ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 3, с. 280–286

МАТЕМАТИКА

УДК 511.6

S-ЕДИНИЦЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАНИЙ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ ОБОБЩЁННОГО ТИПА В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Академик РАН В. П. Платонов[1,2,*], Г. В. Федоров[1,3,]**

Поступило 23.01.2019 г.

Доказана теорема об эквивалентности следующих условий: периодичность непрерывных дробей обобщённого типа для ключевых элементов гиперэллиптического поля L, наличие в гиперэллиптическом поле L нетривиальных S-единиц для множеств S, состоящих из двух нормирований первой степени, и наличие кручения определённого вида в якобиевом многообразии, связанном с гиперэллиптическим полем L. Данная теорема позволяет на практике с помощью непрерывных дробей обобщённого типа эффективно искать фундаментальные S-единицы гиперэллиптических полей. Приведён пример гиперэллиптического поля рода 3, демонстрирующий эквивалентность всех трёх условий.

Ключевые слова: непрерывные дроби, фундаментальные единицы, S-единицы, кручение в якобианах, гиперэллиптические поля, дивизоры, группа классов дивизоров.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524863280-286

Пусть K — поле характеристики, отличной от 2. В классическом случае гиперэллиптического поля $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, определённого свободным от квадратов многочленом $F \in K[X]$ чётной степени, ещё по работам Абеля и Чебышева известна связь между наличием единиц кольца $D_F = K[X](\sqrt{F}) = \{\omega_1 + \omega_2\sqrt{F} \mid \omega_1, \omega_2 \in K[X]\}$ и периодичностью разложения $\sqrt{F}$ в непрерывную дробь (подробнее см. [1]).

Рассмотрим $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен нечётной степени $2g+1$, $g \geq 1$. Для поиска и построения нетривиальных S-единиц в гиперэллиптическом поле $L = K(x)(\sqrt{f})$ в статье [2] был предложен метод функциональных непрерывных дробей, причём было показано, что наиболее эффективное применение этот метод имеет для множеств S, состоящих из бесконечного нормирования и нормирования первой степени.

Пусть υ_h — одно из двух неэквивалентных сопряжённых нормирований поля L, связанных с линейным многочленом $h \in K[x]$. Опираясь на метод функциональных непрерывных дробей, в статьях [3–10] была глубоко изучена проблема существования и построения нетривиальных S-единиц в гиперэллиптическом поле L в случае, когда множество S состоит из двух нормирований первой степени. В частности, в [6] впервые было показано, что условие периодичности непрерывных дробей элементов $\sqrt{f}/h^g$ и $\sqrt{f}/h^{g+1}$, построенных в поле формальных степенных рядов $K((h))$, эквивалентно наличию в поле L нетривиальных S-единиц, где $S = \{\upsilon_h, \infty\}$.

В отличие от числовых непрерывных дробей, в случае функциональных непрерывных дробей возникает новое понятие квазипериодичности — периодичности с точностью до умножения на постоянную величину. Кроме того, даже при наличии в поле L нетривиальных S-единиц не каждая квадратичная иррациональность имеет периодическое или квазипериодическое разложение в непрерывную дробь. В то же время из наличия элементов в поле L с периодическим разложением в непрерывную дробь следует, что в поле L есть нетривиальные S-единицы,

[1]*Федеральный научный центр “Научно-исследовательский институт системных исследований Российской Академии наук”, Москва*

[2]*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва*

[3]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

**E-mail: platonov@niisi.ras.ru*

***E-mail: fedorov@mech.math.msu.su*

а значит, непрерывные дроби элементов $\sqrt{f}/h^g$ и $\sqrt{f}/h^{g+1}$ периодические. Тем самым элементы $\sqrt{f}/h^g$ и $\sqrt{f}/h^{g+1}$ можно считать ключевыми для определения существования нетривиальных S-единиц в поле L.

В данном сообщении мы рассматриваем непрерывные дроби обобщённого типа и их связь с проблемой существования и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптическом поле L для множеств S, состоящих из двух нормирований первой степени. Отдельно мы выделяем важный случай, когда множество $S = S_h$ состоит из двух неэквивалентных сопряжённых нормирований, связанных с линейным многочленом h. Свойства S_h-единиц поля L и их связь с периодичностью традиционных непрерывных дробей в $K((h))$ детально обсуждаются в статье [3].

