

ПРОЦЕССЫ  
УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62–50

ВЛИЯНИЕ ГАБАРИТОВ УПРАВЛЯЕМОГО УСТРОЙСТВА  
НА ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПОВОРОТ  
С ПОМОЩЬЮ ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ

А. М. Шматков

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноушко 31.01.2019 г.

Поступило 01.02.2019 г.

Исследована двумерная задача оптимального быстрогодействия с фазовым ограничением для замкнутой механической системы, включающей в себя материальную точку и твёрдое тело, взаимодействующие между собой с помощью внутренних сил. Предполагается, что материальная точка не может удалиться от центра масс тела далее, чем на известное расстояние. Найден закон управления, позволяющий повернуть тело на заданный угол за минимальное время путём выбора вектора скорости материальной точки. Решение для случая, когда происходит выход на ограничение, построено в явном виде в форме квадратур, представляющих собой эллиптические интегралы. Приведён численный пример использования полученных формул.

*Ключевые слова:* капсульный робот, оптимальное быстродействие, принцип максимума.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-56524863292-296>

1. Рассмотрим механическую систему, в состав которой входит материальная точка массы  $m$  и твёрдое тело массы  $M$ . Они взаимодействуют друг с другом посредством внутренних сил и никакие внешние силы на систему не действуют.

Системы такого рода представляют интерес при создании робототехнических устройств, перемещающихся вследствие движения масс, находящихся внутри корпуса, который по этой причине может быть сделан герметичным [1–3], что актуально, например, в случаях, когда внешняя среда агрессивна. Следовательно, необходимо учесть тот факт, что внутренняя масса не может выйти наружу, т.е. удалиться от центра масс корпуса дальше, чем на некоторое заданное расстояние, определяемое габаритами устройства.

Ограничимся изучением плоскопараллельных движений двух указанных объектов. Обозначим декартовы координаты материальной точки в системе координат, связанной с твёрдым телом, через  $x$  и  $y$ , причём центр этой системы поместим в центре масс твёрдого тела. Пусть главная центральная ось инер-

ции тела проходит через указанный центр. Соответствующий момент инерции обозначим через  $J$ . Наложим ограничение на возможные положения материальной точки, состоящее в том, что её расстояние от центра масс тела не может превышать некоторой заданной постоянной величины  $R > 0$ . Предположим, что проекции  $u$  и  $v$  вектора скорости материальной точки на оси описанной системы координат могут быть выбраны произвольно при условии, что модуль этого вектора не превышает  $V$ . Тогда, введя параметр  $\mu = \frac{m}{M+m}$ , движение рассматриваемой механической системы можно описать следующими дифференциальными уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} \dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\phi} &= \frac{\mu(yu - xv)}{a^2 + \mu(x^2 + y^2)}, \\ u^2 + v^2 &\leq V^2, \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a = \sqrt{J/M}$  — радиус инерции тела,  $\phi$  — его угол поворота.

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  все фазовые координаты системы известны, а в конечный момент времени  $t = T$  задан только угол поворота твёрдого тела

$$\begin{aligned} x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x_0^2 + y_0^2 \leq R^2, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(T) = \varphi_T. \end{aligned} \quad (2)$$

Требуется с помощью управлений  $u$  и  $v$  перевести систему (1) из начального в конечное состояние за минимальное время  $T$ , т.е. решить задачу оптимального быстродействия при наличии ограничения на фазовые координаты [5].

Следуя [6], воспользуемся следующей заменой переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \frac{\sqrt{\mu}}{a} x, \quad \tilde{y} = \frac{\sqrt{\mu}}{a} y, \quad \tilde{R} = \frac{\sqrt{\mu}}{a} R, \\ \tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}, \quad \tilde{t} = \frac{V\sqrt{\mu}}{a} t \end{aligned}$$

и получим из (1), сохранив старые обозначения, систему

$$\begin{aligned} \dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\varphi} = \frac{yu - xv}{1 + x^2 + y^2}, \\ u^2 + v^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq R^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее перейдём к полярным переменным

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad u = r_\xi \cos \xi, \quad v = r_\xi \sin \xi,$$

где  $r$  и  $\alpha$  описывают положение материальной точки, а  $r_\xi$  и  $\xi$  — её скорость. Тогда, как показано в [6], систему (3) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \dot{r} = \hat{u}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\hat{v}}{r}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{r\hat{v}}{1 + r^2}, \\ \hat{u}^2 + \hat{v}^2 \leq 1, \quad r \leq R, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\hat{u} = r_\xi \cos(\xi - \alpha)$  и  $\hat{v} = r_\xi \sin(\xi - \alpha)$  — новые управления.

