ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 3, с. 287–291

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ ДВУХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. Д. Полянин[1,2,*], А. И. Журов[1,]**

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 27.12.2018 г.

Поступило 10.01.2019 г.

Описана новая модификация метода построения решений с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики. Решения ищутся в виде неявной зависимости, которая содержит несколько свободных функций (конкретный вид этих функций определяется далее путем анализа возникающих функционально-дифференциальных уравнений). Эффективность метода иллюстрируется на нелинейных уравнениях реакционно-диффузионного типа и уравнениях типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Получен ряд новых точных решений с функциональным разделением переменных и решений типа обобщённой бегущей волны.

Ключевые слова: решения с функциональным разделением переменных, реакционно-диффузионные уравнения, уравнения типа Клейна–Гордона, функционально-дифференциальные уравнения, точные решения в неявном виде.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524863287-291

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для конкретности будем рассматривать нелинейные уравнения математической физики, в которых ищется функция $u = u(x,t)$.

Идея предлагаемого в сообщении метода поиска точных решений с функциональным разделением переменных, заданных в неявной форме, основана на обобщении решений типа бегущей волны нелинейных уравнений теплопроводности и волновых уравнений. До описания метода приведем сначала два простых примера, которые иллюстрируют существование решений, заданных в неявном виде.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \tag{1}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Уравнение (1) допускает точное решение типа бегущей волны $u = u(z)$, $z = \lambda t + kx$, где k и λ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается уравнением $\lambda u'_z = k^2[f(u)u'_z]'_z$. Общее решение этого уравнения можно представить в неявном виде

$$k^2 \int \frac{f(u)du}{\lambda u + C_1} = \lambda t + kx + C_2, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В правой части инвариантная переменная z была заменена на исходные переменные x и t.

Пример 2. Нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x, \tag{3}$$

где $f(u)$ — произвольная функция, также допускает решение типа бегущей волны $u = u(z)$, $z = \lambda t + kx$, которое может быть представлено в неявном виде

$$\int [k^2 f(u) - \lambda^2] du = C_1(\lambda t + kx) + C_2. \tag{4}$$

Из примеров 1 и 2 видно, что нелинейные уравнения (1) и (3), зависящие от произвольной функции $f(u)$, имеют решения типа бегущей волны, которые можно представить в неявной форме. Этот факт бу-

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва

[2]Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва

*E-mail: polyanin@ipmnet.ru

**E-mail: zhurov@ipmnet.ru

дет использован далее в разделах 2–4 для поиска решений более сложного вида (см. формулу (6) и замечание 2).

Замечание 1. Решения с функциональным разделением переменных, записанные в явной форме, имеют вид $u=U_1(z_1)$, $z_1=\varphi(x)+\psi(t)$ (или $z_1=\varphi(x)\psi(t)$), где функции $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $U_1(z_1)$ ищутся в ходе исследования [1–9]. Решения типа обобщенной бегущей волны, записанные в явной форме, имеют вид $u=U_2(z_2)$, $z_2=\zeta(x)t+\theta(x)$, где $\zeta(x)$, $\theta(x)$, $U_2(z_2)$ — искомые функции [7, 9, 10].

2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных достаточно общего вида

$$F(x,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\ldots)=0. \tag{5}$$

Ищем его точные решения в неявной форме

$$\int h(u)du=\xi(x)\omega(t)+\eta(x). \tag{6}$$

Здесь функции $h=h(u)$, $\xi=\xi(x)$, $\eta=\eta(x)$, $\omega=\omega(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа, который проводится следующим образом. Сначала, используя (6), вычисляются производные u_x, u_t, u_{xx}, ..., которые выражаются в терминах функций h, ξ, η, ω и их производных. Затем полученные выражения для производных подставляются в уравнение (5), после чего исключается переменная t с помощью (6). В результате (при подходящем выборе функции ω) приходим к функционально-дифференциальным уравнениям билинейного вида

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{N}\Phi_j[x]\Psi_j[u]=0,\\ \Phi_j[x]\equiv\varphi_j(x,\,\xi,\,\eta,\,\xi'_x,\,\eta'_x,\,\xi''_{xx},\,\eta''_{xx}\ldots),\\ \Psi_j[u]\equiv\psi_j(u,\,h,\,h'_u,\,h''_{uu},\ldots).\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\Phi_j[x]$ и $\Psi_j[u]$ зависят соответственно только от x и u. На заключительном этапе функционально-дифференциальные уравнения (7) решаются, например, методами дифференцирования или расщепления [7, 9]. В итоге находятся точные решения исходного уравнения (5).

