ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 2, с. 151–155

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938.5

ПОНИЖЕНИЕ СТЕПЕНИ ИНТЕГРАЛОВ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ БИЛЛИАРДОВ

В. В. Ведюшкина*, академик РАН А. Т. Фоменко**

Поступило 06.12.2018 г.

В теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы широко известны интегрируемые системы, обладающие интегралами высоких степеней, а именно 3 и 4: система Ковалевской и её обобщения – система Ковалевской–Яхьи и система Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$, Горячева–Чаплыгина–Сретенского, Соколова и Дуллина–Матвеева. Показано, что помощи интегрируемых биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик, понижается степень интегралов 3 и 4 этих систем на ряде изоэнергетических 3-поверхностей. Более того, при этом интегралы степени 3 и 4 сводятся к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на биллиарде.

Ключевые слова: интегрируемая система, биллиард, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524862151-155

В теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы широко известны системы, интегрируемые при помощи интегралов больших степеней, например 3 и 4 (см. [1]). К таким системам относятся, например, знаменитые системы Ковалевской, а также её обобщения — системы Ковалевской–Яхьи и аналог системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ (здесь дополнительный интеграл имеет степень 4), Горячев–Чаплыгин–Сретенский (степень дополнительного интеграла равна 3), Дуллина–Матвеева (степень 3), а также сравнительно недавно открытый случай интегрируемости Соколова (интеграл степени 4). Эти системы характеризуются достаточно сложным поведением интегральных траекторий. Отметим, что во многих классических случаях интегрируемости дополнительный интеграл квадратичен (системы Эйлера, Якоби, Лагранжа, Жуковского, Клебша и др.). Изучение систем с интегралами степеней 3, 4 и выше обычно существенно сложнее по сравнению с интегралами степени 2. Поэтому широко известна проблема возможного понижения степеней интегралов 3 и 4. А именно, можно ли подобрать для данной системы интеграл степени 1 или 2? Оказывается, в общем случае к этому есть топологические препятствия. Опираясь на принцип Мопертюи, А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко доказали, что, например, интеграл степени 4 случая Ковалевской и интеграл степени 3 случая Горячева–Чаплыгина не сводятся к линейным и квадратичным интегралам.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

**E-mail: arinir@yandex.ru*

***E-mail: atfomenko@mail.ru*

П р е д л о ж е н и е [2, 3].

а) *Интегрируемый случай Ковалевской порождает* (*по принципу Мопертюи*) *на двумерной сфере риманову метрику, геодезический поток которой интегрируем при помощи интеграла степени* 4. *Этот интеграл не сводится к линейному или квадратичному.*

б) *Интегрируемый случай Горячева–Чаплыгина порождает* (*по принципу Мопертюи*) *на двумерной сфере риманову метрику, геодезический поток которой интегрируем при помощи интеграла степени* 3. *Этот интеграл не сводится к линейному или квадратичному.*

Этот факт был доказан в результате анализа топологии слоения Лиувилля этих интегрируемых систем на базе теории Фоменко–Цишанга [4]. Укажем вкратце схему рассуждений на примере системы Горячева–Чаплыгина. Рассматривается так называемая грубая молекула W геодезического потока метрики на сфере, порождённой данной системой по принципу Мопертюи. Этот поток траекторно эквивалентен случаю Горячева–Чаплыгина и, следовательно, имеет то же самое слоение Лиувилля на изоэнергетическом 3-многообразии. Поэтому эта молекула W совпадает с молекулой случая Горячева–Чаплыгина, вычисленной А.А. Ошемковым, см. [5]. Предположим далее, что интеграл Горячева–Чаплыгина сводится к квадратичному. В таком случае можно воспользоваться результатами, изложенными в [1, т. 2, глава 3]. Там полностью вычислены так называемые меченые молекулы W^* всех геодезических потоков на сфере, интегрируемых при помощи квадратичных и линейных интегралов. Мы видим, что интересующая нас молекула потока Горячева–Чаплыгина на сфере не совпадает ни с одной из молекул этой классификации (для степеней 1 и 2). Поскольку граф W — это лиувиллев инвариант интегрируемой системы, мы получили противоречие.

