМ) соответствующего множества (играющего роль "единицы"), если последнее не является конечным. Объединяющей разные классы таких (широко понимаемых) ИП структурой стала (см. [1–3]) π-система, [4, с. 14] с "нулём" и "единицей". Частными случаями таких π-систем являются алгебры и полуалгебры множеств, топологии, семейства замкнутых множеств в топологических пространствах (ТП). Соответственно, возникают УФ на алгебрах множеств (условно, измеримые УФ, широко используемые при построении пространств Стоуна), открытые УФ (см. [5]), т.е. УФ на топологиях, замкнутые УФ (т.е. УФ, составленные из замкнутых множеств и используемые при построении расширения Волмэна). Конструкции на основе π-систем могут, следовательно, служить единой основой для соответствующих построений в упомянутых частных случаях.

С точки зрения вышеупомянутого применения УФ в конструкциях расширений наиболее существенными представляются следующие два момента: условия компактности ТП, элементами которых являются УФ, и возможность погружения исходного множества обычных решений в упомянутое пространство в виде всюду плотного ПМ. Эти вопросы рассматриваются в сообщении наряду с изучением структуры самих УФ, что представляет самостоятельный интерес (в частности, имеются в виду свойства, исчерпывающим образом характеризующие УФ в классе всевозможных фильтров соответствующей π-системы).

2. Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки); ϕ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу "по определению". Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Произвольному объекту x сопоставляем синглетон $\{x\}$, содержащий x (итак, $x \in \{x\}$), а упорядоченной паре z (итак, $z = (a, b)$, где a и b — объекты) — первый и второй ее элементы $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ соответственно, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех ПМ H; полагаем, что $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\phi\}$ (семейство всех непустых ПМ H), а $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Для непустого семейства $\mathcal{A}$ и множества B в виде $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ имеем след $\mathcal{A}$ на множество B. Если $\mathbb{M}$ — множество, а $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть семейство ПМ $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то

$$\begin{gathered}\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\},\\ \{\cap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\};\end{gathered} \tag{1}$$

получили два непустых семейства ПМ объединения всех множеств из $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \subset \{\cup\}(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X} \subset \{\cap\}(\mathfrak{X})$. Если $\mathbb{X}$ — непустое множество, то полагаем, что

$$\begin{gathered}(\mathrm{BAS})[\mathbb{X}] \triangleq \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X})) \mid (\mathbb{X} = \bigcup_{B \in \beta} B)\,\&\\ \&(\forall B_1 \in \beta\ \forall B_2 \in \beta\ \forall x \in B_1 \cap B_2\\ \exists B_3 \in \beta\colon (x \in B_3)\,\&\,(B_3 \subset B_1 \cap B_2)\};\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbb{X}] \triangleq \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X})) \mid (\mathbb{X} \in \beta)\,\&\\ \&(\bigcap_{B \in \beta} B = \phi)\,\&\,(\forall B_1 \in \beta\ \forall B_2 \in \beta\ \forall x \in \mathbb{X} \setminus (B_1 \cup B_2)\\ \exists B_3 \in \beta\colon (B_1 \cup B_2 \subset B_3)\,\&\,(x \notin B_3))\},\end{gathered} \tag{3}$$

$(\mathrm{top})[\mathbb{X}]$ — семейство всех топологий на $\mathbb{X}$ и $(\mathrm{clos})[\mathbb{X}] \triangleq \{\mathbf{C}_{\mathbb{X}}[\tau] \colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}]\}$. В (2) и (3) введены соответственно семейства открытых и замкнутых баз на $\mathbb{X}$; ясно, что (см. (1), (2)) $\{\cup\}(\mathfrak{B}) \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}]$ при $\mathfrak{B} \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{X}]$, а также $\{\cap\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{clos})[\mathbb{X}]$ при $\mathcal{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbb{X}]$ ($(\mathrm{top})[\mathbb{X}]$ и $(\mathrm{clos})[\mathbb{X}]$ находятся в естественной двойственности). Если $\mathcal{H}$ — семейство и S — множество, то