Пусть $\mathcal{V}$ — множество нормирований поля L, определённых над полем K. Обозначим $\mathrm{Div}(L)$ — группу K-дивизоров поля L,

$$\mathrm{Div}(L) = \left\{ D = \sum_{\upsilon\in\mathcal{V}} n_\upsilon \upsilon,\, n_\upsilon \in \mathbb{Z} \right\},$$

где для каждого дивизора D в наборе чисел $\{n_\upsilon\}_{\upsilon\in\mathcal{V}}$ только конечное количество отлично от нуля. Там, где ясно, что суммирование берётся по $\upsilon \in \mathcal{V}$, будем его опускать. Все дивизоры, о которых далее пойдёт речь, лежат в Div (L).

Для $D \in \mathrm{Div}(L)$, $D = \sum n_\upsilon \upsilon$, определим $\deg D = \sum n_\upsilon \deg \upsilon$. Для фиксированного нормирования $\upsilon \in \mathcal{V}$ определим число $\upsilon(D) = n_\upsilon = n_\upsilon(D)$. Дивизор $D \in \mathrm{Div}(L)$ называется эффективным, если $\upsilon(D) \ge 0$ для всех $\upsilon \in \mathcal{V}$. Скажем, что для дивизоров $D, E \in \mathrm{Div}(L)$ выполнено сравнение $D \le E$, если $E - D$ эффективный дивизор.

Для главного дивизора (α) функции $\alpha \in L$, $\alpha \ne 0$, обозначим $(\alpha)_z$ и $(\alpha)_p$, соответственно, эффективный дивизор нулей и эффективный дивизор полюсов функции α так, что $(\alpha) = (\alpha)_z - (\alpha)_p$, причём $\upsilon\big((\alpha)_z\big)\cdot\upsilon\big((\alpha)_p\big) = 0$ для всех $\upsilon \in \mathcal{V}$.

Группу дивизоров степени ноль поля L обозначим $\mathrm{Div}^\circ(L)$, группу главных дивизоров поля L обозначим $\mathrm{Princ}(L)$, группу классов дивизоров степени ноль поля L обозначим $\Delta^\circ(L) = \mathrm{Div}^\circ(L)/\mathrm{Princ}(L)$. Скажем, что дивизоры $D, E \in \mathrm{Div}^\circ(L)$ эквивалентны $D \sim E$, если они принадлежат одному классу в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$.

Инволюция ι поля L, действующая $\iota : \sqrt{f} \to -\sqrt{f}$, $\iota^2 = \mathrm{id}$, может быть естественным образом определена на группе дивизоров $\mathrm{Div}(L)$ поля L.

Для традиционных функциональных непрерывных дробей в статьях [7] и [8] был представлен новый геометрический метод, основанный на последовательном построении специальных дивизоров для заданного элемента гиперэллиптического поля. Многочлены Мамфорда этой последовательности дивизоров оказываются тесно связанными с непрерывной дробью рассматриваемого элемента. Основные результаты данного сообщения были получены путём обобщения и продолжения идей [7] на случай непрерывных дробей обобщённого типа и анализа связанных с ними дивизоров в комбинации с нашими результатами [3] о фундаментальных S_h-единицах поля L.

Нами уже рассматривались непрерывные дроби обобщённого типа, но они были построены в гиперэллитпическом поле L по нормированию второй степени. В статье [11] такие непрерывные дроби впервые нашли эффективное применение в проблеме поиска и построения нетривиальных S-единиц в гиперэллиптических полях в случае, когда множество S состоит из нормирования второй степени и бесконечных нормирований или когда множество S состоит из двух неэквивалентных сопряжённых нормирований второй степени.

Перед тем как перейти к изложению основных результатов данной работы, покажем, как может быть построена непрерывная дробь обобщённого типа в поле формальных степенных рядов $K((h))$ и в гиперэллиптическом поле L, а также проведём необходимый для дальнейшего изложения анализ дивизоров функций, связанных с построенной непрерывной дробью обобщённого типа.