Как видно из системы (4), можно без ограничения общности положить  $\alpha(0) = 0$  и  $\varphi(0) = 0$ , заменив граничные условия (2) на

$$\begin{aligned} r(0) = r_0, \quad r_0 \leq R, \quad \alpha(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(T) = \varphi_T. \end{aligned} \quad (5)$$

Итак, необходимо решить задачу оптимального быстродействия для системы (4) с граничными условиями (5).

2. Согласно [6], при  $r_0 > 1$  на оптимальной траектории величина  $r$  больше единицы и монотонно уменьшается с ростом  $|\alpha|$ , а при  $r_0 = 1$  оптимальная

траектория — единичная окружность с центром в начале координат. Поэтому при  $R \geq 1$  фазовое ограничение можно игнорировать и в дальнейшем будем рассматривать только случай  $R < 1$ .

Воспользуемся теорией [5] и запишем гамильтониан для системы (4)

$$H = p_0 + p_r \hat{u} + p_\alpha \frac{\hat{v}}{r} - p_\varphi \frac{r\hat{v}}{1 + r^2}, \quad p_0 = \text{const}. \quad (6)$$

В (6) через  $p_r$ ,  $p_\alpha$  и  $p_\varphi$  обозначены переменные, сопряжённые к фазовым переменным  $r$ ,  $\alpha$  и  $\varphi$  соответственно. Дифференциальные уравнения для сопряжённых переменных имеют вид

$$\dot{p}_r = \left( \frac{p_\alpha}{r^2} + p_\varphi \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)^2} \right) \hat{v}, \quad \dot{p}_\alpha = 0, \quad \dot{p}_\varphi = 0. \quad (7)$$

Для участка траектории, на котором  $r$  строго меньше  $R$ , оптимальные управления найдены в [6]. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{u}_* &= \frac{p_r}{\sqrt{\left( \frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1 + r^2} \right)^2 + p_r^2}}, \\ \hat{v}_* &= \frac{\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1 + r^2}}{\sqrt{\left( \frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1 + r^2} \right)^2 + p_r^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Время быстродействия можно найти по формуле

$$T = \left| \int_{r_0}^{r_T} \frac{r^2 (1 + r^2) \sqrt{C_0} dr}{(C_\alpha + C_\alpha r^2 - r^2) \sqrt{\Psi(r)}} \right|, \quad (9)$$

а оптимальная траектория может быть описана соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \pm \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{\Psi(\rho)}}, \\ \Psi(\rho) &= C_0 \left( \frac{\rho^2 (1 + \rho^2)}{C_\alpha + C_\alpha \rho^2 - \rho^2} \right)^2 - \rho^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $C_\alpha = p_\alpha / p_\varphi = \text{const}$  и  $C_0 = \text{const}$ . В рассматриваемом случае (5) терминальное условие для угла  $\alpha$  отсутствует, а потому  $p_\alpha = 0$ . Тогда  $C_\alpha = 0$ . Кроме того, в (5) отсутствует и терминальное условие для

расстояния  $r$ , а потому  $p_r(T) = 0$ . Как показано в [6], это даёт

$$C_0 = \frac{r_T^2}{(1 + r_T^2)^2}, \quad r_T = r(T). \quad (11)$$

Неизвестное значение  $r_T$  можно найти из уравнения

$$\Phi_T = \mp \int_{r_0}^{r_T} \frac{\rho^2 d\rho}{(1 + \rho^2) \sqrt{\Psi(\rho)}}. \quad (12)$$

Заметим, что интегралы в (10) и (12) являются эллиптическими [7].

