ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 2, с. 159–162

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СМЕСЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ С ОДНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

А. Е. Мамонтов*, Д. А. Прокудин

Представлено академиком РАН А.Н. Коноваловым 20.11.2018 г.

Поступило 20.11.2018 г.

Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая трёхмерное нестационарное движение двухкомпонентной гомогенной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей (газов), в рамках многоскоростного подхода. Модель является полной, т.е. сохранены все слагаемые в уравнениях, являющихся естественным обобщением модели Навье–Стокса–Фурье движения однокомпонентной среды. Доказано существование, в целом по времени и входным данным, слабых обобщённых решений начально-краевой задачи, описывающей течение в ограниченной области.

Ключевые слова: трёхмерное течение, вязкая сжимаемая жидкость, гомогенная многоскоростная однотемпературная смесь, теплопроводная жидкость, глобальная теорема существования, нестационарная краевая задача.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524862159-162

В работе устанавливается глобальная разрешимость задачи, описывающей пространственное течение смеси двух теплопроводных вязких сжимаемых жидкостей (газов). Для моделирования движения многокомпонентных сред существует множество подходов, но не развита математическая теория о существовании, единственности и свойствах решений соответствующих краевых задач. В настоящей работе рассматривается гомогенная смесь, многоскоростная модель — в каждой точке присутствуют все компоненты (составляющие) смеси, находящиеся в одной фазе, но имеющие каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом, вязкое трение и теплообмен. Эта модель наследует все сложности, возникающие для однокомпонентных вязких газов (для которых теория не продвинулась далее существования слабых обобщённых решений), к которым добавляются принципиально новые трудности, связанные с наличием межкомпонентного (прежде всего вязкостного) взаимодействия.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

**E-mail: aem@hydro.nsc.ru*

Математическая формулировка описанной модели представляет собой систему дифференциальных уравнений [1–3]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \nabla p_i = \\ = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\mathbf{q} - \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{2} p_i \mathbf{u}_i\right) = \\ = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i + \rho g, \tag{3}$$

выражающих сохранение массы для каждой компоненты, сохранение (баланс) импульса для каждой компоненты и баланс полной энергии смеси. Здесь $\rho_i \geq 0$, $\mathbf{u}_i$, $p_i = p_i(\rho_i, \theta)$, $\mathcal{E}_i = \frac{\rho_i |\mathbf{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i(\rho_i, \theta)$ и $e_i(\rho_I, \theta)$ — плотность, скорость, давление, полная энергия и удельная внутренняя энергия i-й компоненты; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — суммарная плотность; $\theta > 0$ — температура смеси; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ — суммарная полная энергия; $\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{2}\left((\lambda_{ij}\mathrm{div}\mathbf{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\mathbf{u}_j)\right)$ — вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left((\nabla\otimes\mathbf{v}) + (\nabla\otimes\mathbf{v})^*\right)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\mathbf{v}$ ($*$ означает транспонирование), а коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij} образуют матрицы

$$\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{2} > 0, \quad \Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{2}, \quad \Lambda + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geq 0; \tag{4}$$

$\mathbf{J}_i = (-1)^i a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ — приток импульса в i-ю компоненту из другой компоненты; $\mathbf{q} = -k(\theta)\nabla\theta$ — суммарный тепловой поток (k — теплопроводность); $\mathbf{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих на i-ю компоненту; g — плотность внешних тепловых источников.

Пространственные переменные $\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$, а время $t \in [0, T]$, где $T > 0$ произвольно. Существенной по сравнению с однокомпонентным случаем является недиагональная структура матриц вязкостей (4), физически описывающая межкомпонентное вязкое трение, а математически приводящая к присутствию старших членов в (2), “перевязывающих” эти уравнения между собой и не допускающих распада системы на отдельные системы Навье–Стокса–Фурье для компонент смеси. Это не позволяет “автоматически” перенести известные результаты для однокомпонентных систем (см., например, [4, 5]) на многокомпонентный случай.

Определяющие уравнения для термодинамических параметров обязаны удовлетворять соотношениям Гиббса

$$\theta ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right) \quad \forall\, \rho_i, \theta > 0, \quad i = 1, 2 \tag{5}$$

($s_i = s_i(\rho_i, \theta)$ — удельная энтропия i-й компоненты), эквивалентным соотношениям Максвелла

$$\rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial\rho_i} = p_i - \theta\frac{\partial p_i}{\partial\theta}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

а также условиям термодинамической устойчивости

$$\frac{\partial p_i}{\partial\rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial\theta} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Для гладких решений уравнение (3), ввиду (6), можно записать в форме

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial e_i}{\partial\theta}\left(\frac{\partial(\rho_i\theta)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i\theta\mathbf{u}_i)\right) + \mathrm{div}\mathbf{q} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \theta\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial\theta}\mathrm{div}\mathbf{u}_i + a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g. \tag{8}$$

Следуя подходу, предложенному в [4], будем предполагать, что

$$p_i(\rho_i, \theta) = p_{ei}(\rho_i) + \theta p_{\theta i}(\rho_i), \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