Элемент $\alpha \in K((h))$ имеет вид $\alpha = \sum_{j=s}^{\infty} b_j h^j$, где $s \in \mathbb{Z}$, $b_s \ne 0$, $b_j \in K$ для $j \ge s$. Положим $\alpha_0 = \alpha$ и определим $a_0 = \sum_{j=s}^{0} b_j h^j = [\alpha_0]_h$, если $s < 0$, а иначе $a_0 = 0$. Множество целых неотрицательных чисел обозначим $\mathbb{N}_0$. Для каждого $j \in \mathbb{N}_0$, если $\alpha_j - a_j \ne 0$, определим полное частное $\alpha_{j+1} = h/(\alpha_j - a_j) \in K((h))$ и неполное частное $a_{j+1} = \left[\alpha_{j+1}\right]_h$. В итоге для элемента α мы получим конечное или бесконечное выражение вида

$$a_0 + \cfrac{h}{a_1 + \cfrac{h}{a_2 + \cdots}}, \qquad (1)$$

которое называется непрерывной дробью обобщённого типа. Для краткости выражение (1) будем записывать так $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, и называть непрерывной дробью, так как далее мы будем рассматривать только непрерывные дроби вида (1). Если на некотором n-м шаге $\alpha_n - a_n = 0$, то непрерывная дробь для элемента α конечная, и справедливо равенство $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Отметим, что непрерывная дробь элемента α конечная тогда и только тогда, когда $\alpha \in K(x) \subset K((h))$. Если непрерывная дробь для элемента α бесконечная, то соответствующие подходящие дроби $[a_0; a_1, \ldots, a_j]$, $j \in \mathbb{N}_0$, сходятся к α по нормированию υ_h. Так как по предположению в $\mathcal{V}$ есть два неэквивалентных сопряженных нормирования, связанных с линейным многочленом h, то $\sqrt{f}$ представляется в виде формального степенного ряда в $K((h))$, и для любого элемента $\alpha \in L \subset K((h))$ все полные частные $\alpha_j = [a_j; a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots] \in L$.

Эффективный дивизор, соответствующий единственному бесконечному нормированию υ_∞ поля L, обозначим $\infty \in \mathrm{Div}(L)$, а эффективный дивизор, соответствующий нормированию υ_h, обозначим $D_h \in L$. Тогда главный дивизор многочлена h можно записать в следующем виде: $(h) = D_h + \iota D_h - 2\infty$, причём $D_h \neq \iota D_h$.

Пусть элемент $\alpha \in L$ имеет вид

$$\alpha = \frac{\sqrt{f} + V}{U}, \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} U,\ V \in K[x], \quad U \cdot h \mid f - V^2, \\ \deg U = g, \quad \deg V \le g. \end{gathered} \tag{3}$$

Определим

$$\begin{gathered} R = \frac{f - V^2}{U \cdot h}, \quad a = [\alpha]_h, \quad W = aU - V, \\ T = \frac{f - W^2}{U \cdot h}, \quad \beta = \frac{\sqrt{f} + W}{T}. \end{gathered} \tag{4}$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) $R, W, T \in K[x]$ — *многочлены, причём* $\deg R = \deg T = g$, $\deg W \le g$;

2) *существуют и однозначно определены эффективные дивизоры* $D_R, D_U, D_T \in \mathrm{Div}(L)$ *такие, что главные дивизоры многочленов* $R, U, T \in K[x]$ *и функций* $\sqrt{f} - V, \sqrt{f} - W \in L$ *имеют вид*

$$(R) = D_R + \iota D_R + r(D_h + \iota D_h) - 2g \cdot \infty, \quad \upsilon_h(R) = r, \tag{5}$$

$$(U) = D_U + \iota D_U + s(D_h + \iota D_h) - 2g \cdot \infty, \quad \upsilon_h(U) = s, \tag{6}$$

$$(T) = D_T + \iota D_T + t(D_h + \iota D_h) - 2g \cdot \infty, \quad \upsilon_h(T) = t, \tag{7}$$

$$\left(\sqrt{f} - V\right) = D_R + (r + s + 1) D_h + \iota D_U - (2g + 1) \cdot \infty, \tag{8}$$

$$\left(\sqrt{f} - W\right) = D_U + (s + t + 1) D_h + \iota D_T - (2g + 1) \cdot \infty; \tag{9}$$