Запишем фазовое ограничение  $r < R$  из (4) в форме

$$g(r(t), \alpha(t), \varphi(t)) = r(t) - R \leq 0. \quad (13)$$

Введём полную производную по времени  $\chi$  функции  $g$  в силу системы дифференциальных уравнений (4):

$$\begin{aligned} \chi(r, \alpha, \varphi, \hat{u}, \hat{v}) &= (\text{grad } g, f) = \\ &= \frac{\partial g}{\partial r} \hat{u} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \hat{v} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \frac{-r\hat{v}}{1 + r^2} = \hat{u}. \end{aligned} \quad (14)$$

Градиент в (14) вычисляется по вектору с компонентами, являющимися фазовыми переменными  $r$ ,  $\alpha$  и  $\varphi$ , а вектор  $f$  имеет компоненты, равные производным этих переменных по времени согласно (4). Из (14) видно, что градиент функции  $\chi$  по вектору управления с компонентами  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$  для любых значений последних представляет собой ненулевой вектор с компонентами 1 и 0.

Рассмотрим участок траектории, где фазовое ограничение (13) обращается в тождество  $g(t) \equiv 0$ . Он представляет собой дугу окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат. Функция  $\chi$  на нём равна нулю, поскольку в этом случае управление  $\hat{u}$ , согласно (4), равно нулю. Запишем ограничение на управление из (4) в виде

$$q(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{u}^2 + \hat{v}^2 - 1 \leq 0. \quad (15)$$

Из () следует, что градиент функции  $q$  по вектору управления с компонентами  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$  является вектором с компонентами  $2\hat{u}$  и  $2\hat{v}$ . На рассматриваемом участке траектории  $\hat{u} = 0$ , а значение  $\hat{v} = 0$  не представляет интереса, поскольку в этом случае механическая система покоится. Тогда градиенты функций  $\chi$  и  $q$  по вектору управления линейно независимы

при  $g(t) \equiv 0$ . Следовательно, при  $g(t) \equiv 0$  все траектории движения системы (4) регулярны [5].

Найдём оптимальное управление для этого участка. Из принципа максимума Л.С. Понтрягина, формулы (6) и ограничения (15) следует, что управление  $\hat{v}$  на оптимальной траектории равно

$$\hat{v}_{*0} = \text{sign} \left( \frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1 + r^2} \right). \quad (16)$$

В [6] установлено, что при  $r_0 < 1$  величина  $r$  меньше единицы, монотонно увеличиваясь с ростом  $|\alpha|$  на участках траектории, не лежащих на границе области, выделяемой фазовым ограничением (13). Другими словами, не существует указанных участков оптимальной траектории, на которых при увеличении  $|\alpha|$  происходит уменьшение значения  $r$ . Это означает, что если оптимальное решение вышло на ограничение  $r = R$ , то сойти с него оно не может. Следовательно, каждая оптимальная траектория содержит не более одной точки стыка [5].

В точке стыка, соответствующей моменту времени  $\tau$ , должно выполняться условие скачка [5] в одной из двух форм:

$$\begin{aligned} p(\tau + 0) &= p(\tau - 0) + \lambda \text{grad } g(r(\tau), \alpha(\tau), \varphi(\tau)), \\ p_0(\tau + 0) &= p_0(\tau - 0), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} p(\tau - 0) + \lambda \text{grad } g(r(\tau), \alpha(\tau), \varphi(\tau)) &= 0, \\ p_0(\tau - 0) &= 0, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В (17) и (18) скаляр  $\lambda$  — действительное число,  $p$  — вектор с компонентами  $p_r$ ,  $p_\alpha$  и  $p_\varphi$ , вектор  $p(\tau - 0)$  равен пределу слева вектора  $p(t)$  в точке, соответствующей моменту  $\tau$ , вектор  $p(\tau + 0)$  равен аналогичному пределу справа, так же определены и значения константы  $p_0$ , записанные в форме  $p_0(\tau - 0)$  и  $p_0(\tau + 0)$ .

Предположим, что условие скачка выполняется в форме (18). Поскольку функция (13) зависит от  $r$  и не зависит от  $\alpha$  и  $\varphi$ , то из (18) получаем

$$\begin{aligned} p_0(\tau - 0) &= 0, \quad p_r(\tau - 0) = -\lambda \neq 0, \\ p_\alpha(\tau - 0) &= 0, \quad p_\varphi(\tau - 0) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответствующий предел гамильтониана (6), с учётом (8) и (19), есть

$$H(\tau - 0) = -\lambda \hat{u}_*(\tau - 0) = -\lambda \frac{-\lambda}{|\lambda|} = |\lambda|. \quad (20)$$

Согласно [5], значение гамильтониана на оптимальном решении постоянно и равно нулю. Тогда предел (20) должен быть равен нулю, но, с другой стороны, как указано в (18),  $\lambda \neq 0$ . Следовательно, мы пришли к противоречию и условие скачка должно выполняться в форме (17).