$$[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\};$$

если же $\mathcal{H} \in (\mathrm{top})[\mathbb{H}]$, где $\mathbb{H}$ — множество, а $S \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$, то $[\mathcal{H}](S)$ — семейство всех открытых окрестностей S в ТП $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$. Для всяких ТП (X, τ) и множества $Y \in \mathcal{P}(X)$ полагаем, что $\mathrm{cl}(Y, \tau)$ есть def замыкание Y в ТП (X, τ), а $(\tau - \mathrm{Int})[Y]$ — внутренность Y в смысле (X, τ).

Специальные семейства. В настоящем пункте фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Элементы семейства

$$\begin{gathered}\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\phi \in \mathcal{I})\,\&\,(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\,\&\\ \&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\}\end{gathered} \tag{4}$$

суть π-системы ПМ $\mathbf{I}$ с "нулём" и "единицей". В виде

$$\begin{gathered}\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}:\\ (x \in \Lambda)\,\&\,(\Lambda \cap L = \phi)\}\end{gathered}$$

имеем семейство всех отделимых π-систем упомянутого типа. Отметим, что алгебры ПМ $\mathbf{I}$ — суть π-системы: $(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\}$. При $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$ и $L \in \mathcal{I}$ в виде $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)$ имеем непустое семейство ПМ $\mathbf{I}$; множества — элементы этого семейства — будем называть квазиокрестностями L; определено пересечение всех квазиокрестностей L. Тогда

$$\pi^{\natural}[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]\ \forall L \in \mathcal{I}\} = $$
$$= \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \exists \Lambda_0 \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L): \Lambda_0 \subset \Lambda\ \forall \Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)\} \quad (5)$$

есть семейство всех π-систем с наименьшими (по включению) квазиокрестностями всех своих множеств.

3. Далее фиксируем, если не оговорено противное, непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L} \setminus \{\phi\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \,\&\, (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{L}\ (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F})\}, \quad (6)$$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \quad (7)$$

имеем соответственно множества всех фильтров и всех УФ широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$; $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \phi$. При $x \in E$ в виде

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$$

имеем тривиальный (фиксированный) фильтр, соответствующий x. Известно, [6, (5.9)], что

$$((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall x \in E) \Leftrightarrow (\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]).$$

Пусть $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\}\ \forall L \in \mathcal{L}$. Тогда $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и, в частности, имеем базу открытых множеств: $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Топология $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}])$ порождает нульмерное [7, 6.2] T_2-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]); \quad (8)$$

множества вышеупомянутой базы открыто-замкнуты:

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \quad (9)$$

(если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (8) — нульмерный компакт (компактное T_2-пространство), а (9) превращается в равенство).

Пусть $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} : U \subset H\}$ $\forall H \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

При этом

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L)\ \forall L \in \mathcal{L}.$$

Как следствие $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$, причём $\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] = \{\cap\}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])$. В итоге

$$\mathbf{F} = \bigcap_{\mathbb{F} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]](\mathbf{F})} \mathbb{F}\quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]. \quad (10)$$

Из (9), (10) следует, в частности, что имеет место свойство

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \bigcap_{\mathbb{F} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]](\Phi_{\mathcal{L}}(L))} \mathbb{F}\quad \forall L \in \mathcal{L}. \quad (11)$$

Заметим, что при $L \in \mathcal{L}$ $[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и определено пересечение всех множеств из $[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)$.

Предложение 1. *Если* $L \in \mathcal{L}$ *и* $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, *то* $(L \subset \Lambda) \Leftrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda])$.