3) *справедливо тождество* $\beta(\alpha - a) = h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий следует, что R — многочлен степени g. Так как элемент $a = [\alpha]_h$ имеет вид $a = \tilde{a} \cdot h^{-s}$, где $\tilde{a} \in K[x]$, $\deg \tilde{a} \le s \in \mathbb{N}_0$, $\upsilon_h(U) = s$, то W — многочлен степени, не превосходящей g. Положим $\upsilon_h(R) = r$. Определим в качестве D_R и D_U такие максимальные эффективные дивизоры из $\mathrm{Div}(L)$, что $D_R \le (R \cdot h^{-r})_z$, $D_R \le \left(\sqrt{f} - V\right)_z$, и $D_U \le \left(U \cdot h^{-s}\right)_z$, $\iota D_U \le \left(\sqrt{f} - V\right)_z$. В силу того, что по построению (2) справедливо равенство $f - V^2 = R \cdot h \cdot U$, выполнены соотношения (5), (6), (8).

Далее покажем, что $D_U + (s + 1) D_h \le \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. Рассмотрим тождество

$$\frac{\sqrt{f} - W}{U} = \frac{\sqrt{f} + V}{U} - a. \tag{10}$$

Поскольку полюсы главного дивизора функции a имеют вид $s(D_h + \iota D_h)$ и $D_U \le \left(\sqrt{f} + V\right)_z$, то

$$\iota D_U \le \left(\frac{\sqrt{f} + V}{U} - a\right)_p,$$

следовательно, $D_U \le \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. С другой стороны, по построению $\upsilon_h(a) = -s$ и

$$\upsilon_h\left(\frac{\sqrt{f} + V}{U} - a\right) = \upsilon_h\left(\alpha - a\right) \ge 0,$$

следовательно, $(s + 1) D_h \le \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. Таким образом, $D_U + (s + 1) D_h \le \left(\sqrt{f} - W\right)_z$, следовательно, $U \cdot h \mid f - W^2$, откуда получаем, что T — многочлен степени g.

Определим $t = \upsilon_h(T)$ и D_T — такой максимальный эффективный дивизор из $\mathrm{Div}(L)$, что

$D_T \le (T \cdot h^{-t})_z, \iota D_T \le \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. Так как $f - W^2 = U \cdot h \cdot T$, то справедливы соотношения (7) и (9).

Единственность дивизоров $D_R, D_U, D_T \in \mathrm{Div}(L)$ следует из соотношений (4) и (5)–(9).

Соотношение $\beta(\alpha - a) = h$ следует из (10) и равенства $f - W^2 = U \cdot h \cdot T$.

Предложение 1 позволяет с помощью формул (4) для элемента α, определённого в (2), эффективно строить нерерывную дробь вида (1) и её полные частные α_n.

Предложение 2. *Пусть дан элемент* $\alpha_0 = \alpha \in L$ *вида* (2)–(3). *Тогда для* $j \in \mathbb{Z}$, $j \ge -1$, *существуют и однозначно определены многочлены* $U_j, V_j \in K[x]$, $\deg U_j = g$, $\deg V_j \le g$, *и эффективные дивизоры* $D_j \in \mathrm{Div}(L)$, *для которых при* $j \ge -1$ *справедливы следующие формулы*:

$$\alpha_{j+1} = \frac{V_j + \sqrt{f}}{U_{j+1}}, \quad f - V_j^2 = U_j \cdot h \cdot U_{j+1}, \tag{11}$$

$$a_{j+1} = [\alpha_{j+1}]_h, \quad V_{j+1} = a_{j+1} U_{j+1} - V_j, \tag{12}$$

$$s_{j+1} = \upsilon_h(U_{j+1}) = -\upsilon_h(a_{j+1}) = -\upsilon_h(\alpha_{j+1}), \tag{13}$$

$$(U_j) = D_j + \iota D_j + s_j(D_h + \iota D_h) - 2g \cdot \infty, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(V_j - \sqrt{f}) = D_j + (s_j + s_{j+1} + 1)D_h +\\ + \iota D_{j+1} - (2g+1) \cdot \infty.\end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство. По элементу α с помощью формул (4) строим элемент β. По построению непрерывной дроби имеем $\alpha_1(\alpha_0 - a_0) = h$, а с другой стороны по предложению 1 имеем $\beta(\alpha - a) = h$. Из того, что $a = a_0$ следует, что $\alpha_1 = \beta$, т.е. элементы α_0 и α_1 имеют вид

$$\alpha_j = \frac{\sqrt{f} + V_{j-1}}{U_j}, j = 0, 1, \tag{16}$$

где

$$V_{-1} = V,\ U_{-1} = R,\ U_0 = U,\ V_0 = W,\ U_1 = T. \tag{17}$$

Положим

$$\begin{gathered} D_{-1} = D_R, D_0 = D_U, D_1 = D_T, \\ s_{-1} = r, s_0 = s, s_1 = t. \end{gathered} \tag{18}$$

Продолжая рассуждать аналогично и далее, с помощью предложения 1 завершаем доказательство предложения 2.