По аналогии с (19) из (17) получаем, что все сопряжённые переменные, кроме  $p_r$ , в точке стыка непрерывны:

$$p_r(\tau+0) = p_r(\tau-0) + \lambda, \quad p_\alpha(\tau+0) = p_\alpha(\tau-0), \quad p_\varphi(\tau+0) = p_\varphi(\tau-0). \quad (21)$$

Кроме того, оптимальная траектория непрерывна и  $r(\tau \pm 0) = R$ . Тогда

$$H(\tau \pm 0) = p_0 + p_r(\tau \pm 0)\hat{u}_*(\tau \pm 0) + \zeta\hat{v}_*(\tau \pm 0),$$

$$\zeta = \frac{p_\alpha}{R} - \frac{p_\varphi R}{1 + R^2}.$$

Значения  $\hat{u}_*(\tau-0)$  и  $\hat{v}_*(\tau-0)$  определены формулами (8), значение  $\hat{v}_*(\tau+0)$  — формулой (16), а  $\hat{u}_*(\tau+0) = 0$ . Гамильтониан (6) на оптимальном решении непрерывен. Следовательно, в точке стыка имеем  $H(\tau-0) = H(\tau+0)$ , откуда для момента времени  $\tau$  следует уравнение

$$p_r(\tau-0) \frac{p_r(\tau-0)}{\sqrt{\zeta^2 + p_r^2(\tau-0)}} + \zeta \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + p_r^2(\tau-0)}} = \zeta \operatorname{sign} \zeta. \quad (22)$$

Из (22) получаем  $p_r(\tau-0) = 0$  при  $\zeta \neq 0$ . Согласно граничным условиям (5), величина  $p_\alpha = 0$ , а поскольку  $R > 0$ , то случай  $\zeta = 0$  возможен лишь при  $p_\varphi = 0$ . Тогда условие непрерывности гамильтониана (6) в точке стыка имеет вид  $p_r(\tau-0)\hat{u}^- = 0$ , где  $\hat{u}^-$  — предел слева оптимального управления в точке стыка. Если  $p_r(\tau-0) \neq 0$ , то  $\hat{u}^- = 0$  и движение слева от точки стыка удовлетворяет ограничению  $g = 0$ . Но тогда эта точка не является точкой выхода на фазовое ограничение. Следовательно,  $p_r(\tau-0) = 0$  на любой оптимальной траектории, имеющей точку стыка.

Рассмотрим оптимальную траекторию, выходящую на фазовое ограничение (13). Участок этой траектории вплоть до точки стыка можно построить, если заметить, что полученное из (22) условие  $p_r(\tau-0) = 0$  эквивалентно условию трансверсальности в случае траектории, оканчивающейся на

окружности  $g = 0$ , если не фиксировать терминальное расстояние материальной точки от начала координат. Сопряжённая переменная  $p_\alpha$  непрерывна на всей траектории в силу условия скачка (17) и равна нулю в силу соответствующего условия трансверсальности, следующего из того, что угол  $\alpha$  в конечный момент времени не задан. Поэтому  $C_\alpha = 0$  в (10), а  $r_T$  в (11) следует заменить на  $R$ . Другими словами, уравнение (12) решать не нужно, а можно сразу получить зависимость  $\alpha(r)$  для рассматриваемого участка, вычисляя эллиптический интеграл в (10). Оставшаяся часть оптимальной траектории — дуга окружности радиуса  $R$  с центром в начале системы координат.

3. Опишем процедуру решения задачи в целом.

