ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 3, с. 275–279

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.1+514.7

ГРАФИКИ НЕГЛАДКИХ КОНТАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ГРУППАХ КАРНО С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Б. Карманова

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 26.12.2018 г.

Поступило 10.01.2019 г.

Для классов графиков C_H^1-отображений нильпотентных градуированных групп доказана формула площади на сублоренцевых структурах произвольной глубины с многомерным временем.

Ключевые слова: нильпотентная градуированная группа, внутренний базис, контактное отображение, сублоренцева структура, многомерное время, отображение-график, площадь поверхности.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524863275-279

Мы выводим формулу площади построенных по контактным отображениям класса C_H^1 графиков на сублоренцевых структурах произвольной глубины с многомерным временем. Напомним, что такие структуры являются неголономным обобщением геометрии Минковского (см., например, [1] и цитируемые авторами литературные источники), когда квадрат расстояния вдоль одного из направлений (называемого временны́м) отрицателен. См. работы [2–7], в которых установлены тонкие свойства разнообразных обобщений геометрии Минковского. В данном сообщении мы развиваем результат [8] о формуле площади для графиков достаточно гладких отображений на группах произвольной глубины. Случай графиков C_H^1-отображений без дополнительных требований гладкости интересен тем, что они не являются дифференцируемыми ни в классическом, ни в субримановом смысле, и для них справедлив результат только о полиномиальной субримановой дифференцируемости [9]. В общем случае необходимость дополнительной гладкости отображения, по которому строится график, вызвана тем, что построенная аппроксимация должна быть устойчива к заменам базиса, нужным для вывода метрических свойств. Для получения этого свойства необходима более точная сравнительно с $o(d_2(x,y))$ аппроксимация по координатам малых степеней, что решается требованием дополнительной гладкости отображения по этим переменным. В рамках настоящего исследования мы рассмотрим представляющий независимый интерес класс C_H^1-отображений, для которых, тем не менее, такое требование не является обязательным (см. также [10, 11]).

Сформулируем необходимые определения и результаты.

Определение 1 (см., например, [12]). *Нильпотентной градуированной группой (Ли)* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т.е., представляется в виде $V=\bigoplus_{k=1}^{M}V_k, [V_1,V_k]\subset V_{k+1},\ [V_1,V_M]=\{0\},\ k=1,2,\dots,M-1,$ $[V_M,V_M]=\{0\}$.

Обозначение 1. Обозначим топологическую размерность группы $\mathbb{G}$ символом N, базисные векторные поля $X_1,\dots,X_N$, хаусдорфову размерность ν, и положим $n_i=\dim V_i$, $i=1,2,\dots,M$. Для группы $\widetilde{\mathbb{G}}$ будем использовать те же обозначения, только со знаком ~.

Определение 2. Если базисное поле X_l принадлежит V_k, то его *степень* $\deg X_l$ равна k, $l=1,2,\dots,N$, $k=1,2,\dots,M$.

Согласованное с субримановой структурой расстояние определяется для $w=\exp\left(\sum_{i=1}^{N}w_iX_i\right)(v)$ как $d_\infty(w,v)=\max_{i=1,\dots,N}\{|w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}$.

Определение 3. Пусть $\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}\subset\mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности $N+\widetilde{N}$, $\mathbb{G}\cap\widetilde{\mathbb{G}}=0=(\mathbf{0},\tilde{\mathbf{0}})$, поля

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет
E-mail: maryka@math.nsc.ru

$X_1,\ldots,X_N$, $\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_{\widetilde{N}}$ определены на всей группе $\mathbb{U}$ и составляют её базис, $\Omega\subset\mathbb{G}$ — открытое множество, и $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение-график φ_Γ сопоставляет каждой точке $x\in\Omega$ элемент

$$\varphi_\Gamma(x)=\exp\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(x)\widetilde{X}_j\right)(x),$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ — координатные функции: $(\varphi) = =\exp\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(x)\widetilde{X}_j\right)(\widetilde{\mathbf{0}})$.

Замечание 1. Случай $\mathbb{U}=\mathbb{G}\times\widetilde{\mathbb{G}}$ является частным для описанного в определении 3. Коммутаторы вида $[X_i,\widetilde{X}_j]$ могут быть нетривиальными.