Из предложения 2 следует, что данному элементу $\alpha \in L$ вида (2), (3) соответствует корректно определённая последовательность эффективных дивизоров D_j, $j \in \mathbb{N}_0$. Следующее важное предложение играет ключевую роль в доказательстве основных результатов этой работы, сформулированных ниже в теореме.

Предложение 3. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} D_n + s_n \cdot \iota D_h - D_0 - \\ - s_0 \cdot \iota D_h \sim \sum_{j=0}^{n-1} (2s_j + 1)(D_h - \infty). \end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. Просуммируем (15) по $j = 0, 1, \ldots, n-1$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (2s_j + 1) D_h + \sum_{j=0}^{n-1} (D_j + \iota D_j) - \iota D_0 + \iota D_n + \\ + (s_n - s_0) \cdot D_h \sim n(2g+1) \cdot \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как $\deg(D_j + s_j \cdot D_h) = g$, то в силу (14) из (20) следует (19).

Теорема. *Пусть элемент* $\alpha \in L$ *имеет вид* (2), *где* $U = h^g$, $V = h^g \cdot \left[\sqrt{f} h^{-g}\right]_h$. *Пусть справедливы построения* (4), (16)–(18) *и* (11)–(15) *для* $j \in \mathbb{N}_0$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *найдётся минимальный номер* $n \in \mathbb{N}$ *такой, что* $D_n = 0$;

2) *найдётся минимальный номер* $n \in \mathbb{N}$ *такой, что* $V_n = V_0$ *и* $U_n = ch^g$ *для некоторой постоянной* $c \in K^*$;

3) *класс дивизора* $(D_h - \infty)$ *имеет конечный порядок* m *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$;

4) *класс дивизора* $(D_h - \iota D_h)$ *имеет конечный порядок* m_h *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$;

5) *непрерывная дробь элемента* α *типа* (1), *квазипериодическая с длиной квазипериода* n.

Если существуют $n, m, m_h \in \mathbb{N}$, *указанные в эквивалентных условиях* 1)–5), *то*

непрерывная дробь α *чисто периодическая с длиной периода либо* n, *если в пункте* 2), *постоянная* $c = 1$, *либо с длиной периода* $2n$ *и коэффициентом квазипериода* $1/c$, *если* $c \ne 1$;

справедливы соотношения

$$m = \sum_{j=0}^{n-1}(2s_j + 1), \tag{21}$$
где $s_j = -\upsilon_h(\alpha_j) = -\upsilon_h(a_j) = \upsilon_h(U_j),\ j \in \mathbb{N}_0;$

для минимального $t \in \mathbb{N}$*, такого, что* $D_{2t} = 0$*, справедливы соотношения*

$$m_h = t + \sum_{j=0}^{2t-1} s_j; \tag{22}$$

4) есл*и* m *чётно, то* $m_h = m/2$*, если* m *нечётно, то* $m_h = m$.

Доказательство. Из вида элемента α следует, что $D_0 = 0$, $s_0 = g$.

Эквивалентность условий 1) и 2) следует из предложения 2.

Докажем, что из условия 3) следует условие 1).

Предположим, что дивизор $(D_h - \infty)$ имеет порядок $m \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{j=0}^{n-2}(2s_j + 1) < m \le \sum_{j=0}^{n-1}(2s_j + 1).$$

Обозначим $\delta = \sum_{j=0}^{n-1}(2s_j + 1) - m$, тогда $0 \le \delta \le 2s_{n-1}$.