Важно подчеркнуть, что указанная теория имеет дело с гладкими слоениями Лиувилля и их гладкими послойными отображениями. Недавно был открыт новый класс интегрируемых топологических биллиардов. Такие системы реализуются как динамика материальной точки на двумерных локально-евклидовых клеточных комплексах, рёбра которых являются дугами софокусных квадрик (более подробно см. [6]). Соответствующая гамильтонова система реализуется на четырёхмерном кусочно-гладком многообразии и на трёхмерных кусочно-гладких изоэнергетических поверхностях. Соответствующее слоение Лиувилля состоит из "регулярных" кусочно-гладких двумерных торов и особых слоёв — "3-атомов". Здесь лиувиллева эквивалентность биллиардов задаётся кусочно-гладкими послойными отображениями слоений Лиувилля. Как обнаружено в работе авторов [7], топологические биллиарды во многих случаях моделируют (т.е. кусочно-гладко лиувиллево эквивалентны) важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы. Неожиданно оказывается, что при помощи интегрируемых биллиардов можно понижать степень интегралов 3 и 4 некоторых известных систем на ряде изоэнергетических 3-поверхностей. Более того, при этом интегралы степени 3 и 4 сводятся к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на биллиарде. Такая каноническая редукция (к одному и тому же интегралу) стала возможной благодаря переходу к, вообще говоря, кусочно-гладким лиувиллевым эквивалентностям.

1. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ЛИУВИЛЛЮ

Определение. Пусть (M^4, ω, H, f) и $(\tilde{M}^4, \tilde{\omega}, \tilde{H}, \tilde{f})$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M^4 и $\tilde{M}^4$. Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q^3 = (x \in M^4 \mid H(x) = c)$ и $\tilde{Q}^3 = (x \in \tilde{M}^4 \mid \tilde{H}(x) = \tilde{c})$, снабжённые слоениями Лиувилля. Интегрируемые системы $v = \mathrm{sgrad}\,H$ и $\tilde{v} = \mathrm{sgrad}\,\tilde{H}$ называются (кусочно-гладко) лиувиллево эквивалентными, если существует послойный (кусочно-гладкий) диффеоморфизм $Q^3 \to \tilde{Q}^3$, сохраняющий ориентацию 3-многообразий Q^3 и $\tilde{Q}^3$ и ориентацию всех критических окружностей.

Лиувиллева эквивалентность в общем случае означает, что для сравниваемых систем совпадают замыкания интегральных траекторий (решений системы) на всюду плотном множестве.

Многообразие Q^3 расслоено на торы и особые слои (оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоёв по граничным торам). Рассмотрим базу слоения Лиувилля на Q^3. Это одномерный граф W, называемый графом Кронрода–Риба функции $f|_{Q^3}$. Структура слоения в малой окрестности особого слоя, отвечающего вершине графа, описывается комбинаторным объектом, называемым атомом. Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко. В вершинах W расположены "атомы", описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля. Для полного описания слоения необходимо выбрать допустимые базисы на граничных торах атомов (см. [1]) и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из матриц склейки вычисляются числовые метки r, ε и n, которые, будучи расставленными на молекуле W, полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до послойной эквивалентности и не зависят от выбора допустимых базисов на граничных торах. Получающийся граф с метками называется меченой молекулой W^*, т.е. инвариантом Фоменко–Цишанга.

Теорема (А.Т. Фоменко, Х. Цишанг) [4]. *Две интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях Q^3 и $\tilde{Q}^3$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЙ БИЛЛИАРД В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДУГАМИ СОФОКУСНЫХ КВАДРИК

Софокусные квадрики — это квадрики семейства

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda), \quad 0 \le \lambda \le a. \tag{1}$$

Здесь $\infty \ge a > b > 0$ — пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик), λ — параметр, определяющий квадрику. В дальнейших рассуждениях квадрики предполагаются софокусными, причём $\infty > a > b$.

Пусть область Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$ такова, что её граница является объединением кусочно-гладких кривых, состоящих из дуг софокусных квадрик, причём в точках излома углы равны $\frac{\pi}{2}$. Тогда биллиард в области Ω (для краткости будем говорить "элементарный биллиард Ω") интегрируем. Помимо сохраняющегося при абсолютно-упругих отражениях квадрата длины вектора скорости вдоль траектории сохраняется следующая квадратичная функция:

$$\Lambda = \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 + (v_1)^2 b + (v_2)^2 a}{(v_1)^2 + (v_2)^2},$$

где пара (x_1, x_2) задаёт координаты биллиардной частицы, а пара (v_1, v_2) — координаты вектора скорости.

Данная функция имеет естественный геометрический смысл — это параметр эллипса или гиперболы, которой касаются звенья данной траектории. Более того, данные эллипсы и гиперболы принадлежат тому же софокусному семейству, что и граница биллиарда. Наличие такого дополнительного интеграла является следствием известной теоремы Якоби—Шаля [8].