Следствие 1. *При* $L \in \mathcal{L}$ *справедливо равенство*

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]](\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda] : \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)\}.$$

Следствие 2. *Если* $L \in \mathcal{L}$, *то множество* $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ *допускает представление*

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda].$$

Предложение 2. *Если* $L \in \mathcal{L}$, *то справедливо равенство*

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda].$$

Замечание 1. В связи с предложением 2 дополним предложение 1: при $L \in \mathcal{L}$ и $H \in \mathcal{P}(E)$ имеем импликацию $(L \subset H) \Rightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H])$. Легко видеть, что зависимость $H \mapsto \mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H] : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ изотонна.

Замечание 2. Пусть топология $\tau\in(\mathrm{top})[E]$ такова, что (E,τ) есть T_1-пространство. Тогда $\mathbf{C}_E[\tau]\in\tilde{\pi}^0[E]$ и при этом $\forall\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])\,\forall F\in\mathbf{C}_E[\tau]$

$$(F\in\mathcal{U})\vee(E\setminus(\tau-\mathrm{Int})[F]\in\mathcal{U});$$

отметим также, что $\forall\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])\,\forall G\in\tau$

$$(\mathrm{cl}(G,\tau)\in\mathcal{U})\vee(E\setminus G\in\mathcal{U}).$$

4. Рассмотрим естественное развитие положений замечания 2, базирующееся на предложении 1 и конструкциях с использованием квазиокрестностей. С учётом следствия 2 получаем в общем случае $\mathcal{L}\in\pi[E]$ положение, характеризующее УФ π-системы общего вида в терминах упомянутых квазиокрестностей.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L})\,|\,\forall L\in\mathcal{L}$$
$$(L\in\mathcal{U})\vee(\exists\Lambda\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L):E\setminus\Lambda\in\mathcal{U})\}.$$

До конца настоящего раздела полагаем, что $\mathcal{L}\in\pi^\natural[E]$. Тогда согласно (5) при $L\in\mathcal{L}$ в виде

$$\bigcap_{\Lambda\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)}\Lambda\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)$$

имеем наименьшую квазиокрестность множества L.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L})\,|\,\forall L\in\mathcal{L}$$
$$(L\in\mathcal{U})\vee(E\setminus(\bigcap_{\Lambda\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)}\Lambda)\in\mathcal{U})\}.$$

5. Отметим два важных частных случая π-систем из множества $\pi^\natural[E]$: вполне очевидно следующее

Предложение 3. *Справедливы свойства* $(\mathrm{alg})[E]\subset\pi^\natural[E]$ *и* $(\mathrm{top})[E]\subset\pi^\natural[E]$.

Первое (в предложении 3) свойство следует из того, что $\mathbf{C}_E[\mathcal{A}]=\mathcal{A}$ при $\mathcal{A}\in(\mathrm{alg})[E]$, а второе использует свойства замкнутых множеств в ТП. При этом, конечно,

$$\bigcap_{\Lambda\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{A}]](A)}\Lambda=A\quad\forall\mathcal{A}\in(\mathrm{alg})[E]\,\forall A\in\mathcal{A}.\qquad(12)$$

С другой стороны, имеет место хорошо известное представление

$$\bigcap_{\Lambda\in[\mathbf{C}_E[\tau]](G)}\Lambda=\mathrm{cl}(G,\tau)\quad\forall\tau\in(\mathrm{top})[E]\,\forall G\in\tau.\qquad(13)$$

Из теоремы 2 и (12) получаем известное характеристическое свойство УФ алгебры множеств: $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{A})\,|\,\forall A\in\mathcal{A}\ \ (A\in\mathcal{U})\vee(E\setminus A\in\mathcal{U})\}$ $\forall\mathcal{A}\in(\mathrm{alg})[E]$. В свою очередь, комбинируя теорему 2 и (13), получаем аналогичное свойство открытых УФ:

$$\mathbb{F}_0^*(\tau)=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*(\tau)\,|\,\forall G\in\tau$$
$$(G\in\mathcal{U})\vee(E\setminus\mathrm{cl}(G,\tau)\in\mathcal{U})\}\,\forall\tau\in(\mathrm{top})[E].$$

6. В настоящем разделе фиксируем произвольную топологию $\tau\in(\mathrm{top})[E]$ и рассматриваем π-систему замкнутых множеств в ТП (E,τ): $\mathbf{C}_E[\tau]\in\pi[E]$. Рассмотрим представление множества $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])$ (т.е. представление множества всех замкнутых УФ в ТП (E,τ)).