Определение 4. Пусть $u\in\mathbb{G}$. Отображение $\theta_u:(w_1,\ldots,w_N)\mapsto w=\exp\left(\sum_{i=1}^{N}w_iX_i\right)(u)$ называется системой нормальных координат относительно u. В этом случае набор $(w_1,\ldots,w_N)$ называется нормальными координатами точки w относительно u (в базисе $\{X_i\}_{i=1}^N$).

Определение 5 (см., например, [13]). Если горизонтальные производные отображения φ существуют всюду, непрерывны и образ горизонтальных полей горизонтален, то φ принадлежит классу C_H^1.

Теорема 1 [13]. *Если φ — C_H^1-отображение группы Карно в нильпотентную градуированную группу, то оно непрерывно hc-дифференцируемо всюду, т.е., существует горизонтальный гомоморфизм $\widehat{D}\varphi(x):\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что $d_2(\varphi(w),\widehat{D}\varphi(x)\langle w\rangle)=o(d_2(x,w))$, $U\ni w\to x$.*

Определение 6 (см., например, [9]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы Ли, $E\subset\mathbb{G}$, $\psi:E\to\widetilde{\mathbb{G}}$, и функция $\tilde{\mathfrak{d}}:\psi(E)\times\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{R}_+$ равна нулю только на одинаковых элементах и симметрична. Будем говорить, что ψ полиномиально *hc*-дифференцируемо в (предельной) точке $x\in E$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение $\mathcal{L}_x:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\psi(w),\mathcal{L}_x\langle w\rangle)=o(d_\infty(x,w))$, $E\ni w\to x$;

2) $\mathcal{L}_x(w)=\theta_{\psi(x)}\circ L_x\circ\theta_x^{-1}(w)$, где L_x полиномиально зависит от $w_1,\ldots,w_N$, а $\exp\left(\sum_{i=1}^{N}w_iX_i\right)(x)=w$.

Известно [9], что отображения-графики, построенные по контактным отображениям класса C_H^1, являются полиномиально *hc*-дифференцируемыми, и полиномиальный *hc*-дифференциал в нормальных координатах имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta_i(x,y)=\\ =y_i+\sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\\ =\deg X_i,\kappa,|\lambda|+|\mu|>0}}K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}y^\kappa(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda+\\ +\sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h=\\ =\deg X_i,\alpha,\tau>0}}L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^\beta(\varphi(x))^\gamma y^\alpha(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau,\\ \widetilde{\Delta}_j(x,y)=(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j+\\ +\sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\\ =\deg\widetilde{X}_j,\kappa,|\lambda|+|\mu|>0}}K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}y^\kappa(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda+\\ +\sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h=\\ =\deg\widetilde{X}_j,\alpha,\tau>0}}L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^\beta(\varphi(x))^\gamma y^\alpha(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau,\end{gathered}\tag{1}$$

$y=(y_1,\ldots,y_N)$, $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{\widetilde{N}}(x))$, а $K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}$, $L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$, $K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}$ и $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$ — константы для всех мультииндексов κ, μ, λ, α, β, γ, τ, $i=1,2,\ldots,N$, $j=1,2,\ldots,\widetilde{N}$. Предположим, что в каждой точке x существует такая замена исходного базиса на адаптированный, что она приводит (1) к однородному виду

$$\begin{gathered}\Delta_i(x,y)=y_i+\sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h=\\ =\deg X_i,\alpha,\tau>0}}\widehat{L}^{X_i}_{\alpha,\tau}(x)y^\alpha(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau,\\ i=1,2,\ldots,N,\\ \widetilde{\Delta}_j(x,y)=(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j+\\ +\sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h=\\ =\deg\widetilde{X}_j,\alpha,\tau>0}}\widehat{L}^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\tau}(x)y^\alpha(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau,\\ j=1,2,\ldots,\widetilde{N},\end{gathered}\tag{2}$$

и, кроме того, сохраняет на $\mathbb{U}$ треугольную таблицу коммутаторов с исходными степенями базисных полей. Иными словами, справедливы соотношения

$$\begin{gathered}[{}^xY_i,{}^xY_j](y)=\sum_{k:\deg Y_k\leq\deg Y_i+\deg Y_j}\widehat{c}_{ijk}(x)\cdot{}^xY_k(y),\\ i,j=1,\ldots,\widehat{M}.\end{gathered}$$

Приведём примеры таких отображений.

