ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 2, с. 156–158

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.223

ЗАКОНЫ НУЛЯ ИЛИ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ ФОРМУЛ С k ПЕРЕМЕННЫМИ

М. Е. Жуковский[1,*], А. С. Разафимахатратра[2,]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 23.01.2019 г.

Поступило 30.01.2019 г.

Мы рассматриваем фрагмент логики первого порядка на графах, состоящий из предложений с k переменными. Мы утверждаем, что при $\alpha \le \frac{1}{k-1}$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для этого фрагмента. Более того, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\alpha \in \left(\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1} + \varepsilon\right)$, при котором случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется этому закону.

Ключевые слова: разреженный случайный граф, закон нуля или единицы, язык первого порядка, формулы с ограниченным числом переменных.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524862156-158

1. ЗАКОНЫ НУЛЯ ИЛИ ЕДИНИЦЫ

Мы рассматриваем язык первого порядка $\mathcal{L}$ [1] (под *языком* подразумевается множество предложений) с сигнатурой, состоящей из двух предикатных символов ~, =, интерпретацией которой являются конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер (предикат $x \sim y$ является истинным для вершин x, y, соединённых ребром).

На языке первого порядка можно записать, например, свойство содержать треугольник и свойство содержать изолированную вершину:

$$\exists x_1 \, \exists x_2 \, \exists x_3 \quad (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \sim x_3),$$

$$\exists x \, \forall y \quad (x \nsim y).$$

Можно показать (см., например [1]), что свойство связности нельзя записать на этом языке. Тем не менее это свойство можно записать на бесконечном языке первого порядка $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty,\omega}$ (для этого используется бесконечно много дизъюнкций или конъюнкций — см. [1, Chapter 11.1]), как мы увидим далее в этом разделе.

Будем обозначать $\mathcal{L}^k$ подмножество $\mathcal{L}$, состоящее из предложениеи с не более k переменными. Например, предложение

$$\phi = \forall x \, \forall y \quad [\neg(x = y) \wedge \neg(x \sim y)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists z \quad [z \sim x] \wedge [z \sim y])$$

принадлежит $\mathcal{L}^3$ и выражает свойство, заключающееся в том, что любые две несмежные вершины графа соединяет путь на двух рёбрах. Может показаться, что для того, чтобы записать свойство, заключающееся в том, что через любые две вершины проходит путь с большим числом рёбер, понадобится больше переменных. Но это не так: язык $\mathcal{L}^3$ гораздо выразительнее, чем кажется. Существование пути на k рёбрах можно записать следующим образом:

$$\forall x \, \forall y \quad (x = y) \vee (x \sim y) \vee (\exists z[z \sim x] \wedge [z \sim y]) \vee$$

$$(\exists z[(z \sim x) \wedge (\exists x[z \sim x] \wedge [x \sim y])]) \vee \ldots$$

Хотя связность и не выразима в $\mathcal{L}$ [2], а, следовательно, и в $\mathcal{L}^k$ ни для какого k, её можно выразить похожим образом в языке $\mathcal{L}^3_{\infty,\omega}$. Под $\mathcal{L}^k_{\infty,\omega}$ понимается подмножество $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty,\omega}$, состоящее из предложений с не более k переменными. Напомним, что $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty,\omega} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k_{\infty,\omega}$.

В работе речь пойдёт о вероятностях истинности предложений, записанных на формальных языках, для биномиального случайного графа $G(n, p)$ (под-

[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.*

[2]*University of Regina, Regina Saskatchewan, Canada*

**E-mail: zhukmax@gmail.com*

***E-mail: andriahermanana@aims.edu.gh*

робнее об этом графе и других моделях случайных графов см., например, в [2, 3]), где $p \in (0, 1)$ — некоторое не зависящее от n число. Множество вершин этого графа равно $\{1, 2, ..., n\}$, а рёбра проводятся независимо с вероятностью p каждое. Будем говорить, что случайный граф подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{F}$, если вероятность истинности каждого такого предложения стремится либо к нулю, либо к единице при $n \to \infty$. Сформулируем известные результаты о законах нуля или единицы для упомянутых языков (более подробную историю, а также о законах нуля или единицы для других языков можно прочитать, например, в [2, 4–6]).