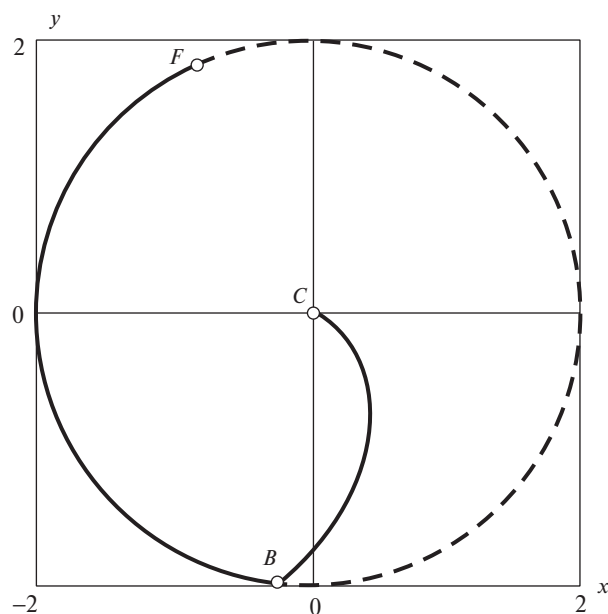
Если  $R < 1$ , то сначала нужно найти эллиптический интеграл в (12), взяв  $r_T = R$ . Если модуль полученной величины  $\varphi_R$  окажется больше  $|\varphi_T|$ , то следует, как и для  $R \geq 1$ , отбросив фазовое ограничение, решить уравнение (12) относительно  $r_T$  и найти траекторию из (10). В противном случае участок траектории до момента времени  $\tau$  выхода на ограничение при  $\alpha(\tau) = \alpha_R$  определён той же формулой (10), но при  $r_T = R$ . Дальнейшее движение вплоть до достижения переменной  $\varphi$  требуемой величины  $\varphi_T$  происходит при  $r(t) \equiv R$  согласно уравнениям (4) при  $\hat{u} = 0$  и  $\hat{v} = \pm 1$  с начальными условиями  $\varphi(\tau) = \varphi_R$  и  $\alpha(\tau) = \alpha_R$ . Нахождение параметров этого движения не представляет никаких затруднений, а значение  $\tau$  можно вычислить по формуле (9) при  $C_\alpha = 0$  и  $r_T = R$  как длину участка траектории до выхода на ограничение:

$$\tau = \left| \int_{r_0}^R (1 + \rho^2) \sqrt{\frac{C_0}{\Psi(\rho)}} d\rho \right|.$$

На рисунке 1 показан пример оптимальной траектории для случая  $\mu = 0,25$ ,  $a = 4$ ,  $R = 2$ ,  $\varphi_T = 0,2$ ,  $r_0 = 0$ . Полное время движения  $T \approx 8,35$ . При выходе в точке  $B$  на фазовое ограничение, показанное пунктиром, траектория имеет излом, причём  $\tau \approx 3,24$  и  $\varphi_R \approx 0,05$ . До конечной точки  $F$  движение происходит по фазовому ограничению.

В заключение отметим, что решение задачи (1) при ограничении  $x^2 + y^2 \geq R^2$  полностью аналогично описанному выше.

**Источники финансирования.** Работа частично выполнена по теме государственного задания (№ государственной регистрации АААА-А17-117021310387-0) при частичной финансовой поддержке РФФИ 17-08-00742,



**Рис. 1.** Оптимальная по быстродействию траектория материальной точки с выходом на фазовое ограничение.

а также при частичной поддержке программы президиума РАН № 30 “Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации” (№ госрегистрации AAAA-A17-117121120031-8).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Schmoeckel F., Worn H.* Remotely Controllable Microrobots Acting as Nano Positioners and Intelligent Tweezers in Scanning Electron Microscopes (SEMs). Proc. Intern. Conf. Robotics and Automation, IEEE, N.Y. 2001. V. 4. P. 3903–3913.
1. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators // Trans. ASME, J. Dyn. Syst., Measur. and Control. 2006. V. 128. P. 122–133.
  2. *Chernousko F. L.* Two-Dimensional Motions of a Body Containing Internal Moving Masses // Meccanica. 2016. V. 51. № 12. P. 3203–3209.
  3. *Чернoуско Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
  4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
  5. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // ДАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
  6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

## INFLUENCE OF THE SIZE OF A CONTROLLABLE DEVICE ON TIME-OPTIMAL ROTATION GENERATED BY A MOVING INTERNAL MASS

**A. M. Shmatkov**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernous'ko January 31, 2019

Received February 1, 2019

A two-dimensional time-optimal control problem with a state constraint is studied for a closed mechanical system consisting of a mass point and a solid body that interact via internal forces. It is assumed that the mass point is not allowed to move further away from the body's center of mass than a prescribed distance. A control function is found allowing the body to be turned through a given angle in a minimum time by choosing the velocity of the mass point. In the case of reaching the state constraint, the solution is constructed in explicit form via quadratures representing elliptic integrals. A numerical example of using the derived formulas is given.

**Keywords:** capsular robot, time-optimal control problem, maximum principle.