с некоторыми функциями p_{ei}, $p_{\theta i}$. Тогда из (6) получаем

$$e_i(\rho_i, \theta) = \int_1^{\rho_i}\frac{p_{ei}(z)}{z^2}dz + Q_i(\theta), \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

и с точностью до несущественных аддитивных констант

$$Q_i(\theta) = \int_0^{\theta}c_{\theta i}(z)dz, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

с некоторыми функциями $c_{\theta i}$. Условия (7) заведомо выполнены, если p'_{ei}, $p'_{\theta i}$ положительны, а $c_{\theta i}(z) \geq c_1 = \mathrm{const} > 0$. Теперь из (5) находим

$$s_i(\rho_i, \theta) = s_{0i} + \int_1^{\theta}\frac{c_{\theta i}(z)}{z}dz - \int_1^{\rho_i}\frac{p_{\theta i}(z)}{z^2}dz, \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

где s_{0i} — произвольные постоянные. Уравнение (8) в этом случае примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{2}\rho_i Q_i(\theta) + \mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{2}\rho_i Q_i(\theta)\mathbf{u}_i\right) +$$

$$+ \mathrm{div}\mathbf{q} + \theta\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\mathbf{u}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g. \tag{13}$$

Постановка задачи $\mathcal{H}$. В замыкании области $Q_T = (0, T)\times\Omega$ найти скалярные функции $\rho_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $\theta > 0$ и векторные функции $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие (1), (2), (13) и граничным условиям:

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad \mathbf{u}_i|_{t=0} = \mathbf{u}_{0i}, \quad i = 1, 2, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \tag{14}$$

$$\mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad (0, T)\times\partial\Omega. \tag{15}$$

Здесь ρ_{0i}, $\mathbf{u}_{0i}$ и θ_0 — заданные функции; $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω.

И физически, и математически необходимо, чтобы общая энтропия системы $S = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \rho_i s_i d\mathbf{x}$ не убывала со временем, если система термодинамически замкнута (т.е. $g = 0$). Поскольку

$$\frac{dS}{dt} = \int_\Omega \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2}{\theta} d\mathbf{x} + \\ + \int_\Omega \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2} d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{\rho g}{\theta} d\mathbf{x},$$

то достаточно условий на коэффициенты

$$k \geq 0, \quad a \geq 0, \tag{16}$$

а также неравенства $\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \geq 0$, выполненного при условиях, перечисленных в (4).

На функции $p_{ei}, p_{\theta i}$ будем налагать такие условия ($i = 1, 2,\ z \geq 0$):

$$p_{ei}, p_{\theta i} \in C^1[0,\infty), \quad p_{ei}(0) = p_{\theta i}(0) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{1}{c_2} z^{\gamma-1} \leq p'_{ei}(z) \leq c_2 z^{\gamma-1} + c_3, \\ p_{\theta i}(z) \leq c_4(1 + z^{\frac{\gamma}{3}}), \quad p'_{\theta i}(z) > 0, \tag{18}$$

где $c_2 = \mathrm{const} \geq 1$, c_3, $c_4 = \mathrm{const} > 0$, $\gamma = \mathrm{const} > 3$. О функции k будем предполагать следующее:

$$k \in C^2[0,\infty), \quad \frac{1}{c_5}(1 + z^m) \leq k(z) \leq c_5(1 + z^m) \\ \forall z \geq 0, \tag{19}$$

где $c_5 = \mathrm{const} \geq 1$, $m = \mathrm{const} \geq 2$. Относительно функций $c_{\theta i}$ (см. (11)) примем такие гипотезы:

$$c_{\theta i} \in C^1[0,\infty), \quad \frac{1}{c_6}\left(1 + z^{\frac{m}{2}-1}\right) \leq c_{\theta i}(z) \leq c_6\left(1 + z^{\frac{m}{2}-1}\right) \\ \forall z \geq 0, \quad i = 1, 2, \tag{20}$$

где $c_6 = \mathrm{const} \geq 1$.

П р и м е р 1. Предположения на давления и энергии выполнены, например, если

$$p_{ei}(\rho_i) = \rho_i^\gamma, \quad p_{\theta i}(\rho_i) = \rho_i, \\ c_{\theta i}(\theta) = 1 + \theta^{\frac{m}{2}-1}, \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

Тогда из (9)–(12) следует, что ($i = 1, 2$)

$$p_i(\rho_i,\theta) = \rho_i^\gamma + \rho_i\theta, \quad e_i(\rho_i,\theta) = \frac{\rho_i^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \theta + \frac{2}{m}\theta^{\frac{m}{2}} - \frac{1}{\gamma-1},$$

$$s_i(\rho_i,\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{\rho_i}\right) + \frac{2}{m-2}\theta^{\frac{m}{2}-1} + s_{0i} - \frac{2}{m-2} \quad \text{при} \quad m > 2,$$

$$s_i(\rho_i,\theta) = \ln\left(\frac{\theta^2}{\rho_i}\right) + s_{0i} \quad \text{при} \quad m = 2.$$

Уравнение (8) в этом случае примет вид

$$\left(1 + \theta^{\frac{m}{2}-1}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial(\rho_i\theta)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_i\theta\mathbf{u}_i\right)\right) + \mathrm{div}\mathbf{q} + \theta\sum_{i=1}^{2}\rho_i \mathrm{div}\mathbf{u}_i = \\ = \sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g.$$

При предположениях (21) с $m = 2$ существование слабых решений соответствующей стационарной краевой задачи доказано в [6].