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*(\mathbf{C}_E[\tau])\,|\,\forall F\in\mathbf{C}_E[\tau]$$
$$(F\in\mathcal{U})\vee(\exists G\in[\tau](F):E\setminus G\in\mathcal{U})\}.$$

Утверждение теоремы следует из теоремы 1 с учётом равенства $\mathbf{C}_E[\mathbf{C}_E[\tau]]=\tau$. Итак, замкнутый фильтр максимален тогда и только тогда, когда при выборе любого замкнутого множества в ТП либо оно само, либо дополнение некоторой его окрестности является элементом данного фильтра.

7. Обсудим в дальнейшем оснащение множества УФ π-системы топологией волмэновского типа. Для этого рассмотрим сначала некоторые вопросы, касающиеся взаимосвязей пространств УФ, определённых на сравнимых (по включению) π-системах. Следуя [8, (2.4.1)], полагаем при $\mathcal{A}\in\pi[E]$, что $\pi_0[E;\mathcal{A}]\overset{\Delta}{=}\{\mathcal{B}\in\pi[E]\,|\,\mathcal{B}\subset\mathcal{A}\}$. Из общих свойств [8, раздел 2.4] сейчас отметим только, что (см. [8, предложение 2.4.1]) при $\mathcal{A}\in\pi[E],\mathcal{B}\in\pi_0[E;\mathcal{A}]$ и $\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{B})$

$$\exists\mathfrak{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}):\ \mathcal{U}=\mathfrak{U}\cap\mathcal{B}.\qquad(14)$$

В виде $(\mathrm{LAT})_0[E]\overset{\Delta}{=}\{\mathfrak{L}\in\pi[E]\,|\,A\cup B\in\mathfrak{L}\ \ \forall A\in\mathfrak{L}\ \forall B\in\mathfrak{L}\}$ имеем семейство всех решёток ПМ E с “нулем” и “единицей” (решёточность понимается в смысле упорядоченности по включению); если $\mathcal{M}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то семейство

$$(\mathrm{LAT})_0[E\,|\,\mathcal{M}]\overset{\Delta}{=}\{\mathfrak{L}\in(\mathrm{LAT})_0[E]\,|\,\mathcal{M}\subset\mathfrak{L}\}\in$$
$$\in\mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[E])$$

обладает наименьшим (по включению) элементом в виде решётки, порождённой семейством $\mathcal{M}$. В качестве $\mathcal{M}$ может использоваться π-система.

Фиксируем до конца настоящего раздела π-систему $\mathcal{E}\in\pi[E]$ и обозначаем через $\mathfrak{E}$ решётку ПМ E, порождённую π-системой $\mathcal{E}$; в частности, $\mathfrak{E} \in (\mathrm{LAT})_0[E|\mathcal{E}]$ (точнее, $\mathfrak{E}$ есть пересечение всех решёток $\mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E|\mathcal{E}]$). Легко видеть, что

$$\mathfrak{E} = \left\{ \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}) \right\}; \tag{15}$$

итак, $\mathfrak{E}$ есть семейство всех конечных объединений множеств из $\mathcal{E}$. В частности, $\mathfrak{E} \in \pi[E]$ и $\mathcal{E} \in \pi_0[E;\mathfrak{E}]$.

Теорема 4. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{E} : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E})\}$.

