ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 2, с. 147–150

МАТЕМАТИКА

УДК 512.544.33

СТЕПЕННЫЕ *MR*-ГРУППЫ: ТОЧНОЕ *R*-ПОПОЛНЕНИЕ

М. Г. Амаглобели

Представлено академиком РАН Ю.Л. Ершовым 22.05.2018 г.

Поступило 30.05.2018 г.

Работа посвящена изучению частичных *MR*-групп, которые изоморфно вкладываются в своё тензорное пополнение над кольцом *R*. Как следствие, получено описание свободных *MR*-групп и свободных *MR*-произведений на языке групповых конструкций.

Ключевые слова: линдонова *R*-группа, *MR*-группа, частичная *MR*-группа, тензорное пополнение.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524862147-150

Понятие степенной R-группы, где R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, введено Р. Линдоном в [1]. А.Г. Мясников и В.Н. Ремесленников в [2] уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. В частности, новое понятие степенной R-группы является непосредственным обобщением понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В честь А.Г. Мясникова R-группы с дополнительной аксиомой в статье М.Г. Амаглобели и В.Н. Ремесленникова [3] названы MR-группами (R — кольцо). Хорошо известна роль тензорного расширения кольца скаляров для модулей. Авторы работы [2] определили точный аналог этой конструкции для произвольной MR-группы – тензорное пополнение. Систематическое изучение MR-групп начато в работах [3–9]. Отметим, что результаты этих работ оказались весьма полезны при решении известных проблем Тарского.

Напомним основные определения и факты, следуя работам [1, 2]. Пусть $L_{gr} = \{\bullet, ^{-1}, e\}$ — групповой язык (сигнатура), где $\bullet$ — бинарная операция умножения, $^{-1}$ — унарная операция обращения, e — константный символ для единицы группы. Обогатим групповой язык L_{gr} до языка $L^*_{gr} = L_{gr} \cup \{f_\alpha(g) \mid \alpha \in R\}$, где $f_\alpha(g)$ — унарная алгебраическая операция (ниже мы используем соглашение: для краткости выражение $f_\alpha(g)$ записываем в виде g^α).

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Множество G будем называть л и н д о н о в о й R - г р у п п о й, если на нём определены операции $\bullet$, $^{-1}$, $\{f_\alpha(g) \mid \alpha \in R\}$ и выполнены аксиомы:

1) аксиомы группы;

2) для всех $g, h \in G$ и всех $\alpha, \beta \in R$ выполняются равенства

$$g^1 = g, \quad g^0 = e, \quad e^\alpha = e; \tag{1}$$

$$g^{\alpha+\beta} = g^\alpha g^\beta, \quad g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta; \tag{2}$$

$$(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h. \tag{3}$$

Существуют абелевы линдоновы R-группы, не являющиеся R-модулями (см. [10], где подробно исследована структура свободной абелевой R-группы). Авторы работы [2] добавили к аксиомам Линдона дополнительную аксиому (квазитождество):

$$\begin{gathered}(MR\text{-аксиома}) \quad \forall g, h \in G,\ \alpha \in R,\\ [g,h] = e \to (gr)^\alpha = g^\alpha h^\alpha,\end{gathered} \tag{4}$$

где $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$.

О п р е д е л е н и е 2 [2]. Группу G будем называть MR - г р у п п о й, если на G определена операция g^α для всех $g \in G$, $\alpha \in R$ и при этом выполнены аксиомы 1–4.

Пусть $\mathfrak{L}_R$ и $\mathfrak{M}_R$ — классы всех степенных R-групп по Линдону и всех MR-групп. Очевидно, что $\mathfrak{L}_R \supset \mathfrak{M}_R$. Стандартным образом вводятся понятия MR-подгруппы, MR-порождаемости, MR-нормальной подгруппы и т.д. Ясно, что этот класс является квазимногообразием в языке L^*_{gr} и в нём есть понятие свободной MR-группы, R-гомомор-

Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили, Грузия

E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

физма и т.д. Кроме того, выполнено свойство: каждая абелева MR-группа является R-модулем, и наоборот.

О п р е д е л е н и е 3 [2]. Гомоморфизм R-групп $\varphi: G\to G^*$ называется R - г о м о м о р ф и з м о м , если $\varphi(g^\alpha)=\varphi(g)^\alpha$ для любых $g\in G$, $\alpha\in R$.