1. Если в (1) константы $K^Y_{\kappa,\mu,\lambda}\neq 0$ только при $|\kappa|=1$ и $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}\neq 0$ только при $\beta=\gamma=0$, то (1) имеет вид

$$\Delta_i(x,y) = y_i + \\ + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \\ = \deg X_i, |\kappa|=1, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \\ = \deg X_i, \alpha,\tau>0}} L^{X_i}_{\alpha,\tau} y^\alpha (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\widetilde{\Delta}_j(x,y) = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j + \\ + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \\ = \deg \widetilde{X}_j, |\kappa|=1, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \\ = \deg \widetilde{X}_j, \alpha,\tau>0}} L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\tau} y^\alpha (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \; j = 1, 2, \ldots, \widetilde{N},$$

$y = (y_1, \ldots, y_N)$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\widetilde{N}}(x))$, а $K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}$, $L^{X_i}_{\alpha,\tau}$, $K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}$ и $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\tau}$ — константы для всех мультииндексов κ, μ, λ, α, τ. Тогда для приведения (1) к виду (2) достаточно применить линейные преобразования базиса.

2. Если $M = \widetilde{M} = 2$, то условие п. 1 выполнено.

3. Если $[X_i, \widetilde{X}_j] = 0$ на $\mathbb{U}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, \widetilde{N}$, то формула (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_i(x,y) &= \; y_i, & i &= 1, 2, \ldots, N, \\ \widetilde{\Delta}_j(x,y) &= \; (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j, & j &= 1, 2, \ldots, \widetilde{N}. \end{aligned}$$

4. Пусть $[\widetilde{X}_j, X_i] \in \widehat{V}_{\widehat{M}}$, $\widehat{M} = \max\{M, \tilde{M}\}$ или $[\widetilde{X}_j, X_i] = 0$, где $\widehat{V} = \bigoplus_{k=1}^{\max\{M,\widetilde{M}\}} \widehat{V}_k$ — алгебра Ли полей на $\mathbb{U}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, \widetilde{N}$. Тогда (1) имеет такой же вид, как в п. 1, и, кроме того, треугольная таблица коммутаторов после приведения коэффициентов полиномиального субриманова дифференциала к виду (2) сохраняется, так как коммутаторы добавленных к исходным полей будут нулевыми по предположению о свойствах $[\tilde{X}_j, X_i]$.

Нетрудно показать, что отображения, удовлетворяющие условиям предположения о замене базиса, аппроксимируются однородной формой полиномиального субриманова дифференциала относительно $\tilde{d}^x_2$.

Перейдём к описанию сублоренцевой структуры на $\mathbb{U}$. Разобьём в описании базисные векторные поля на "положительные" и "отрицательные" в зависимости от знака квадрата длины. Положим $\{X_1, \ldots, X_N, \widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}\} = \{Y_1, \ldots, Y_{\widehat{N}}\}$, где $\widehat{N} = N + \widetilde{N}$. Кроме того, пусть $\widehat{V}_k = \mathrm{span}\{\widehat{V}^+_k, \widehat{V}^-_k\}$, где $\widehat{V}^-_k$ совпадает с линейной оболочкой поднабора или полного набора базисных полей, входящих в $\widetilde{V}_k$, а множества $\widehat{V}^+_k$ и $\widehat{V}^-_k$ не пересекаются, и дополнительно $\widehat{V}^-_k = \widetilde{V}_k$, $k = 2, 3, \ldots, \widehat{M}$.