Из предложения 3 следует, что

$$D_n + s_n \cdot \iota D_h - D_0 - s_0 \cdot \iota D_h \sim \delta(D_h - \infty). \tag{23}$$

Пусть $\delta = 2\delta_0 - \delta_1$, где $\delta_1 \in \{0,1\}$, $0 \le \delta_0 \le s_{n-1}$, $\delta_1 \le \delta_0$. Так как

$$2(D_h - \infty) \sim (D_h - \iota D_h), \tag{24}$$

то из (23) получаем

$$\begin{gathered} D_n + s_n \cdot \iota D_h \sim D_0 + s_0 \cdot \iota D_h - \\ - \delta_0 \cdot \iota D_h + (\delta_0 - \delta_1)D_h + \delta_1 \cdot \infty. \end{gathered} \tag{25}$$

Так как по условию теоремы $s_{n-1} \le s_0$, то в левой и правой частях (25) стоят эффективные дивизоры степени *g*. Обозначим

$$\begin{gathered} E = D_n + s_n \cdot \iota D_h - \\ -(D_0 + s_0 \cdot \iota D_h - \delta_0 \cdot \iota D_h + (\delta_0 - \delta_1)D_h + \delta_1 \cdot \infty). \end{gathered} \tag{26}$$

Поскольку $E \sim 0$ и степень эффективного дивизора полюсов E равна g, то E — главный дивизор некоторой рациональной функции $\beta \in K(x)$ (см. [12]). Для любого конечного нормирования $\upsilon \in \mathcal{V}$, такого, что $\upsilon \ne \upsilon_h$, $\upsilon \ne \iota\upsilon_h$ и $\upsilon \ne \iota\upsilon$, имеем $\upsilon(E)\cdot\upsilon(\iota E) \le 0$, а так как E — главный дивизор рациональной функции, то получаем $v(E) = v(\iota E) = 0$. Для любого конечного нормирования $\upsilon \in \mathcal{V}$, такого, что $\upsilon = \iota\upsilon$, имеем $|v(E)| \le 1$, а для главного дивизора рациональной функции E это возможно только, если $v(E) = 0$. Получается, что $\beta = bh^q$ для некоторых $q \in \mathbb{Z}$ и $b \in K^*$. Из (26) имеем $|v_\infty(E)| \le 1$, следовательно, $q = 0$. Так как по построению $v_h(D_n) = v_h(\iota D_n) = 0,$, то $\delta = 0$ и $D_n = 0$. Отсюда следует условие 1).

Докажем, что из условия 1) следует условие 3).

Предположим, что n — минимальное число такое, что $D_n = 0$, тогда по предложению 3 сразу следует, что класс дивизора $(D_h - \infty)$ имеет конечный порядок m в $\Delta^\circ(L)$, причём m и n связаны со слов В силу (24) из условия 3) следует конечность порядка класса дивизора $(D_h - \iota D_h)$ в $\Delta^\circ(L)$, т.е. следует условие 4).

Далее, при условии конечности порядка класса дивизора $(D_h - \infty)$ в $\Delta^\circ(L)$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$ соотношение (22) следует из предложения 3).

Если справедливо условие 4), то из (24) имеем условие 3).

Образ дивизора $(D_h - \iota D_h)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$ имеет конечный порядок m_h тогда и только тогда, когда $D_{2t} = D_0$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, причём если t минимальное такое число, то справедливо равенство (22). Из (21) видно, что n и m одновременно чётны или нечётны, следовательно, сравнивая (21) и (22), при нечётном m имеем $n = t$ и $m_h = m$, а при чётном m имеем $n = 2t$ и $m_h = m/2$.

Докажем, что условие 2) эквивалентно условию 5).

При заданном нормировании v_h непрерывная дробь полного частного $\alpha_j \in L$ зависит только от значения α_j, поэтому, в силу (11), квазипериодичность α_0 эквивалентна условиям $V_n = V_0$ и $U_n = cU_0$ для некоторого минимального $n \in \mathbb{N}$, т.е. квазипериодичность α_0 эквивалентна условию 2). Далее, в силу симметрии квазипериода непрерывной дроби (аналогично теореме 3 [7]) имеем $c = 1$, если n чётно; для нечётного n длина периода совпадает с длиной квазипериода или в два раза больше длины квазипериода.

Доказанная теорема и формулы (11), (12) позволяют для линейного многочлена h сформулировать эффективный алгоритм поиска S_h-единиц и классов дивизоров конечного порядка в $\Delta^\circ(L)$.

Продемонстрируем полученные результаты на следующем примере в случае $g = 3$.