Входные данные в задаче $\mathcal{H}$ будем брать из класса

$$\rho_{0i} \in L_\gamma(\Omega), \quad \rho_{0i} \geq 0, \quad \theta_0 \in L_\infty(\Omega), \\ \operatorname*{ess\,inf}_\Omega \theta_0 > 0, \quad \mathbf{u}_{0i} \in L_\infty(\Omega), \quad i = 1, 2, \tag{22}$$

$$\mathbf{f}_i \in L_\infty(Q_T), \quad i = 1, 2, \quad g \in L_\infty(Q_T), \quad g \geq 0. \tag{23}$$

О п р е д е л е н и е 1. Пусть выполнены ограничения (4), (9), (11), (16)–(20), (22), (23). С л а б ы м р е ш е н и е м задачи называется набор функций $\rho_i \geq 0$, $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, *и* $\theta > 0$ следующего класса:

$$\rho_i \in L_\infty(0,T; L_\gamma(\Omega)), \quad \mathbf{u}_i \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\rho_i\mathbf{u}_i \in L_\infty(0,T; L_{\sigma_1}(\Omega)) \quad \text{с} \quad \sigma_1 > \frac{6}{5},$$

$$\rho_i Q_i(\theta) \in L_\infty(0,T; L_1(\Omega)) \cap L_2(0,T; L_{\sigma_2}(\Omega)) \quad \text{с} \quad \sigma_2 > \frac{6}{5},$$

$$\ln\theta, \theta p_{\theta i}(\rho_i) \in L_2(Q_T), \quad \int_0^\theta k(z)dz \in L_1(Q_T),$$

удовлетворяющих уравнениям (1), (2), (13) и граничным условиям (14), (15) в слабом смысле (как в теории уравнений Навье–Стокса–Фурье для однокомпонентной теплопроводной вязкой сжимаемой жидкости [4]).

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *— ограниченная область класса* $C^{2+\sigma_3}$, $\sigma_3 > 0$, *а* $T > 0$ *— произвольное* *конечное число. Тогда для любых входных данных класса, описанного в определении* 1, *и при оговоренных в нём условиях на параметры уравнений, существует хотя бы одно слабое решение задачи.*

Доказательство теоремы 1 проводится по такой схеме:

1) формулировка приближённой задачи, в которой вводятся параметры $q \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$, уравнения (2) выполняются в смысле Галёркина (проектированием на q-мерное пространство базисных функций), во все уравнения вводятся регуляризующие добавки: $\varepsilon\Delta\rho_i$ в правую часть (1), $\varepsilon(\nabla\otimes\mathbf{u}_i)^*\nabla\rho_i$ в левую часть (2), $\delta\theta^{m+1}$ в левую часть (3), регуляризуются входные данные, уточняются краевые условия;

2) доказательство разрешимости приближенной задачи при фиксированных q, δ и ε при помощи принципа Лерэ–Шаудера;

3) переход к пределу при $q \to +\infty$ (доказательство разрешимости приближённой задачи с уравнениями импульса, выполненными в "полноценном" смысле);

4) переход к пределу по малым параметрам: сначала $\varepsilon \to 0$, а затем $\delta \to 0$;

5) на каждом этапе получение оценок решений, не зависящих от того параметра, по которому проводится предельный переход.

Источник финансирования. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта 18–31–00034 в Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.
2. *Rajagopal K.L., Tao L.* Mechanics of Mixtures. Singapore: World Sci., 1995. 250 p.
3. *Mamontov A.E., Prokudin D.A.* // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20. № 2. P. 179–195.
4. *Feireisl E.* Dynamics of Viscous Compressible Fluids. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. 212 p.
5. *Feireisl E., Novotny A.* Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids. Basel: Birkhauser, 2009. 382 p.
6. *Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78. В. 3. С. 135–160.

SOLVABILITY OF A PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF DYNAMICS OF ONE-TEMPERATURE MIXTURES OF HEAT-CONDUCTING VISCOUS COMPRESSIBLE FLUIDS

A. E. Mamontov, D. A. Prokudin

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.N. Konovalov November 20, 2018

Received November 20, 2018

A system of partial differential equations governing the three-dimensional unsteady flow of a homogeneous two-component mixture of heat-conducting viscous compressible fluids (gases) is considered within the multivelocity approach. The model is complete in the sense that it retains all terms in the equations, which are a natural generalization of the Navier–Stokes–Fourier model for the motion of a single-component medium. The existence of weak solutions to the initial-boundary value problem describing the flow in a bounded domain is proved globally in time and the input data.

Keywords: three-dimensional flow, viscous compressible fluid, homogeneous mixture with multiple velocities and one temperature, heat-conductive fluid, global existence theorem, unsteady boundary value problem.