Большинство естественных примеров степенных R-групп лежат в классе $\mathfrak{M}_R$. Например, свободная степенная R-группа по Линдону является MR-группой, унипотентная группа над полем K нулевой характеристики является MR-группой, произвольная про-p-группа является $M\mathbb{Z}_p$ -группой над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и т.д. (см. другие примеры в [2]).

В [2] показано, что определяющую роль при изучении степенных MR-групп играет операция тензорного пополнения. Она естественно обобщает на некоммутативный случай понятие расширения кольца скаляров для модулей.

О п р е д е л е н и е 4 [2]. Пусть G — MR-группа, $\mu: R\to S$ — гомоморфизм колец. Тогда MS-группа $G^{S,\,\mu}$ называется т е н з о р н ы м S - п о п о л н е н и е м MR-группы G, если $G^{S,\,\mu}$ удовлетворяет стедующему универсальному свойству:

1) существует R-гомоморфизм $\lambda: G\to G^{S,\,\mu}$ такой, что $\lambda(G)$ S-порождает $G^{S,\,\mu}$, т.е. $\langle\lambda(G)\rangle_S=G^{S,\mu}$;

2) для любой MS-группы H и любого R-гомоморфизма $\varphi: G\to H$, согласованного с μ (т.е. $\varphi(g^\alpha)=$ $=\varphi(g)^{\mu(\alpha)}$) существует S-гомоморфизм $\psi: G^{S,\,\mu}\to H$, делающий коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & G^{S,\mu} \arrow[dl, dashed, "\exists\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\varphi=\lambda\psi)$$

Отметим, что если G — абелева MR-группа $G^{S,\,\mu}$ тоже абелева, т.е. является S-модулем и $G^{S,\mu}\simeq G\underset{R}{\otimes} S$ — тензорное произведение R-модуля G на кольцо S. В [2] доказано, что для любой группы $G\in\mathfrak{M}_R$ и любого гомоморфизма $\mu: R\to S$ тензорное пополнение $G^{S,\,\mu}$ всегда существует и оно единственное с точностью до R-гомоморфизма. В [9] предложен конкретный способ построения тензорного пополнения, использующий технику комбинаторной теории групп. В дальнейшем гомоморфизм колец $\mu: R\to S$ будет фиксирован, и поэтому вместо $G^{S,\,\mu}$ будем писать просто G^S. В приложениях μ чаще всего будет вложением колец, но и в таком случае R-гомоморфизм $\lambda: G\to G^S$ не всегда является вложением. Одно достаточное условие такого вложения дано в [2] (предложение 11). Очевидно, что класс $\mathfrak{M}_R(\mathfrak{L}_R)$ всех степенных MR-групп (R-групп по Линдону) является категорией, в которой морфизмы — это R-гомоморфизмы групп. На языке теории категорий описанная выше операция пополнения выступает как функтор тензорного пополнения.

Многие построения в категории $\mathfrak{M}_R$ или $\mathfrak{L}_R$ удобно вести по шагам, постепенно “доопределяя степени”. Это приводит в понятию частичной R-группы.

О п р е д е л е н и е 5 [2] Группу G назовем ч а с т и ч н о й MR - г р у п п о й , если возведение в степень определено для некоторых пар (g, α), но не обязательно для всех пар; причём если определена одна часть равенства в аксиомах 1–4, то определена и другая часть, и для них выполняются аксиомы 1–4 в определении степенной MR-группы.

Класс частичных MR-групп будем обозначать через $\mathcal{P}_R$. Например, если R — подкольцо кольца S, тогда любая R-группа является частичной S-группой. Групповой гомоморфизм $\varphi: G\to H$ будем называть ч а с т и ч н ы м R - г о м о м о р ф и з м о м , если $\varphi(g^\alpha)=\varphi(g)^\alpha$ для всех пар (g, α), для которых определен элемент g^α. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{P}_R$ — надкатегория $\mathfrak{M}_R$.

Т о ч н о е R - п о п о л н е н и е . Далее будем предполагать, что кольцо R в качестве подкольца содержит кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$.