При доказательстве, наряду с (14), учитываем свойство, следующее из решёточности семейства (15): при $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{E})$

$$\bigcup_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma \in \mathfrak{E} : \ \Phi_{\mathfrak{E}}(\bigcup_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma) = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Phi_{\mathfrak{E}}(\Sigma).$$

Пусть $\Psi : \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E}) \to \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ таково, что (см. теорему 4) $\Psi(\mathcal{U}) \overset{\Delta}{=} \mathcal{U} \cap \mathcal{E} \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E})$; ясно, что Ψ — сюръекция $\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. Введём в рассмотрение две топологии волмэновского типа. Так, в силу решёточности семейства (15) $(\mathbb{UF})[E;\mathfrak{E}] \in (\mathrm{cl-BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E})]$ и

$$\mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^0[E] \overset{\Delta}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E})}[\{\cap\}((\mathbb{UF})[E;\mathfrak{E}])] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E})] \tag{16}$$

(см. [9, раздел 6]; отметим также несколько иные построения [10, гл.II, §5]). В виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E}), \mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^0[E]) \tag{17}$$

имеем [9, раздел 6] компактное T_1-пространство. При построении топологии волмэновского типа на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ возникает особенность, связанная с тем, что семейство $\mathcal{E}$ не является, вообще говоря, решёткой. Однако

$$(\mathfrak{UF})[E;\mathcal{E}] \overset{\Delta}{=} \{\bigcup_{\mathbb{S} \in \mathfrak{K}} \mathbb{S} : \mathfrak{K} \in \mathrm{Fin}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}])\} \in \\ \in (\mathrm{cl-BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})], \tag{18}$$

$\{\cap\}((\mathfrak{UF})[E;\mathcal{E}]) \in (\mathrm{clos})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$ и, как следствие,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle \overset{\Delta}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}[\{\cap\}((\mathfrak{UF})[E;\mathcal{E}])] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$$

есть нужная топология волмэновского типа. Итак, получили ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle), \tag{19}$$

причём $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]$. Триплет $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])$ рассматриваем как битопологическое пространство (БТП); в связи с исследованием БТП отметим монографию [11]. При этом, как легко видеть,

$$\Psi^{-1}(\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma)) = \Phi_{\mathfrak{E}}(\Sigma) \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

Как следствие получаем (см. (18)), что $\Psi^{-1}(\mathbb{B}) \in (\mathbb{UF})[E;\mathfrak{E}] \ \forall \mathbb{B} \in (\mathfrak{UF})[E;\mathcal{E}]$. Теперь уже очевидно

Предложение 4. *Если* $\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle]$, *то* $\Psi^{-1}(\mathbf{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{E})}[\mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^0[E]]$.

Следствие 3. *Отображение* Ψ *непрерывно в смысле* ТП (17) *и* (19).

Теорема 5. *Посредством* (19) *реализуется компактное* T_1*-пространство.*

8. Полагаем в настоящем разделе, если только не оговорено противное, что $\mathcal{E} \in \pi^{\natural}[E]$ (итак, $\mathcal{E}$ есть π-система, имеющая наименьшие квазиокрестности всех своих множеств). С учётом предложения 2 устанавливается.

Теорема 6. *Справедливо равенство* $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]$.

Таким образом, в рассматриваемом здесь случае БТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])$ оказывается вырожденным в смысле совпадения своих топологий. С учётом теоремы 5 и положений раздела 3 относительно ТП (8) получаем, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]) \tag{20}$$

есть нульмерный компакт. С учетом предложения 3 получаем два важных частных случая: $\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mathcal{E} \in (\mathrm{top})[E]$; в каждом из этих случаев реализуется (20). Данные свойства отмечены в [12] (равенство (20) при $\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]$ указано в [9]; аналогичное равенство при $\mathcal{E} \in (\mathrm{top})[E]$ получено в [13]).

Замечание 3. В настоящем замечании свойство $\mathcal{E} \in \pi^{\natural}[E]$ выполненным не предполагается. Пусть $\mathcal{E} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, причём (E, τ) есть T_1-пространство (см. замечание 2). Тогда, [12, раздел 8]

$$(\tau \neq \mathcal{P}(E)) \Rightarrow (\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle \neq \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]).$$

Итак, если исходное T_1-пространство не является дискретным, то вышеупомянутое БТП не вырождено.