Далее рассмотрим комплекс, получающийся склейкой элементарных биллиардов друг с другом вдоль общих сегментов границ. В том случае, если вдоль каждого ребра склейки склеены не более двух биллиардов-листов, то полученное многообразие называется топологическим биллиардом (см. подробнее [6]). Если же существуют рёбра склейки, вдоль которых склеено более чем два биллиарда, то полученному ребру необходимо приписать перестановку $\sigma \in S_n$, где n — число листов, склеенных вдоль такого ребра. Комплекс с приписанными перестановками называется биллиардной книжкой (см. подробнее [9]). Движение точки по такому комплексу определяется так: траектория при попадании на ребро склейки переходит с одной элементарной области на другую (согласно приписанной перестановке, если число сходящихся биллиардов-листов больше двух).

При этом полученная система оказывается интегрируемой с той же парой интегралов, что и плоский элементарный биллиард.

Полная классификация топологических биллиардов с точностью до лиувиллевой эквивалентности была сделана В.В. Ведюшкиной в работе [6]. В работе В.В. Ведюшкиной, А.Т. Фоменко и И.С. Харчевой [9] исследована топология слоения Лиувилля биллиардных книжек — показано, что подходящей биллиардной книжкой можно смоделировать произвольную 3-бифуркацию любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы (т.е. произвольный 3-атом).

3. ПОНИЖЕНИЕ СТЕПЕНИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ БИЛЛИАРДОВ

Теорема 1. *Интегрируемые системы Ковалевской* [1], *Ковалевской—Яхьи* [10], *Ковалевской на алгебре Ли* so(4) [11], *Горячева—Чаплыгина—Сретенского* [1], *Соколова* [12], *Дуллина—Матвеева* [13] *с интегралами степеней* 3 *и* 4 *моделируются* (*т.е. кусочно-гладко лиувиллево эквивалентны*) *в подходящих зонах энергии* (*т.е. на подходящих изоэнергетических* 3-*многообразиях*) *интегрируемыми биллиардами, обладающими каноническим интегралом степени* 2. *Другими словами, интегралы больших степеней сводятся к одному и тому же квадратичному интегралу*

$$\Lambda = \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 + (v_1)^2 b + (v_2)^2 a}{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

на соответствующем биллиарде. Результаты представлены на рис. 1. *В первой колонке указаны моделирующие биллиарды, во второй колонке — соответствующие инварианты Фоменко—Цишанга, задаваемые данными системами, в третьей колонке — соответствующие случаи интегрируемости* (*в скобках указаны номера инвариантов или изоэнергетических зон, используя обозначения работ* [1, 10—13]), *в четвёртой — топологический тип изоэнергетического* 3-*многообразия*.

Надо отметить, что в некоторых зонах энергии перечисленные системы иногда гладко лиувиллево эквивалентны другим системам с квадратичными интегралами. Однако эти гладкие редукции сводят интегралы больших степеней к, вообще говоря, разным интегралам степени 2. Важное отличие теоремы 1 в том, что кусочно-гладкие редукции позволяют понизить степень интегралов и свести их к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на биллиарде. А именно, к параметру софокусных квадрик, образующих границу соответствующего биллиардного стола. Иначе говоря, отличие предъявленной кусочно-гладкой редукции от гладкой редукции состоит в том, что вместо набора разных дополнительных интегралов меньшей степени мы получаем набор биллиардов с одним и тем же дополнительным интегралом степени два.