Замечание 2. Представление решения в виде (6) основано на естественном обобщении решения (2), которое проводится по схеме:

$$\frac{k^2f(u)}{\lambda u+C_1}\Rightarrow h(u),$$
$$\lambda\Rightarrow\xi(x),\quad t\Rightarrow\omega(t),\quad kx+C_2\Rightarrow\eta(x).$$

Замечание 3. Поиск решения в неявном виде с интегральным членом в левой части (6) часто приводит к уравнениям для определения функции h более низкого порядка, чем при поиске точных решений в явном виде. Кроме того, неявная форма записи решения обычно приводит к более простым явным представлениям функций g и f через h (при поиске точных решений в явном виде функции g и f нередко выражаются в параметрической форме [9]).

3. РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЯ

Применим описанный в разделе 2 метод для построения точных решений нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+b(x)g(u). \tag{8}$$

Отметим, что некоторые точные решения уравнений (8) с функциями $f(u)$ и $g(u)$ степенного и экспоненциального вида были получены в [3, 9–12].

В данном сообщении основное внимание уделяется уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от одной или двух произвольных функций (отметим, что точные решения нелинейных уравнений математической физики, которые содержат произвольные функции и поэтому обладают значительной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования и оценки точности приближенных аналитических и численных методов интегрирования соответствующих начально-краевых задач). Аргументы функций $f=f(u)$, $g=g(u)$, $h=h(u)$, $a=a(x)$, $b=b(x)$, $\omega=\omega(t)$, которые входят в уравнение (8) и решение (6), далее часто будут опускаться.

Дифференцируя (6) по t и x, находим частные производные u_t, u_x, u_{xx}. Подставив их в (8), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\omega'_t=\Theta_1(x,u)\omega^2+\Theta_2(x,u)\omega+\Theta_3(x,u), \tag{9}$$

где функции Θ_n не зависят явно от t и определяются формулами

$$\Theta_1(x,u)=\frac{a(\xi_x')^2}{\xi}\left(\frac{f}{h}\right)_u',$$

$$\Theta_2(x,u)=\frac{1}{\xi}\left[(a\xi_x')_x' f+2a\xi_x'\eta_x'\left(\frac{f}{h}\right)_u'\right], \qquad (10)$$

$$\Theta_3(x,u)=\frac{1}{\xi}\left[(a\eta_x')_x' f+a(\eta_x')^2\left(\frac{f}{h}\right)_u'+bgh\right].$$

Функционально-дифференциальное уравнение (9), (10) зависит от трех переменных t, x, u, которые связаны одним соотношением (6), и содержит искомые функции и их производные, зависящие от разных аргументов.

Анализ показывает, что уравнение (9), (10) при $\eta(x)\neq\text{const}$ можно свести к билинейному функционально-дифференциальному уравнению вида (7) для следующих функций: $\omega(t)=kt$, $\omega(t)=ke^{\lambda t}$, $\omega(t)=k\ln t$. Далее, опуская промежуточные выкладки, приведем некоторые точные решения вида (6) уравнения (8).

Р е ш е н и е 1. Уравнение

$$u_t=[a(x)u_x]_x-\frac{x^2}{a(x)}g(u), \qquad (11)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $g(u)$, допускает точное решение типа бегущей волны в неявном виде

$$\int h(u)du=t+\int\frac{x\,dx}{a(x)}+C_1,$$
$$h(u)=\left(2\int g(u)du+C_2\right)^{-1/2}, \qquad (12)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Р е ш е н и е 2. Уравнение

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+\frac{a_x'(x)}{\sqrt{a(x)}}u, \qquad (13)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение типа бегущей волны в неявном виде

$$\int\frac{f(u)}{u}du=4t-2\int\frac{dx}{\sqrt{a(x)}}+C. \qquad (14)$$

Р е ш е н и е 3. Уравнение

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+m+\frac{k}{f(u)}, \qquad (15)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и две произвольные постоянные k и m, имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int f(u)du=kt-m\int\frac{x\,dx}{a(x)}+C_1\int\frac{dx}{a(x)}+C_2, \qquad (16)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Р е ш е н и е 4. Уравнение

$$u_t=[f(u)u_x]_x+x\left[k+\frac{1}{f(u)}\right], \qquad (17)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и произвольную постоянную k, допускает точное решение типа обобщённой бегущей волны в неявном виде

$$\int f(u)du=xt-\frac{1}{6}kx^3+C.$$

Р е ш е н и е 5. Уравнение

$$u_t=[x^n f(u)u_x]_x-u+\frac{(n-2)u}{f(u)}\int\frac{f(u)}{u}du,$$

где $f(u)$ — произвольная функция, $n\neq 2$ — произвольная постоянная, допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$\int\frac{f(u)}{u}du=ke^{(n-2)t}+\frac{x^{2-n}}{2-n},$$

k — произвольная постоянная.

4. УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА И ИХ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим теперь нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами

$$u_{tt}=[a(x)f(u)u_x]_x+b(x)g(u). \qquad (18)$$

Несколько точных решений уравнений этого вида описаны в [8, 9].

Ниже приведены полученные методом, изложенным в разделе 2, некоторые точные решения уравнений (18) достаточно общего вида, которые зависят от одной или двух произвольных функций (промежуточные выкладки опущены).

Решение 6. Уравнение

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} g(u), \qquad (19)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $g(u)$, допускает следующие точные решения типа обобщённой бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{du}{g(u)} = \pm 2t - 2\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C. \qquad (20)$$

Решение 7. Уравнение

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x - m - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}, \qquad (21)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и произвольную постоянную m, имеет точные решения типа обобщённой бегущей волны в неявном виде

$$\int f(u)du = \pm t + m\int \frac{x dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \qquad (22)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение 8. Уравнение

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x - x^2 \left[k + \frac{f'_u(u)}{f^3(u)} \right], \qquad (23)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и произвольную постоянную k, допускает точное решение типа обобщённой бегущей волны в неявном виде

$$\int f(u)du = xt + \frac{1}{12}kx^4 + C.$$

Решение 9. Уравнение

$$u_{tt} = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + b(x), \qquad (24)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $b(x)$, допускает точное решение типа обобщённой бегущей волны, которое можно записать в явном виде

$$u = \frac{1}{4}\left[\xi(x)t + \eta(x)\right]^2.$$

Здесь функция $\xi = \xi(x)$ определяется по формуле

$$\xi = C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \qquad (25)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\eta = \eta(x)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[a(x)\eta'_x]'_x = \frac{1}{2}\xi^2 - b(x).$$

Поскольку правая часть этого уравнения известна, то η находится простым интегрированием.

Решение 10. Уравнение

$$u_{tt} = (e^x u_x)_x - \frac{1}{2h} + \frac{h'_u}{h^3}\int h du$$

для произвольной зависимости $h = h(u)$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$\int h du = e^{-x} - \frac{1}{4}(t + C)^2,$$

где C — произвольная постоянная.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описана новая модификация метода построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявном виде. Эффективность метода иллюстрируется на нелинейных уравнениях реакционно-диффузионного типа и уравнениях типа Клейна—Гордона с переменными коэффициентами, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Получен ряд новых точных решений с функциональным разделением переменных и решений типа обобщённой бегущей волны. Важно отметить, что построенные решения являются неинвариантными (т.е. они не могут быть получены с помощью группового анализа дифференциальных уравнений).

Источники финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–29–10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grundland A.M., Infeld E.* // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2498–2503.
2. *Zhdanov R.Z.* // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
3. *Doyle Ph.W., Vassiliou P.J.* // Int. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 2. P. 315–326.

4. *Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A.* Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Dordrecht: Kluwer, 1998.
5. *Estevez P.G., Qu C., Zhang S.* // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 275. P. 44–59.
6. *Estevez P.G., Qu C.Z.* // Theor. Math. Phys. 2002. V. 133. P. 1490–1497.
7. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
8. *Hu J., Qu C.* // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. P. 298–311.
9. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. 2nd Ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
10. *Polyanin A.D.* // Appl. Math. Comput. 2019. V. 347. P. 282–292.
11. *Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovych R.O., Sophocleous C.* // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
12. *Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. J.* // Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 225–242.

FUNCTIONAL SEPARABLE SOLUTIONS OF TWO CLASSES OF NONLINEAR MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS

A. D. Polyanin[1,2], A. I. Zhurov[1]

[1]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[2]*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernous'ko December 27, 2018

Received January 10, 2019

The study describes a new modification of the method of functional separation of variables for nonlinear equations of mathematical physics. Solutions are sought in an implicit form that involves several free functions; the specific expressions of these functions are determined in the subsequent analysis of the arising functional differential equations. The effectiveness of the method is illustrated by examples of nonlinear reaction-diffusion equations and Klein–Gordon type equations with variable coefficients that depend on one or more arbitrary functions. A number of new exact functional separable solutions and generalized traveling-wave solutions are obtained.

Keywords: functional separable solutions, reaction-diffusion equations, Klein–Gordon type equations, functional differential equations, exact solutions in implicit form.