П р и м е р. Рассмотрим поле $K = \mathbb{Q}$ и многочлен

$$f = h^7 + 2h^6 - 2h^5 - h^4 - 2h^3 - h^2 + 2h + 1 =$$

$$= (h-1)(h^6 + 3h^5 + h^4 - 2h^2 - 3h - 1).$$

Нормирование поля $\mathbb{Q}(h)$, связанное с υ_h, имеет два неэквивалентных продолжения υ_h и $\iota\upsilon_h$ на поле $L = \mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$. В поле $\mathbb{Q}((h))$ элемент $\sqrt{f}$ имеет разложение $\sqrt{f} = 1 + h - h^2 + \ldots$ Бесконечное нормирование поля $\mathbb{Q}(x)$ имеет единственное продолжение на поле L. Рассмотрим $D_0 = g \cdot D_h$, где $g = 3$. Находим $U_0 = h^3$, $V_0 = 1 + h - h^2$. Далее строим непрерывную дробь для элемента $\sqrt{f}/h^3$ по нормированию υ_h:

$$\frac{\sqrt{f}}{h^3} = \left[-\frac{1}{h^3}(h^2 - h - 1);\right.$$
$$\left.\overline{-1, -\frac{2}{h^2}(h+1)^2, -1, -\frac{2}{h^3}(h^2 - h - 1)}\right].$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/h^3$ периодическая, причём период симметричен, длина периода равна длине квазипериода и равна 4. Замечаем, что $U_4 = U_0$ и $V_4 = V_0$, поэтому справедливы условия теоремы и, следовательно, в якобиане гиперэллиптического поля L класс дивизора $(D_h - \infty)$ имеет порядок $m = 14$, а класс дивизора $(D_h - \iota D_h)$ имеет порядок $\frac{m}{2} = 7$. В поле L существует фундаментальная S-единица u степени 14:

$$u = \mu_1 - \mu_2\sqrt{f}, \quad u \cdot \bar{u} = h^{14},$$

$$\mu_1 = h^7 + 2h^6 + 6h^5 + 2h^4 - 4h^2 - 6h - 2,$$
$$\mu_2 = -2(h^3 + h^2 + 2h + 1).$$

Также в поле L существует фундаментальная S_h-единица u_h степени 7, $u_h = u \cdot h^{-7}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов В.П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69. № 1(415). С. 3–38.
2. *Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П.* Группы *S*-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Мат. сб. 2009. Т. 200. № 11. С. 15–44.
3. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Мат. сб. 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
4. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474. № 5.С. 540–544.
5. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475. № 2. С. 133–136.
6. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* *S*-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465. № 5. С. 537–541.
7. *Платонов В.П., Жгун В.С., Федоров Г.В.* Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 640–644.
8. *Жгун В.С.* Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // Чебышев. сб. 2017. Т. 18. № 4. С. 208–220.
9. *Платонов В.П., Петрунин М.М.* *S*-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН. 2016. Т. 470. № 3. С. 260–265.
10. *Петрунин М.М.* Группы *S*-единиц и проблема периодичности непрерывны дробей в гиперэллиптических полях // Тр. Мат. ин-та АН. 2018. Т. 302. С. 354–376.
11. *Федоров Г.В.* Периодические непрерывные дроби и *S*-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебыш. сб. 2018. Т. 19. № 3.
12. *Мамфорд Д.* Лекции о тета-функциях // М.: Мир, 1988.

ON *S*-UNITS FOR LINEAR VALUATIONS AND THE PERIODICITY OF CONTINUED FRACTIONS OF GENERALIZED TYPE IN HYPERELLIPTIC FIELDS

Academician of the RAS V. P. Platonov[1,2], G. V. Fedorov[1,3]

[1]*Federal State Institution «Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences», Moscow, Russian Federation*

[2]*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[3]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Received January 23, 2019

This article proves the equivalence theorem for the following conditions: the periodicity of continued fractions of a generalized type for key elements hyperelliptic field L, the existence in the hyperelliptic field L of nontrivial S-units for sets S, consisting two valuations of degree one, and the existence of the torsion of a certain type in the Jacobian variety, associated with the hyperelliptic field L. This theorem allows in practice using continued fractions of a generalized type effectively search for fundamental S-units of hyperelliptic fields. We give an example of the hyperelliptic field of genus 3, showing all three equivalent conditions in the indicated theorem.

Keywords: continued fractions, fundamental units, S-units, torsion in the Jacobians, hyperelliptic fields, divisors, divisor class group.