Поскольку во внутреннем базисе дифференциалы полиномиальных субримановых дифференциалов имеют блочно-нижнетреугольный вид в силу предположения, где каждый диагональный блок состоит из единичной матрицы размерности n_i и $(\tilde{n}_i \times n_i)$-блока $(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_i, V_i}$ матрицы $\widehat{D}\varphi$, то, перегруппируя при необходимости поля в образе, представим эти блоки как объединение частей $(\widehat{D}\varphi^+)_{\widetilde{V}_i, V_i}$ и $(\widehat{D}\varphi^-)_{\widetilde{V}_i, V_i}$, где "минусовые" части состоят из строк, соответствующих полям из $\widehat{V}^-_i$, $i = 1, 2, \ldots, \widehat{M}$.

Приведём определения сублоренцевых расстояния и меры сразу для внутреннего базиса. В определениях 7 и 8, свойстве 1, а также в теореме 2 положим $({}^xY_1, \ldots, {}^xY_{\widehat{N}}) = ({}^xX_1, \ldots, {}^xX_N, {}^x\widetilde{X}_1, \ldots, {}^x\widetilde{X}_{\widetilde{N}})$.

Определение 7 [8]. Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^{\widehat{N}} w_i {}^xY_i\right)(v)$. Определим величину ${}^x\mathfrak{d}_2^2(w,v)$ следующим образом:

$${}^x\mathfrak{d}_2^2(w,v) = \max_{k=1,\ldots,\widehat{M}} \{\mathrm{sgn}(\sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^+_k} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^-_k} y_j^2) \times \\ \times \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^+_k} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^-_k} y_j^2 |^{1/k}\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{U} : {}^x\mathfrak{d}_2^2(w,v) < r^2\}$ называется шаром относительно ${}^x\mathfrak{d}_2^2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом ${}^x\mathrm{Box}_2^{\mathfrak{d}}(v,r)$.

Замечание 2. При отображении θ_v^{-1} шар ${}^x\mathrm{Box}_2^{\mathfrak{d}}(v,r)$ переходит в декартово произведение множеств

$$\{(y_{s_k+1}, \ldots, y_{s_k+n_k+\tilde{n}k}) : \mathrm{sgn}(\sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^+_k} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^-_k} y_j^2) \times \\ \times \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^+_k} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}^-_k} y_j^2 | < r^{2k}\}, \; s_k = \sum_{k-1}^{i=1} n_i + \tilde{n}_i, \; s_1 = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \widehat{M}.$$

Прежде чем определить понятие внутренней меры на поверхностях-образах, сформулируем требование на свойства (полиномиального) субриманова дифференциала φ.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Длины строк $(\widehat{D}\varphi)^{-}_{\widetilde{V}_j, V_j}$ не превосходят величину $\frac{1}{\dim V_j} - c$, $c > 0$, $j = 1, 2, \ldots, \min\{M, \widetilde{M}\}$. Здесь $\widehat{D}\varphi$ — *hc*-дифференциал контактного отображения.

С в о й с т в о 1. Предположение 1 обеспечивает свойство пространственноподобия для поверхности $\varphi_\Gamma(\Omega)$: иными словами, как и в случае двуступенчатых сублоренцевых структур, для всех $v \in \varphi_\Gamma(\Omega)$ локально такая поверхность будет лежать вне множества

$$\left\{ w = \exp\left(\sum_{i=1}^{\widehat{N}} w_i {}^x Y_i \right)(v) : \right.$$
$$\left. : \sum_{j : Y_j \in \widehat{V}_k^{+}} y_j^2 = \sum_{j : Y_j \in \widehat{V}_k^{-}} y_j^2, k = 1, 2, \ldots, \widehat{M} \right\}$$

за исключением точки $v \in \varphi_\Gamma(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 8 [8]. Пусть $S = \varphi_\Gamma(\Omega)$. Значение адаптированной, или внутренней меры ${}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ для подмножеств S вычисляется по формуле

$${}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu(A) = \prod_{j=1}^{M} \omega_{\dim V_j} \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \right.$$
$$\left. : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} {}^{\varphi_\Gamma^{-1}(x_i)}\mathrm{Box}_2^{\eth}(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\}.$$

Следующий результат является основным.