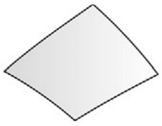
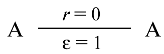
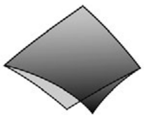
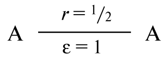
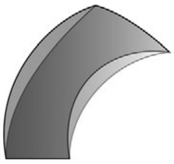
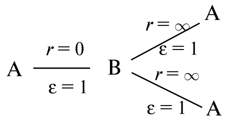
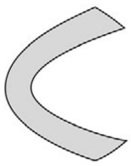
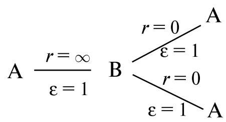
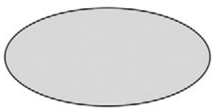
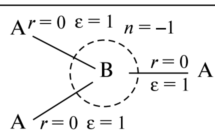
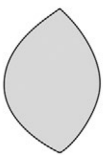
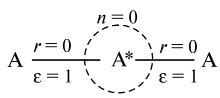
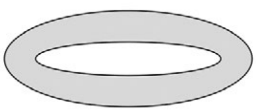
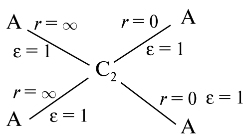
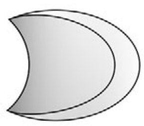
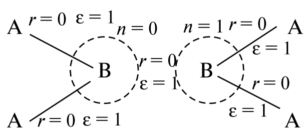
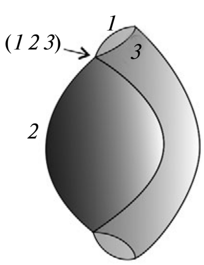
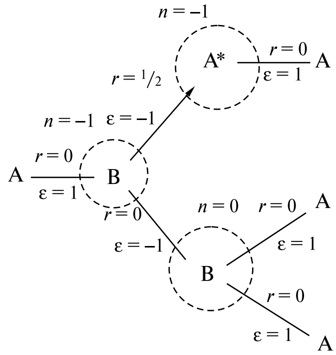
Интегрируемый биллиард	Инвариант Фоменко–Цишанга	Известные случаи интегрируемости	Тип Q^3
		Ковалевская (1), Ковалевская–Яхья (h_1), Ковалевская на *so*(4) (1, 7, 11), Дуллин–Матвеев (1), Горячев–Чаплыгин–Сретенский (1), Соколов (A)	S^3
		Дуллин–Матвеев (2)	RP^3
		Ковалевская (5), Ковалевская–Яхья (h_{16}, h_{28}), Ковалевская на *so*(4) (32), Горячев–Чаплыгин–Сретенский (4)	$S^1 \times S^2$
		Ковалевская на *so*(4) (10)	S^3
		Ковалевская–Яхья (h_{18}), Ковалевская на *so*(4) (2, 9), Соколов (B)	S^3
		Ковалевская на *so*(4) (6), Горячев–Чаплыгин–Сретенский (2)	S^3
		Соколов (I)	$S^1 \times S^2$
		Ковалевская на *so*(4) (8)	S^3
		Горячев–Чаплыгин–Сретенский (6)	$S^1 \times S^2$

Рис. 1.

Источники финансирования. Работа выполнена при поддержке программы "Ведущие научные школы" (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16–01–00378-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: РХД, 1999.
2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева–Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела. // Мат. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 139–142.
3. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Козлов В.В.* Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела // УМН, 1995. Т. 50. В. 3. С. 3–32.
4. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. 1990. Т. 54. № 3. С. 546–575.
5. *Oshemkov A.A.* Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations.// Adv. Soviet Math. 1991. V. 6. P. 67–146.
6. *Ведюшкина В.В.* Инварианты Фоменко–Цишанга топологических биллиардов // Мат. сб. 2019. Т. 3. № 3.
7. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // ДАН. 2015. Т. 465. № 2. С. 150–153.
8. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
9. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С.* Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами // ДАН. 2018. Т. 497. № 6. С. 607–610.
10. *Славина Н.С.* Классификация семейства систем Ковалевской–Яхьи с точностью до лиувиллевой эквивалентности // ДАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 252–255.
11. *Кибкало В.А.* Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли *so*(4) // Мат. сб. 2019. Т. 210. № 5. С. 3–40.
12. *Морозов П.В.* Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Киркгофа // Мат. сб. 2004. Т. 195. № 3. С. 69–114.
13. *Москвин А.Ю.* Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере // Мат. сб. 2008. Т. 199. № 3. С. 95–132.

THE REDUCTION OF THE DEGREE OF INTEGRALS OF HAMILTONIAN SYSTEMS WITH THE HELP OF BILLIARDS

V. V. Vedyushkina, Academician of the RAS A. T. Fomenko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Received December 6, 2018

In the theory of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom there are widely known integrable systems whose integrals have a high degree, namely 3 and 4: the Kovalevskaya system and its generalizations — the Kovalevskaya – Yahya system and the Kovalevskaya system on the Lie algebra *so*(4), Goryachev–Chaplygin-Sretensky, Sokolov and Dullin–Matveyev. The article shows that using integrable billiards bounded by arcs of confocal quadrics decreases the degree of integrals 3 and 4 of these systems fo some isoenergy 3-surfaces. Moreover, the integrals of degree 3 and 4 reduce to the same canonical quadratic integral on billiards.

Keywords: integrable system, billiard, Liouville equivalence, Fomenko–Zieshang invariant.