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что группа $G\in\mathcal{P}_R$ является т о ч н о й о т н о с и т е л ь н о кольца R, если каноническое отображение $\lambda: G\to G^R$ является вложением. Группа G является т о ч н о й , если она является точной относительно любого кольца, содержащего $\mathbb{Z}$.

Ниже мы сформулируем теоремы о точности достаточно широких классов групп. Здесь же мы приведём примеры не точных групп.

П р и м е р 1 . Пусть G — простая группа, содержащая неединичный элемент конечного порядка. Тогда G не точна над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Более того, $G^{\mathbb{Q}}=e$. Действительно, так как в любой $M\mathbb{Q}$ -группе нет элементов конечного порядка, G не является подгруппой в $G^{\mathbb{Q}}$. Но в таком случае гомоморфизм $\lambda: G\to G^{\mathbb{Q}}$ имеет нетривиальное ядро и простота G влечёт $\lambda(G)=e$, а $\lambda(G)$ порождает $G^{\mathbb{Q}}$. Поэтому $G^{\mathbb{Q}}=e$.

П р и м е р 2 . Пусть G — группа без кручения с неоднозначным извлечением корней. В этом случае группа $G^{\mathbb{Q}}$ есть группа с однозначным извлечением корней. Это легко следует из предложения 3 из [2]. Ясно, что такая группа G не может изоморфно вкладываться в $G^{\mathbb{Q}}$ и, следовательно, она не точная.

В категории $\mathcal{P}_R$ рассмотрим класс групп $\mathcal{P}_R^0$. По определению группа G из $\mathcal{P}_R$ принадлежит $\mathcal{P}_R^0$, если выполнены следующие условия:

1) для любой максимальной абелевой подгруппы M из G и любого $x \notin M$ пересечение $M \cap M^S = e$;

2) канонический гомоморфизм $j: M \to M \underset{R}{\otimes} R$ является вложением.

Укажем некоторые свойства групп из класса $\mathcal{P}_R^0$ и приведём примеры.

Предложение 1. *Пусть* $G \in \mathcal{P}_R^0$. *Тогда*

а) *если* M_1 *и* M_2 *— различные максимальные абелевы подгруппы из* G, *то* $M_1 \cap M_2 = e$;

б) *если* G *— без кручения, то в* G *однозначна операция извлечения корня*;

в) *отношение коммутирования на неединичных элементах является отношением эквивалентности*;

г) *централизатор любого неединичного элемента является максимальной абелевой нормальной подгруппой*;

д) *пусть* G *— без кручения и* $x^r = y^s$. *Отсюда следует, что* $[x. y] = e$;

е) *если* x *и* y *— элементы из максимальной абелевой подгруппы* M *и* x *и* y *сопряжены в* G, *то* $x = y$.

Предложение 2. *Свободное произведение* $G = *G_i$ *групп* G_i, $i \in I$, *из класса* $\mathcal{P}_R^0$ *также принадлежит классу* $\mathcal{P}_R^0$.

Приведём примеры групп из класса $\mathcal{P}_R^0$.

I. Для любого кольца $R \supseteq \mathbb{Z}$ свободные группы являются частичными *MR*-группами. Ясно, что эти группы принадлежат классу $\mathcal{P}_R^0$.

II. Обобщим предыдущий пример и рассмотрим класс групп со следующими свойствами:

1) группа G — без кручения;

2) централизатор любого неединичного элемента является бесконечной циклической подгруппой.

Тогда G принадлежит классу $\mathcal{P}_R^0$. В самом деле, максимальная абелева подгруппа M в такой группе является бесконечной циклической. Пусть $x \notin M$. Тогда если $M \cap M^x \neq e$ и $M = <y>$, то для подходящих целых r и s имеем $x^{-1}y^s x = y^r$. Обозначим $x^{-1}yx = z$, тогда $z^s = y^r$, отсюда по пункту д) предложения 1 следует, что z коммутирует с y и, следовательно, $x^{-1}yx = y^p$ подгруппа $<x, y>$. Если $|p| > 1$, то подгруппа $<x, y>$ содержит подгруппу p-ичных рациональных чисел. Последняя группа не является циклической подгруппой, что противоречит условию 2). Если $p = 1$, то x коммутирует с y — противоречие. И, наконец, если $x^{-1}yx = y^{-1}$, то $x^{-2}yx^2 = y$ — снова противоречие с пунктом д) из предложения 1.