Первый закон нуля или единицы для формальных языков был доказан Глебским, Коганом, Лиогоньким и Талановым в 1969 г. и независимо тот же результат был доказан Фагиным в 1976 г.

Теорема 1 [7, 8]. *Случайный граф $G(n, 1/2)$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}$.*

В работе [9] Спенсер заметил, что этот результат вытекает из простых комбинаторных рассуждений и легко обобщается на класс функций $p = p(n)$, удовлетворяющих условию $\min\{p, 1-p\}n^{\alpha} \to \infty$ для любого $\alpha > 0$. В 1988 г. Спенсер и Шелах в контексте законов нуля или единицы рассмотрели $p = n^{-\alpha}$ и доказали следующее.

Теорема 2 [10]. *Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

$$\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{Q},$$

$$\alpha > 2,$$

$$1 + \frac{1}{m+1} < \alpha < 1 + \frac{1}{m} \text{ для некоторого } m \geq 1.$$

В 1992 г. Колаитис и Варди [11] рассмотрели и бесконечные предложения.

Теорема 3 [11]. *Случайный граф $G(n, 1/2)$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty,\omega}$.*

Как и в конечном случае, комбинаторный подход работает для всех таких p, что $\min\{p, 1-p\}n^{\alpha} \to \infty$ для всех $\alpha > 0$.

Но в случае $p = n^{-\alpha}$ законы для конечных и бесконечных языков отличаются, как показывает следующий результат (мы здесь приводим ссылку только на статью, содержащую доказательство для случая $\alpha > 1$; случай $\alpha \leq 1$ разобран недавно Шелахом, и пока не опубликован, но доказательство доступно на arxiv.org: https://arxiv.org/pdf/1706.01226.pdf).

Теорема 4 ([12]; Shelah, 2017). *Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty,\omega}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

$$\alpha > 2,$$

$$1 + \frac{1}{m+1} < \alpha < 1 + \frac{1}{m} \text{ для некоторого } m \geq 1.$$

Итак, для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует такое k, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для $\mathcal{L}^{k}_{\infty,\omega}$. Насколько большим должно быть такое k? В 1997 г. в [13] был получен следующий результат.

Теорема 5 [13]. *При $\alpha < \frac{1}{k-1}$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для $\mathcal{L}^{k}_{\infty,\omega}$. При $k \geq 4$ случайный граф $G(n, n^{-1/(k-1)})$ не подчиняется закону нуля или единицы для $\mathcal{L}^{k}_{\infty,\omega}$, но при $k \in \{2, 3\}$ даже при $\alpha = \frac{1}{k-1}$ случайный граф $G(n, n^{-1/(k-1)})$ подчиняется закону для $\mathcal{L}^{k}_{\infty,\omega}$.*

Из теоремы 5 следует, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для $\mathcal{L}^{k}$ при $\alpha < \frac{1}{k-1}$. Верно ли это для $\alpha = \frac{1}{k-1}$ или ситуация в случае конечного языка повторяет ситуацию в случае бесконечного языка при $k \geq 4$? Нам удалось получить следующий ответ на этот вопрос.

Теорема 6. *При $k \geq 2$ случайный граф $G(n, n^{-1/(k-1)})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}^{k}$. Более того, при $k \geq 3$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\alpha \in (\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1} + \varepsilon)$, что $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется закону.*

2. СПЕКТРЫ ФОРМУЛ

Будем называть *спектром* предложения φ множество таких чисел $\alpha > 0$, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для $\{\varphi\}$, т.е. вероятность $P(G(n, n^{-\alpha}) \models \varphi)$ не стремится ни к нулю, ни к единице при $n \to \infty$. В [4] доказано, что спектр бесконечен тогда и только тогда, когда бесконечно его пересечение с интервалом $(0, 1)$.

В 1990 г. [14] Спенсер доказал, что существует предложение из $\mathcal{L}$ с бесконечным спектром. В [15] доказано, что наименьшая кванторная глубина (см., например, [1, 2]) подобного предложения равна либо 4, либо 5. А каково наименьшее число переменных такого предложения?