Т е о р е м а 2. *Поверхность-график* $\varphi_\Gamma(\Omega)$ *является пространственноподобной, и для отображений-графиков справедлива формула площади*

$$\int_\Omega \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu(y),$$

где $\nu = \sum_{k=1}^{M} \dim V_k k$, *а якобиан* ${}^{SL}\mathcal{J}(\varphi, x)$ *равен*

$$\left(\det(E_{\dim V_1} + (\widehat{D}\varphi^+)^*_{\widetilde{V}_1, V_1}(x)(\widehat{D}\varphi^+)_{\widetilde{V}_1, V_1}(x) - \right.$$
$$\left. - (\widehat{D}\varphi^-)^*_{\widetilde{V}_1, V_1}(x)(\widehat{D}\varphi^-)_{\widetilde{V}_1, V_1}(x) \right)^{-1/2} \times$$
$$\times \prod_{j=2}^{M} \sqrt{\det(E_{\dim V_j} - (\widehat{D}\varphi^-)^*_{\widetilde{V}_j, V_j}(x)(\widehat{D}\varphi^-)_{\widetilde{V}_j, V_j}(x))}.$$

Идея доказательства основного шага — подсчёта меры пересечения B образа полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle\mathcal{U}\rangle$ и сублоренцева шара ${}^x\mathrm{Box}_2^{\eth}(\varphi_\Gamma(x), r)$, $x \in \mathcal{U} \Subset \Omega$, — состоит в последовательном применении формулы коплощади для проекции π_1 на $\widehat{V}_1$, а затем — для проекций $\pi_2, \ldots, \pi_{\widehat{M}-1}$ на $\widehat{V}_2, \ldots, \widehat{V}_{\widehat{M}-1}$ с учётом однородности полиномиального *hc*-дифференциала:

$$\int_B d\mathcal{H}_x^N = \int_B \mathcal{J}_{\dim \widehat{V}_1}(\pi_1) d\mathcal{H}_x^N =$$
$$= \int_{\widehat{V}_1} d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_1) \int_{\pi_1^{-1}(y_1) \cap B} d\mathcal{H}_x^{N - \dim V_1}(y) =$$
$$= \int_{\widehat{V}_1} d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_1) \cdots \int_{\widehat{V}_{M-1}} d\mathcal{H}_x^{\dim V_{M-1}}(y_{M-1}) \times$$
$$\times \int_{\pi_{M-1}^{-1}(y_{M-1}) \cap B} d\mathcal{H}_x^{\dim V_M}(y_M).$$

Источники финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.3087.2017/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миклюков В.М., Клячин А.А., Клячин В.А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Электронный ресурс http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf
2. *Берестовский В.Н., Гичев В.М.* // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. В. 4. С. 1–34.
3. *Grochowski M.* // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
4. *Korolko A., Markina I.* // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4. № 23. P. 589–618.
5. *Крым В.Р., Петров Н.Н.* // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2008. В. 3. С. 68–80.
6. *Craig W., Weinstein S.* // Proc. R. Soc. A. 2008. V. 465. № 22110. P. 3023–3046.
7. *Bars I., Terning J.* Extra Dimensions in Space and Time. B.: Springer, 2010.
8. *Карманова М.Б.* Площадь поверхностей-графиков на группах Карно с сублоренцевой структурой // ДАН. 2019. Т. 485. № 2. С. 145–148.
9. *Карманова М.Б.* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 22. С. 305–332.
10. *Карманова М.Б.* // ДАН. 2017. Т. 474. № 22. С. 151–154.
11. *Карманова М. Б.* // ДАН. 2018. Т. 480. № 21. С. 16–20.
12. *Folland G.B., Stein E.M.* Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
13. *Vodopyanov S.* The Interaction of Analysis and Geometry // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–301.

GRAPHS OF NON-SMOOTH CONTACT MAPPINGS ON CARNOT GROUPS WITH SUB-LORENTZIAN STRUCTURE

M. B. Karmanova

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak December 26, 2018

Received January 10, 2019

For classes of graph mappings constructed from C_H^1-mappings of nilpotent graded groups, we prove area formula on sub-Lorentzian structures of arbitrary depth with multi-dimensional time.

Keywords: nilpotent graded group, intrinsic basis, contact mapping, sub-Lorentzian structure, multi-dimensional time, graph-mapping, surface area.