9. В настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{E} \in \tilde{\pi}^0[E]$ ($\mathcal{E}$ — произвольная отделимая π-система). Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$ и $\mathbb{S} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}))$, то $\mathrm{cl}(\mathbb{S}, \tau)$ есть def замыкание $\mathbb{S}$ в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \tau)$. В виде

$$(\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]\overset{\Delta}{=}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[x])_{x\in E}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})^E \qquad (21)$$

имеем (см. раздел 3) оператор, реализующий погружение E в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. При $A\in\mathcal{P}(E)$ в виде $(\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A)=\{(\mathcal{E}-\mathrm{triv})[x]:x\in A\}$ имеем образ A при действии оператора (21), причём [6, предложение 1] $\mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})\,|\,A\cap U\neq\phi\;\forall U\in\mathcal{U}\}$. Тогда $\mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])=\mathbf{\Phi}_{\mathcal{E}}(\Sigma)\;\forall\Sigma\in\mathcal{E}$.

Предложение 5. *Если* $\Sigma\in\mathcal{E}$, *то* $\mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle)=\mathbf{\Phi}_{\mathcal{E}}(\Sigma)$.

Из предложения 5 в общем случае $\mathcal{E}\in\tilde{\pi}^0[E]$ следует, что топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]$ в некотором смысле близки: $\mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle)=\mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])\;\forall\Sigma\in\mathcal{E}$. При этом, в частности, $\mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle)=\mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])=\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. Итак, E вкладывается в компактное T_1-пространство (19) в виде всюду плотного ПМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ченцов А.Г.* Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.
2. *Ченцов А.Г., Бакланов А.П.* Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИРАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
3. *Ченцов А.Г.* Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 294–309.
4. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
5. *Илиадис С.Д., Фомин С.В.* Метод центрированых систем в теории топологических пространств // УМН. 1966. Т. 21. № 4. С. 47–76.
6. *Ченцов А.Г.* Некоторые свойства ультрафильров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. В. 1. С. 87–101.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
8. *Chentsov A.G., Morina S.I.* Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
9. *Ченцов А.Г.* Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения// Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. В. 1. С. 113–142.
10. *Гретцер Г.* Общая теория решёток. М.: Мир, 1982. 452 с.
11. *Dvalishvili B.P.* Bitopological Spaces: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures, and Applications Mathematics Studies. Amsterdam: Nort-Holland, 2005. 422 p.
12. *Ченцов А.Г.* Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С.258–272.
13. *Ченцов А.Г., Пыткеев Е.Г.* Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 312–329.

SOME PROPERTIES OF ULTRAFILTERS OF WIDELY UNDERSTOOD MEASURABLE SPACES

Corresponding Member of the RAS A. G. Chentsov

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

Received April 11, 2018

Filters and ultrafilters (maximal filters) on the π-system with “zero” and “unit” are considered (here, π-system is a nonempty family of sets closed with respect to finite intersections); so, our π-system contains including and empty sets. Characteristic properties of ultrafilters obtained from special representations for bases of two typical topologies connected with construction of Wallman extension and Stone compactums are investigated. The topology of Wallman type on the ultrafilters set of arbitrary π-system with “zero” and “unit” is defined. In addition, initial set is transformed in a compact T_1-space with points in the form of ultrafilters of above-mentioned π-system. Under equipment of the resulting ultrafilter set with two topologies (by sense, Stone and Wallman topologies), bitopological space with comparable topologies is obtained; for this space, the degeneracy (in the sense of coincidence for above-mentioned topologies) and nondegeneracy conditions are indicated. The initial set is immersed in above-mentioned bitopological space as everywhere dense subset. Resulting construction is oriented on application in extensions of abstract attainability problems with constraints of asymptotic character (we keep in mind the possible application of ultrafilters as generalized elements).

Keywords: bitopological space, quasi-neighborhood, extension, ultrafilter.