Теорема 7. *Существует $\varphi \in \mathcal{L}^{4}$ с бесконечным спектром.*

Таким образом, наименьшее число переменных формулы с бесконечным спектром равно либо 3, либо 4.

Ниже мы приводим предложение φ из $\mathcal{L}^4$ с бесконечным спектром. Это предложение является модификацией предложения из [15] с кванторной глубиной 5 и бесконечным спектром. Доказательство конечности спектра этого предложения аналогично доказательству бесконечности спектра соответствующего предложения из [15] (см. раздел 4.1):

$$\varphi = \exists x_1 \exists x_2\, [x_1 \sim x_2] \wedge [\exists y_1 \exists y_2\, (y_1 \sim y_2) \wedge$$
$$\wedge (y_1 \sim x_1) \wedge (y_1 \sim x_2) \wedge (y_2 \sim x_1) \wedge (y_2 \sim x_2)]$$

$$\wedge \neg [\exists y_1\, (y_1 \nsim x_1) \wedge (y_1 \nsim x_2) \wedge (y_1 \neq x_1) \wedge$$
$$\wedge (y_1 \neq x_2) \wedge (\exists y_2 (y_2 \sim x_1) \wedge (y_2 \nsim x_2) \wedge (y_2 \sim y_1))$$

$$\wedge (\forall y_2 [y_2 \sim x_1 \wedge y_2 \sim x_2] \Rightarrow [\exists x_1 (x_1 \sim y) \wedge (x_1 \sim z)]])].$$

Источник финансирования. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 18–71–00069.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Libkin L.* Elements of finite model theory. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series B.: Springer-Verlag, 2004.
2. *Zhukovskii M.E., Raigorodskii A.M.* // Rus. Math. Surv. 2015. V. 70. № 1. P. 33–81.
3. *Burkin A.V., Zhukovskii M.E.* In: Mathematics. 2018. V. 209. № 2. P. 163–186.
4. *Zhukovskii M.E., Ostrovskii L.B.* // Izv. Math. 2017. V. 81. № 6. P. 1155–1167.
5. *Жуковский М.Е., Санчез М.Г.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 5. С. 513–515.
6. *Spencer J.H., Zhukovskii M.E.* // Discrete Math. 2016. V. 339. № 6. P. 1651–1664.
7. *Fagin R.* // J. Symbolic Logic. 1976. V. 41. P. 50–58.
8. *Glebskii Y.V., Kogan D.I., Liogon'kii M.I., Talanov V.A.* // Cybernetics. 1969. V. 5. P. 142–154.
9. *Spencer J.H.* // Discrete App. Math. 1991. V. 30. P. 235–252.
10. *Shelah S., Spencer J.H.* // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 97–115.
11. *Kolaitis P.G., Vardi M.Y.* // Inform. and Comput. 1992. V. 98. P. 258–294.
12. *Lynch J.F.* Proc. of the 8th IEEE Symp. on Logic in Computer Science. Cambridge, 1993. P. 191–198.
13. *McArthur M.* // Logic and Random Structures. 1997. V. 33. P. 53–63.
14. *Spencer J.H.* // Combinatorica. 1990. V. 10. № 1. P. 95–102.
15. *Zhukovskii M.E.* // Moscow J. Combin. and Number Theory. 2016. V. 6. № 4. P. 73–102.

ZERO-ONE LAWS FOR SENTENCES WITH *k* VARIABLES

M. E. Zhukovskii[1], A. S. Razafimahatratra[2]

[1]*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

[2]*University of Regina, Regina Saskatchewan, Canada*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov January 23, 2019

Received January 30, 2019

We consider the k variable fragment of first order logic on graphs. We claim that, for $\alpha \le \frac{1}{k-1}$, the random graph $G(n, n^{-\alpha})$ obeys zero-one law w.r.t. this logic. Moreover, for every $\varepsilon > 0$, there exists $\alpha \in \left(\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1} + \varepsilon\right)$ such that $G(n, n^{-\alpha})$ does not obey the law.

Keywords: sparse random graph, zero-one law, first order logic, sentences with bounded number of variables.