Теорема 1 (основная). *Пусть* $\mathbb{Z}$ *— подкольцо кольца* R *и группа* $G \in \mathcal{P}_R^0$, *причём в* G *и* R^+ (*аддитивная группа кольца*) *нет элементов порядка* 2. *Тогда группа* G *точна, т.е. каноническое отображение* λ: $G \to G^R$ *является вложением*.

Замечание 1. Основная теорема даёт достаточное условие для точности тензорного R-пополнения. Отметим, что условие 1) из определения класса $\mathcal{P}_R^0$ является также необходимым. В классе $\mathcal{P}_R^0$ содержатся свободные группы. Он замкнут относительно прямых пределов, свободных произведений и расширений специального вида.

Замечание 2. Определим класс групп $\mathcal{P}_R^*$ более широкий, чем класс $\mathcal{P}_R^0$. Будем говорить, что группа $G \in \mathcal{P}_R^*$, если для любой её максимальной подгруппы M выполнено условие: M либо R-модуль, либо M удовлетворяет условиям 1) и 2) в определении класса $\mathcal{P}_R^0$. Тогда основная теорема справедлива и для групп класса $\mathcal{P}_R^*$.

Приложения к свободным конструкциям. В категории $\mathfrak{M}_R$ стандартным образом вводятся понятие свободной *MR*-группы $F_R(X)$ со свободным *MR*-порождающим множеством X и понятие свободного *MR*-произведения $\overset{*}{_R} G_i$ групп G_i, $i \in I$. В этих определениях нужно заменить гомоморфизмы на R-гомоморфизмы.

Теорема 2. *Для любых* X *и* R, *где* R *содержит кольцо целых чисел* $\mathbb{Z}$, *свободная MR-группа* $F_R(X)$ *существует и единственна с точностью до R-изоморфизма*, $F_R(X) = F(X)^R$, *где* $F(X)$ *— абсолютно свободная группа с базой* X.

Теорема 3. *Пусть* R *— кольцо, содержащее кольцо целых чисел* $\mathbb{Z}$, G_i *— некоторое множество MR-групп*, $i \in I$. *Тогда*

1) $\underset{R}{\overset{*}{}} G_i \simeq (\overset{*}{} G_i)^R$;

2) *каноническое отображение* λ: $G_i \to (*G_i)^R$ *является вложением*.

Теорема 4. *Класс* $\mathcal{P}_R^0$ *замкнут относительно свободных MR-произведений.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lyndon R.C.* Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96. P. 518–533.
2. *Мясников А.Г.*, *Ремесленников В.Н.* // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 5. С. 1106–1118.

3. *Амаглобели М.Г.*, *Ремесленников В.Н.* // ДАН. 2012. Т. 443. № 4. С. 410–413.
4. *Myasnikov A.G.*, *Remeslennikov V.N.* // Int. J. Algebra Comput. 1996. V. 6. № 6. P. 687–711.
5. *Baumslag G.*, *Myasnikov A.*, *Remeslennikov V.* // Geom. Dedicata. 2002. V. 92. P. 115–143.
6. *Амаглобели М.Г.*, *Ремесленников В.Н.* // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 1. С. 8–19.
7. *Amaglobeli M.*, *Remeslennikov V.* // Georgian Math. J. 2015. V. 22. № 4. P. 441–449.
8. *Амаглобели М.Г.*, *Ремесленников В.Н.* // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 6. С. 1107–1207.
9. *Амаглобели М.Г.* Функтор тензорного пополнения в категориях степенных *MP*-групп // Алгебра и логика 2018. Т. 57. № 2. С. 137–149.
10. *Baumslag G.* // Illinois J. Math. 1986. V. 30. № 2. P. 235–245.

EXPONENTIAL *MR*-GROUPS: FAITHFUL *R*-COMPLETION

M. G. Amaglobeli

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

Presented by Academician of the RAS Yu.L. Ershov May 22, 2018

Received May 30, 2018

The paper is devoted to partial exponential *MR*-groups which are embeddable to their tensor *MR*-completions. The free *MR*-groups and free *MR*-products are described with usual group-theoretical free contructions.

Keywords: Lyndon's *R*-groups, *MR*-groups, partial *MR*-groups, tensor completion.